Рихард Курант

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книги Р. Куранта и Д. Гильберта „Методы математической физики" хорошо известны советским физикам и математикам. Том I был издан на русском языке в 1933 году, том II — в 1945 году, и затем оба тома были переизданы у нас в 1951 году[1]).

Эти книги оказали большое влияние на развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными, математической физики, математического анализа, а также на развитие всей математической культуры.

„Методы математической физики" написаны Р. Курантом. Однако влияние идей Д. Гильберта на эти книги было столь значительным, что Р. Курант поставил на них также и имя своего учителя.

В 1962 году, т. е. через 25 лет после выхода в свет первого издания тома II „Методов математической физики", появилось новое издание этого тома. Настоящая книга представляет собой перевод этого нового издания. Новое издание настолько сильно отличается от старого, что по существу является новой книгой.

Как и первое издание, она посвящена теории дифференциальных уравнений с частными производными. В ней в известной мере нашло свое отражение все развитие этой теории за последние 25 лет. Более того, в книге затронуты также такие проблемы, которые начали интенсивно разрабатываться лишь в последние годы и еще весьма далеки от полного их решения. Большое внимание автор уделяет приложениям общих идей и методов к изучению важных конкретных уравнений, таких, как уравнения гидродинамики, кристаллооптики, магнитной гидродинамики, уравнения газовой динамики, телеграфные уравнения и другие.

Первая глава книги носит в основном вводный характер и лишь немногим отличается от первой главы старого издания.

Вторая глава содержит исчерпывающее изложение теории дифференциальных уравнений первого порядка. В этой главе имеется новый параграф, где приведено доказательство важной теоремы Хаара о единственности решения задачи Коши. Второе дополнение к этой

[1]) Всюду в дальнейшем в ссылках на том I указаны страницы по русскому изданию 1951 года.

главе посвящено теории разрывных решений квазилинейных уравнений, записанных в виде законов сохранения. Эти вопросы изучались в последние годы в работах многих советских и зарубежных математиков. Большое влияние на развитие этой теории, которая в настоящее время еще очень далека от завершения, оказали задачи газовой динамики и, в частности, теория ударных волн.

Глава III посвящена уравнениям высшего порядка и системам уравнений первого порядка. Здесь с большей полнотой, чем это было в первом издании, изложены вопросы классификации таких уравнений и систем, приведение их к каноническому виду; большое внимание уделено уравнениям с постоянными коэффициентами и методам их исследования. В этой же главе вводится и обсуждается такое фундаментальное понятие теории уравнений с частными производными, как „корректно поставленная задача". К этой главе написано два новых дополнения. Первое из них содержит доказательство одной из теорем вложения С. Л. Соболева, которая в зарубежной литературе носит название леммы Соболева. Теоремы вложения С. Л. Соболева и их обобщения играют важную роль во многих современных исследованиях по дифференциальным уравнениям с частными производными.

В главе IV, посвященной уравнениям эллиптического типа, осталась без больших изменений лишь та часть, которая относится к классической теории потенциала. Большая часть этой главы является новой. Здесь имеется параграф, посвященный теории рассеяния и условиям Зоммерфельда, изложены основные свойства общих эллиптических уравнений второго порядка, даны приложения априорных оценок Шаудера к решению краевых задач для линейных, а также некоторых классов нелинейных эллиптических уравнений. В дополнении к этой главе, написанном Л. Берсом, дано изложение теории обобщенных аналитических функций или, как их еще называют, псевдоаналитических функций. Эта теория другим путем построена в известной книге И. Н. Векуа „Обобщенные аналитические функции".

Главы V и VI книги посвящены гиперболическим уравнениям и системам и составляют по своему объему половину всей книги. Хотя эти главы содержат все то, что было в V и VI главах старого издания, и, кроме того, в них включено с некоторыми изменениями дополнение к гл. III старого издания, посвященное операционному исчислению Хевисайда, большинство параграфов этих глав являются совершенно новыми. Здесь дано не только исчерпывающее изложение основ теории гиперболических уравнений, но также имеется много важных результатов, полученных в последние годы. Значительная часть этих результатов принадлежит Р. Куранту и его школе. Сюда относятся результаты Р. Куранта и П. Лакса о решении задачи Коши с разрывными начальными данными и об асимпто-

тическом разложении решения с осциллирующими начальными функциями, результаты Ф. Джона о применении плоских волн к решению задачи Коши, результаты К. О. Фридрихса для симметрических систем и другие. Здесь нужно отметить, что фундаментальные результаты И. Г. Петровского для общих гиперболических уравнений и систем оказали очень сильное влияние на развитие всей теории гиперболических уравнений.

Вторая часть главы VI посвящена главным образом выводу явных формул для решения задачи Коши для гиперболических уравнений и систем с постоянными коэффициентами. Здесь же доказаны некоторые теоремы о лакунах. При исследовании вопроса о распространении разрывов вдоль характеристических поверхностей в гл. V и далее систематически в главе VI используются обобщенные функции, которые за последние десятилетия, после выхода в свет работ Л. Шварца и предшествовавших им работ С. Л. Соболева, стали мощным орудием исследования уравнений с частными производными. Изложению основ теории обобщенных функций посвящено приложение к главе VI.

Глава VII старого издания, посвященная вариационным методам решения краевых задач и задач о собственных значениях, не вошла в новое издание. Автор предполагает в скором времени издать III-й том, где, в частности, будут изложены и эти вопросы.

К сожалению, в книге не рассматриваются параболические уравнения, которые в последние десятилетия были подвергнуты тщательному изучению и нашли применения во многих задачах физики. Читатель может найти первоначальные сведения об этих уравнениях в книге И. Г. Петровского „Лекции об уравнениях с частными производными" и в статье А. М. Ильина, А. С. Калашникова и О. А. Олейник „Линейные уравнения второго порядка параболического типа" в „Успехах математических наук" за 1962 год, где имеется обзор дальнейших результатов и ссылки на соответствующую литературу.

Настоящая книга рассчитана на очень широкий круг читателей. Отдельные ее параграфы могут составить тот материал, который обычно включается в курс уравнений с частными производными или курс математической физики для студентов университетов, и в этом смысле книга может служить учебником для студентов. С другой стороны, различные части этой книги могут быть использованы аспирантами математиками, механиками и физиками для подготовки экзаменов. Эта книга знакомит начинающих научных работников с современными идеями и методами, вооружившись которыми, можно вести исследования по актуальным проблемам теории дифференциальных уравнений и математической физики. Отдельные части книги представляют большой интерес и для специалистов, работающих в области теории дифференциальных уравнений и в

смежных областях, так как они написаны на уровне специальной монографии, где излагаются многие тонкие результаты.

Нужно особо отметить выдающееся педагогическое мастерство Р. Куранта, его умение неформально излагать сложные результаты, предварительно указывая их основы на ряде простейших примеров.

Богатство идей и методов, доступность изложения, разнообразие рассматриваемых задач, связь с современными исследованиями и множество важных приложений к задачам физики сделают настоящую книгу Р. Куранта одной из наиболее популярных среди наших читателей, интересующихся теорией уравнений с частными производными. Несомненно, что русское издание этой ценной книги будет способствовать дальнейшему прогрессу многих разделов математики и физики.

О. А. ОЛЕЙНИК

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Я счастлив, что по инициативе моих друзей из Московского университета, в особенности моего глубокоуважаемого коллеги профессора Ольги Олейник, русское издание этой книги удалось подготовить так скоро после ее выхода в свет. Надо отдать должное переводчику — доценту Татьяне Вентцель, чьи незаурядные лингвистические способности сочетаются с глубокими познаниями в области математики, в которой она сама успешно работает.

Из-за недостатка времени я не смог в этот короткий срок внести все желательные изменения в первоначальный текст. Но я надеюсь, что мне все же удалось, опираясь на конструктивные критические замечания профессора Олейник и других, устранить некоторые недочеты. Надеюсь также, что в русское издание включены более полные ссылки, отражающие весьма плодотворную и активную работу советских математиков в области уравнений с частными производными.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность всем, кто принимал участие в подготовке этого издания моей книги.

РИХАРД КУРАНТ

Нью-Йорк
3 февраля 1964 г.

Посвящается Курту Отто Фридрихсу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий том посвящен теории дифференциальных уравнений с частными производными, в особенности тем разделам этой широкой области науки, которые связаны с физическими и механическими понятиями. Но даже при таком ограничении на отбор материала достичь полноты изложения просто невозможно, поэтому содержание тома в известной степени определяется моими личными вкусами и моим опытом.

Чтобы сделать этот важный раздел математического анализа более доступным для читателя, я постоянно подчеркивал основные понятия и методы, стараясь не превратить книгу в собрание теорем и фактов. Я всюду стремился вести читателя от элементарных фактов к ключевым вопросам, находящимся на переднем крае современных научных исследований.

Почти сорок лет назад я обсуждал план монографии по математической физике с Давидом Гильбертом. Он не смог принять участие в осуществлении задуманного плана, но я надеюсь, что этот труд и, в частности, предлагаемый вниманию читателя том отражают научное кредо Гильберта, который всегда предпочитал чисто формальной общности глубокое проникновение в самую суть математической задачи. Изложение любого вопроса мы будем начинать с рассмотрения типичных частных случаев, которые именно в силу своей конкретности многое могут подсказать и в которых тем не менее проявляется существо соответствующей абстрактной ситуации. Индивидуальные явления играют роль не только частных примеров; скорее общие теории вырастают из этих явлений по мере того, как мы шаг за шагом поднимаемся до более общей точки зрения. С этой общей точки зрения легче обозревать и объединять отдельные детали и преодолевать частные трудности. Таким образом, в соответствии с естественным процессом изучения и обучения, мы предпочитаем индуктивный подход, иногда даже принося в жертву краткость, которой можно было бы добиться, пользуясь дедуктивным методом изложения.

Этот том по существу является независимой книгой; он соответствует тому II немецкого издания Methoden der mathematischen Physik, который вышел в 1937 г. Это издание было затем запре-

щено министерством культуры фашистской Германии, и мой верный друг Фердинанд Шпрингер был смещен с поста главы своего знаменитого издательства. Книга сохранилась благодаря перепечатке в издательстве Interscience Publishers с разрешения правительства Соединенных Штатов (1943). С того самого времени готовился совершенно новый вариант книги на английском языке. За этот длительный период исследования в области уравнений с частными производными сильно продвинулись вперед и я также во многих областях добился более глубокого понимания. Естественно, что настоящая книга отражает это развитие в той мере, в какой я принимал в нем участие, активно разрабатывая одни вопросы и изучая другие.

Понятие о содержании книги дает ее оглавление. Почти во всех существенных пунктах она отличается от немецкого оригинала. Например, теория характеристик и их роль в теории распространения волн изложены здесь гораздо полнее, чем это можно было сделать 25 лет тому назад. Далее, понятие слабых решений дифференциальных уравнений, введенное Соболевым и Фридрихсом и уже содержавшееся в немецком издании, рассматривается здесь в связи с теорией обобщенных функций, которые были введены Лораном Шварцем и названы им „распределениями"; они стали теперь необходимым орудием при изучении высших разделов анализа. Приложение к главе VI содержит краткое изложение теории обобщенных функций. С другой стороны, для материала последней главы немецкого издания, в частности для доказательства существования решения эллиптических уравнений, не нашлось места в этом томе. Эти вопросы будут изложены в коротком третьем томе, который предполагается посвятить построению решений и обзору последних результатов.

Предлагаемая книга, безусловно, является неровной по стилю, полноте и степени трудности. Однако я надеюсь, что она будет полезна для всех изучающих математику, независимо от того, являются ли они начинающими, студентами, математиками, специалистами в области других точных наук или инженерами. Возможно, что наличие в книге частей, написанных на разных уровнях, сделает ее более доступной, так как начальное ее чтение не требует больших математических знаний.

Я с сожалением сознаю, что некоторые выдающиеся результаты, лежащие вне сферы моих собственных интересов, быть может, недостаточно полно изложены в этой книге или вообще опущены. Отчасти этот пробел в недалеком будущем восполнится другими публикациями, такими, как книга Лере и Гординга, посвященная их замечательным работам, которая должна скоро выйти.

Выход в свет этой книги был бы невозможен без постоянной самоотверженной помощи моих друзей. В течение всей моей научной деятельности я имел редкое счастье работать с молодыми людьми, которые были последовательно моими учениками, научными сотруд-

никами и учителями. Многие из них за это время стали выдающимися учеными, но продолжают мне помогать. Курт О. Фридрихс и Фриц Джон, которые начали сотрудничать со мной более тридцати лет назад, до сих пор сохранили активный интерес к работе над этой монографией по математической физике. Посвящение настоящего тома К. О. Фридрихсу является естественной данью нашей многолетней научной и личной дружбе.

Сотрудничество Питера Д. Лакса и Луиса Ниренберга столь велико и ценно, что я не могу описать его посредством простого перечисления деталей. Питер Унгар сильно помог мне своими полезными замечаниями и критикой. Очень ценную помощь оказал также Липман Берс; кроме того, он написал важное дополнение к гл. IV.

Среди более молодых сотрудников я должен отметить Дональда Людвига, чье активное участие привело во многих случаях к значительным улучшениям.

На различных этапах работы отдельные части рукописи подверглись критическому разбору со стороны Конрада Иоргенса, Герберта Кранцера, Аннели Лакс, Ханана Рубина. Корректуры прочли Наташа Брунсвик, Сьюзен Хан, Рейбен Герш, Алан Джефри, Питер Рейто, Бриджит Реллих, Леонард Сарасон, Алан Соломон и др. Джейн Рихтмайер помогала при составлении библиографии и оказывала другую помощь для выхода книги в свет. Значительную часть издательской работы выполнила Лори Берковиц.

Большая часть технической работы по подготовке книги была проделана Рут Меррей, которая печатала и перепечатывала тысячи страниц рукописи, подготовила чертежи и проделала невероятный труд, превратив наброски, которые едва можно было прочитать, в эту книгу.

Я глубоко благодарен всем этим помощникам, а также тем, чьи имена здесь пропущены.

Благодарю также моего терпеливого друга Эрика Проскауэра из издательства Interscience.

Наконец, я хочу поблагодарить Office of Naval Research и National Science Foundation, в частности Ф. Иоахима Вейля и Артура Града, за ту эффективную поддержку, которую они оказали при публикации этой книги.

Р. КУРАНТ

Нью-Рошель, Нью-Йорк
ноябрь 1961

Глава I

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы начинаем с вводной главы, где описываются основные понятия, задачи и подходы к их решению.

Дифференциальное уравнение с частными производными есть соотношение вида

$$F(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0, \tag{1}$$

где F — функция переменных $x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$. Отыскивается функция $u(x, y, \ldots)$ независимых переменных $x, y, \ldots$, такая, что уравнение (1) удовлетворяется тождественно по этим переменным, если $u(x, y, \ldots)$ и ее частные производные

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots,$$
$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

подставляются в F.

Такая функция $u(x, y, \ldots)$ называется *решением уравнения с частными производными* (1). Мы будем искать не только отдельные „частные“ решения, но будем исследовать всю совокупность решений и, в частности, выделять отдельные решения с помощью дополнительных условий, которые будут добавляться к (1).

Уравнение с частными производными (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, если независимая переменная одна.

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого дифференциального уравнения.

Часто мы будем ограничивать изменение независимых переменных $x, y, \ldots$ определенной областью пространства $x, y, \ldots$; аналогично, мы будем рассматривать F только в определенной области пространства $x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots$. Это ограничение означает, что мы будем допускать только такие функции $u(x, y, \ldots)$ в основной области пространства $x, y, \ldots$, которые удовлетворяют условиям, наложенным на соответствующие аргументы функции F.

Раз и навсегда условимся, что все наши рассмотрения относятся к достаточно малым областям. Аналогично, мы будем предполагать, что если специально не оговорено противное, то все встречающиеся нам функции F, u, ... непрерывны и имеют непрерывные производные нужных порядков[1]).

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если функция F линейна по переменным u, u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{xy}, ... и коэффициенты зависят только от независимых переменных x, y, ... Если F линейна по производным наивысшего порядка (например, n-го) с коэффициентами, зависящими от x, y, ..., а также, может быть, от u и ее производных до $(n-1)$-го порядка, то дифференциальное уравнение называется *квазилинейным*.

Мы будем большей частью иметь дело с линейными или квазилинейными уравнениями; уравнения более общего вида обычно будут сводиться к таким уравнениям.

В случае двух независимых переменных решение дифференциального уравнения (1) $u(x, y)$ можно геометрически рассматривать как поверхность, „*интегральную поверхность*“ в пространстве x, y, u.

§ 1. Общие сведения о совокупности решений

1. Примеры. Для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка вся совокупность решений (за исключением возможных „особых“ решений) представляется функцией от независимой переменной x, а также от n произвольных постоянных интегрирования c_1, c_2, ..., c_n. Наоборот, для любого семейства функций

$$u = \varphi(x;\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n),$$

зависящего от n параметров, существует дифференциальное уравнение n-го порядка, решение которого $u = \varphi$ получается исключением параметров c_1, c_2, ..., c_n из уравнения $u = \varphi(x;\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n)$ и n уравнений

$$u' = \varphi'(x;\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^{(n)} = \varphi^{(n)}(x;\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n).$$

Для дифференциальных уравнений с частными производными дело обстоит сложнее. Здесь тоже можно искать всю совокупность решений, или „общее решение“, т. е. такое решение, которое дает любое частное решение после того, как фиксированы некоторые „про-

---

[1]) Точно так же в случае, когда решаются системы уравнений, мы всегда будем рассматривать окрестность точки, где соответствующий якобиан не обращается в нуль.

извольные“ элементы (опять за возможным исключением некоторых „особых“ решений). В случае дифференциальных уравнений с частными производными эти произвольные элементы уже не могут быть постоянными интегрирования, а должны содержать произвольные функции; вообще говоря, число этих произвольных функций равно порядку дифференциального уравнения. Число аргументов этих произвольных функций на единицу меньше числа аргументов решения u.

Более точная формулировка этого утверждения содержится в теореме существования из § 7. В этом пункте мы только получим некоторые сведения, разобрав несколько примеров.

1) Дифференциальное уравнение

$$u_y = 0$$

для функции $u(x, y)$ означает, что u не зависит от y; следовательно,

$$u = w(x),$$

где $w(x)$ — произвольная функция x.

2) Для уравнения

$$u_{xy} = 0$$

можно сразу получить общее решение вида

$$u = w(x) + v(y).$$

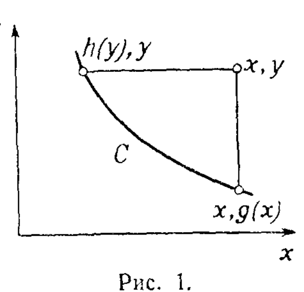


Рис. 1.

3) Аналогично, решением неоднородного дифференциального уравнения

$$u_{xy} = f(x, y)$$

является

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + w(x) + v(y)$$

с произвольными функциями w и v и фиксированными x_0 и y_0.

Можно заменить этот интеграл более общим двойным интегралом, если взять в качестве области интегрирования „треугольник“ D, такой, как на рис. 1, криволинейная часть границы которого — дуга C: $y = g(x)$ (или $x = h(y)$) пересекается прямыми $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ не более чем в одной точке. Тогда

$$u(x, y) = \iint_D f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + w(x) + v(y),$$

$$u_x = \int_{g(x)}^{y} f(x, \eta)\, d\eta + w'(x), \quad u_y = \int_{h(y)}^{x} f(\xi, y)\, d\xi + v'(y). \tag{2}$$

Частное решение дифференциального уравнения, соответствующее $w(x)=0$, $v(y)=0$, удовлетворяет условиям $u=u_x=u_y=0$ для всех точек (x, y) дуги C.

4) Дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_x = u_y$$

можно преобразовать в уравнение

$$2\omega_\eta = 0$$

с помощью замены переменных

$$x+y=\xi, \quad x-y=\eta, \quad u(x, y)=\omega(\xi, \eta).$$

„Общее решение" этого уравнения есть $\omega = w(\xi)$; следовательно,

$$u = w(x+y).$$

Аналогично, если α и β — постоянные, то общее решение дифференциального уравнения

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0$$

есть

$$u = w(\beta x - \alpha y).$$

5) Согласно элементарным теоремам анализа, дифференциальное уравнение

$$u_x g_y - u_y g_x = 0,$$

где $g(x, y)$ — любая заданная функция x, y, означает, что якобиан $\frac{\partial(u, g)}{\partial(x, y)}$ обращается в нуль. Это значит, что функции u и g зависимы, т. е.

$$u = w[g(x, y)], \tag{3}$$

где w — произвольная функция g.

Наоборот, так как любая функция вида (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению $u_x g_y - u_y g_x = 0$, то мы получили всю совокупность решений этого уравнения с помощью произвольной функции w.

Следует отметить, что тот же результат имеет место для более общего — квазилинейного — дифференциального уравнения

$$u_x g_y(x, y, u) - u_y g_x(x, y, u) = 0,$$

где теперь g явно зависит не только от x, y, но также и от неизвестной функции $u(x, y)$. Действительно, легко видеть, что якобиан любого решения $u(x, y)$ и функции $\gamma(x, y) = g[x, y, u(x, y)]$ обращается в нуль, так как

$$u_x\gamma_y - u_y\gamma_x = u_x g_y - u_y g_x + u_x g_u u_y - u_y g_u u_x = 0.$$

Таким образом, и в этом случае решение дается соотношением

$$u(x, y) = W[g(x, y, u)], \tag{4}$$

которое неявным образом определяет функцию u через произвольную функцию W.

Например, решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения

$$\alpha(u)\, u_x - \beta(u)\, u_y = 0$$

неявно задается соотношением

$$u = W[\alpha(u)\, y + \beta(u)\, x] \tag{5}$$

(или $w(u) = \alpha(u)\, y + \beta(u)\, x$), так что u зависит от произвольной функции W довольно сложным образом. (Одно приложение будет дано в § 7, п. 1.)

Частным случаем дифференциального уравнения $\alpha(u)\, u_x - \beta(u)\, u_y = 0$ является уравнение

$$u_y + u u_x = 0;$$

его решение неявно задается формулой

$$u = W(-x + uy),$$

где W — произвольная функция. Если истолковать $u = u(x(y), y)$ как скорость частицы в точке $x = x(y)$, а y — как время, то дифференциальное уравнение утверждает, что ускорение всех частиц равно нулю.

6) Дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

можно преобразовать в уравнение

$$4\omega_{\xi\eta} = 0$$

с помощью замены переменных

$$x + y = \xi, \quad x - y = \eta, \quad u(x, y) = \omega(\xi, \eta).$$

Поэтому в соответствии с примером 2) его решение есть

$$u(x, y) = w(x + y) + v(x - y).$$

7) Аналогично, общее решение дифференциального уравнения

$$u_{xx} - \frac{1}{t^2}\, u_{yy} = 0$$

для любого значения параметра t есть

$$u = w(x + ty) + v(x - ty).$$

В частности, функции

$$u=(x+ty)^n$$

и

$$u=(x-ty)^n$$

являются решениями, т. е.

$$t^2u_{xx}-u_{yy}$$

обращается в нуль для всех x, y и для всех действительных t.

8) Согласно элементарной алгебре, если многочлен по t обращается в нуль для всех действительных значений t, то он обращается в нуль также и для всех комплексных значений t. Таким образом, если мы подставим $t=i=\sqrt{-1}$, то дифференциальное уравнение примера 7 перейдет в *уравнение Лапласа*

$$\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}=0;$$

для этого уравнения мы получим решения вида

$$(x+iy)^n=P_n(x,\ y)+iQ_n(x,\ y),$$
$$(x-iy)^n=P_n(x,\ y)-iQ_n(x,\ y),$$

где P_n и Q_n — многочлены с действительными коэффициентами, которые сами тоже должны удовлетворять уравнению Лапласа[1]). Заставляя n пробегать значения 0, 1, 2 ..., мы находим бесконечно много решений уравнения Лапласа, но, в отличие от предыдущих примеров, это только счетное множество решений.

В полярных координатах r, θ, определенных формулами $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, имеем

$$P_n(x,\ y)=r^n\cos n\theta,\quad Q_n(x,\ y)=r^n\sin n\theta. \tag{6}$$

Для любого действительного α функции

$$P_\alpha(x,\ y)=r^\alpha\cos\alpha\theta,\quad Q_\alpha(x,\ y)=r^\alpha\sin\alpha\theta$$

также удовлетворяют уравнению Лапласа в любой области плоскости x, y, не содержащей начала координат $x=y=0$. Это сразу проверяется, если записать Δu в полярных координатах (см. т. 1, стр. 200):

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$

---

[1]) Эти решения служат примерами, поясняющими тот общий факт, что действительная и мнимая части аналитической функции комплексного переменного $x+iy$ удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. являются „гармоническими“ функциями.

Если мы возьмем такие две функции $w(\alpha)$ и $v(\alpha)$, что первые и вторые производные интегралов

$$\int_a^b w(\alpha) r^\alpha \cos \alpha\theta \, d\alpha \quad \text{и} \quad \int_a^b v(\alpha) r^\alpha \sin \alpha\theta \, d\alpha$$

могут быть получены с помощью дифференцирования под знаком интеграла, то мы сможем построить семейство решений, зависящее от двух произвольных функций w и v, в виде

$$\int_a^b r^\alpha (w(\alpha) \cos \alpha\theta + v(\alpha) \sin \alpha\theta) \, d\alpha.$$

9) В качестве примера дифференциального уравнения более высокого порядка рассмотрим уравнение

$$u_{xxyy} = 0$$

и найдем, что

$$u(x, y) = w(y) + xw_1(y) + v(x) + yv_1(x)$$

есть его общее решение.

10) Если число независимых переменных больше двух, то в общее решение входят произвольные функции двух или большего числа аргументов. Например, дифференциальное уравнение

$$u_z = 0$$

для функции $u(x, y, z)$ имеет общее решение

$$u = w(x, y).$$

2. Дифференциальные уравнения заданных семейств функций. В п. 1 мы упомянули, что можно строить обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются заданные семейства функций, зависящие от нескольких произвольных параметров. Теперь мы ставим вопрос: можно ли построить дифференциальное уравнение в частных производных с n независимыми переменными, решением которого является заданное семейство функций, зависящее от произвольной функции $(n-1)$ переменных?

Рассмотрим, например, множество функций вида

$$u = f[x, y, w(g(x, y))], \tag{7}$$

где f — заданная функция x, y, w, а g — заданная функция x, y, например, $g = xy$. Чтобы получить дифференциальное уравнение

этого семейства функций, продифференцируем уравнение (7) по x и по y:

$$u_x = f_x + f_w w' g_x,$$
$$u_y = f_y + f_w w' g_y.$$

Исключение w' дает искомое дифференциальное уравнение

$$(u_x - f_x) g_y - (u_y - f_y) g_x = 0, \tag{8}$$

где произвольная функция w, входящая в f_x и f_y, должна быть выражена через x, y, u из уравнения (7).

Полученное таким образом дифференциальное уравнение с частными производными является уравнением специального вида, а именно квазилинейным, так как оно линейно относительно производных. Следовательно, семейство функций (7) не является достаточно общим для того, чтобы привести к произвольному уравнению первого порядка.

Однако, если мы будем исходить из двухпараметрического семейства функций

$$u = f(x, y; \alpha, \beta),$$

а не из семейства, зависящего от произвольной функции, и составим производные

$$u_x = f_x(x, y; \alpha, \beta),$$
$$u_y = f_y(x, y; \alpha, \beta),$$

то мы получим три уравнения, из которых мы, вообще говоря, можем исключить α и β (конечно, если $f_{x\alpha} f_{y\beta} - f_{x\beta} f_{y\alpha} \neq 0$). Мы получим дифференциальное уравнение с частными производными $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, которое уже не обязательно линейно по u_x и u_y.

Тот парадоксальный факт, что более ограниченный класс семейств решений приводит к уравнению более общего типа, будет объяснен в § 4.

Примеры. 1) Для семейства функций

$$u = w(xy)$$

мы получаем, исключая w' из уравнений $u_x = yw'$, $u_y = xw'$, дифференциальное уравнение

$$xu_x - yu_y = 0.$$

Если интерпретировать x, y, u как прямоугольные координаты точки, то каждая функция этого семейства представляет собой поверхность, пересекающуюся с горизонтальными плоскостями по равносторонним гиперболам.

2) Совокупность всех *поверхностей вращения*, полученных вращением плоской кривой вокруг оси u, задается формулой

$$u = w(x^2 + y^2).$$

Соответствующее дифференциальное уравнение есть

$$y u_x - x u_y = 0.$$

3) Аналогично,

$$x u_x + y u_y = 0$$

есть дифференциальное уравнение линейчатых поверхностей, образованных горизонтальными прямыми, проходящими через ось u, т. е. поверхностей, заданных уравнением

$$u = w\left(\frac{x}{y}\right).$$

4) Дифференциальное уравнение *развертывающихся поверхностей* выводится из определения такой поверхности как *огибающей однопараметрического семейства плоскостей*. За исключением цилиндров с осью, перпендикулярной к плоскости x, y, все такие поверхности задаются уравнением

$$u = \alpha x + w(\alpha) y + v(\alpha), \tag{9}$$

где α неявно определяется как функция x и y уравнением

$$0 = x + w'(\alpha) y + v'(\alpha). \tag{10}$$

Таким образом, функция u весьма сложным образом зависит от двух произвольных функций. Первые производные u_x, u_y сразу определяются из (9):

$$u_x = \alpha,$$
$$u_y = w(\alpha),$$

откуда

$$u_y = w(u_x). \tag{11}$$

Чтобы исключить произвольную функцию w, мы еще раз дифференцируем:

$$u_{yy} = w' u_{xy}, \quad u_{xy} = w' u_{xx},$$

и получаем

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0 \tag{12}$$

— искомое дифференциальное уравнение для всех развертывающихся поверхностей, за исключением цилиндров с осью, перпендикулярной плоскости x, y.

Во всех этих примерах легко можно показать, что обратное тоже верно, т. е. что все решения соответствующих дифференциальных уравнений принадлежат заданным семействам функций.

5) Все *однородные функции* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ степени α от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ характеризуются соотношением

$$u(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^\alpha u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{13}$$

которое выполняется тождественно по t. Если мы положим $t = 1/x_n$, то

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n^\alpha u\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right);$$

следовательно, u дается формулой

$$u = x_n^\alpha w\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \tag{14}$$

с некоторой функцией w. Поскольку обратно, любая функция u, так построенная с помощью произвольной функции w, зависящей от $(n-1)$ аргументов, удовлетворяет сформулированному выше условию однородности, то выражение (14) дает все однородные функции степени α.

Чтобы получить дифференциальное уравнение с частными производными для этого семейства функций, мы возьмем производные уравнения (14) по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и исключим функцию w. Это дает *формулу Эйлера для однородных функций*:

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + \ldots + x_n u_{x_n} = \alpha u. \tag{15}$$

Заметим, что мы могли получить соотношение (15) непосредственно из уравнения (13), продифференцировав его по t и положив $t = 1$.

Наоборот, из соотношения (15) для функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^\alpha} u(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\right) =$$
$$= \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left\{\sum_{i=1}^{n} tx_i u_{x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) - \alpha u(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\right\} = 0,$$

так что выражение $u(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)/t^\alpha$ есть функция, не зависящая от t; следовательно, она совпадает со своим значением при $t = 1$, которое равно $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Но, согласно (13), это значит, что функция u однородная.

§ 2. *Системы дифференциальных уравнений*

1. Вопрос об эквивалентности системы дифференциальных уравнений и одного дифференциального уравнения. Для обыкновенных дифференциальных уравнений теория одного дифференциального уравнения эквивалентна теории систем; для дифференциальных уравнений с частными производными дело обстоит иначе.

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

заменой $y' = z$ может быть сведено к системе двух уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями $y(x)$, $z(x)$:

$$\begin{aligned} F(x, y, z, z') &= 0, \\ y' - z &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Любое решение дифференциального уравнения (1) дает решение системы (2), и наоборот.

Вообще, система двух обыкновенных уравнений первого порядка

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad g(x, y, z, y', z') = 0 \tag{3}$$

для двух функций $y(x)$ и $z(x)$ может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка для одной функции $y(x)$, если только в рассматриваемой области $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$. В таком случае можно разрешить уравнения (3) относительно z и z':

$$z' = \varphi(x, y, y'), \quad z = \psi(x, y, y'). \tag{3а}$$

Дифференцируя второе уравнение и исключая z', сразу получаем

$$\varphi(x, y, y') - \psi_x - \psi_y y' - \psi_{y'} y'' = 0 \tag{3б}$$

— дифференциальное уравнение второго порядка для одной функции $y(x)$. Если мы подставим решение дифференциального уравнения (3б) в уравнение $z = \psi(x, y, y')$, то мы получим соответствующую функцию z, которая вместе с y дает решение исходной системы (3) или (3а).

Поэтому, если мы предполагаем, что $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$, то система (3) эквивалентна одному дифференциальному уравнению.

Теперь мы рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{4}$$

с неизвестной функцией $u(x, y)$. Подстановка $u_x = p$, $u_y = q$ приводит к системе трех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя неизвестными функциями u, p, q:

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q, p_x, p_y, q_y) &= 0, \\ u_x - p &= 0, \\ u_y - q &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

В любом решении u, p, q такой системы u является решением дифференциального уравнения (4) и, наоборот, любое решение u уравнения (4) дает решение u, u_x, u_y системы (5).

Таким образом, дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка эквивалентно системе трех дифференциальных уравнений первого порядка (но эта система имеет очень специальный вид).

Обратное, однако, совершенно неверно. Не всякая система двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка — не говоря уже о системах трех дифференциальных уравнений первого порядка — эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка[1]). Вообще говоря, невозможно с помощью дифференцирования и исключения функций получить из системы двух дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} &f(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) = 0, \\ &g(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

с двумя неизвестными функциями $u(x, y)$, $v(x, y)$ эквивалентное ей дифференциальное уравнение второго порядка с одной только функцией u. Дифференцирование по x и y дает четыре дополнительных уравнения. Чтобы заменить систему (6) одним эквивалентным ей уравнением второго порядка с неизвестной функцией u, надо было бы исключить шесть величин v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy} из шести уравнений. Однако, исключение шести величин из шести уравнений, вообще говоря, невозможно, как можно показать с помощью примеров[2]).

Производя дальнейшие дифференцирования и сравнивая число уравнений с числом величин, подлежащих исключению, мы видим, что нет оснований рассчитывать, что мы получим одно уравнение, заменяющее систему (6), даже если не ограничивать его порядок. Например, продифференцировав каждое из шести уравнений, мы получим двенадцать соотношений; чтобы найти дифференциальное уравнение, содержащее только u, мы должны были бы исключить десять величин v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, v_{xxx}, v_{xxy}, v_{xyy}, v_{yyy}. Так как исключение десяти величин из двенадцати уравнений приводит,

---

[1]) Однако, как мы увидим в § 7, такой эквивалентности часто можно добиться, добавляя к системе дифференциальных уравнений некоторые „начальные условия", которые ограничивают множество решений. Относительно проблемы эквивалентности см. далее приложение 2.

[2]) Примером системы уравнений, для которой дифференцирование и исключение не приводит к одному уравнению второго порядка, может служить система $u_x + v_y = -yu$, $u_y + v_x = yv$. Здесь мы получаем два уравнения третьего порядка для одной функции u (переопределенная система):

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2 u + u_{yy} - u_{xx}) + u_x + yu = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2 u + u_{yy} - u_{xx}) + u_y - y(y^2 u + u_{yy} - u_{xx}) = 0.$$

вообще говоря, к двум независимым соотношениям, следует ожидать, что в результате этого исключения получатся два различных уравнения 3-го порядка для u, кроме специальных случаев[1]).

2. Исключение неизвестных из линейной системы с постоянными коэффициентами. Стоит заметить, что в отличие от общего случая, для важного частного случая справедлива следующая теорема:

Любую систему[2]) *n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для n неизвестных функций можно свести к одному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами для любой из неизвестных функций.*

Пусть $u, v, w, \ldots$ — неизвестные функции независимых переменных $x, y, z, \ldots$, а $P_i, Q_i, \ldots$ — формальные полиномы от символов дифференцирования $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z, \ldots$, например,

$$P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \ldots\right) = \sum a^i_{\nu_1\nu_2\ldots} \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots}}{\partial x^{\nu_1}\partial y^{\nu_2}\partial z^{\nu_3}\ldots}$$

с постоянными коэффициентами $a^i_{\nu_1\nu_2\ldots}$; тогда мы формально запишем систему в виде

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots\right)u + Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots\right)v + \ldots = g_1(x, y, \ldots),$$
$$P_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots\right)u + Q_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots\right)v + \ldots = g_2(x, y, \ldots),$$
. . . .

с известными правыми частями $g_1, g_2, \ldots$. Формальное алгебраическое исключение (по правилу Крамера) дает дифференциальные уравнения для отдельных функций

$$Du = G^1, \quad Dv = G^2, \ldots,$$

где D — определитель из символов $P_i, Q_i, \ldots$, а G^j — соответствующая символическая линейная комбинация функций g_ν. Ясно, что D — линейный дифференциальный оператор; его порядок равен степени символического полинома D (а степень D зависит от степеней $P_i, Q_i, \ldots$). Символы G^j также обозначают дифференциальные операторы, соответствующие минорам определителя D. Если, в частности, исходная система состоит из n уравнений первого порядка, т. е. если полиномы $P_i, Q_i, \ldots$ — линейные, то соответствующие уравнения, вообще говоря, имеют порядок n.

Предположим, что u есть решение одного из уравнений, полученных в результате исключения; тогда, подставив u в данную

---

[1]) См. предыдущую сноску.

[2]) Точные определения см. в п. 3.

систему, мы можем опустить одно из первоначальных уравнений, так как система теперь зависима. Таким образом, получается система меньшего числа уравнений для v, w, ... С этой системой можно поступить так же, как с исходной, и с помощью исключения прийти к уравнению $D^*v = G^{2*}$, где D^* — минор определителя D. Продолжая этот процесс, исходную систему можно заменить последовательностью независимых уравнений убывающего порядка $Du = G^1$, $D^*v = G^{2*}$, ..., соответствующей исходной системе.

3. Определенные, переопределенные, недоопределенные системы. Рассмотрим общий вид системы дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными:

$$F_i\left(x, y, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}, u^{(1)}_x, u^{(1)}_y, \ldots, u^{(m)}_x, u^{(m)}_y, u^{(1)}_{xx}, \ldots\right) = 0 \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, h),$$

т. е. систему h уравнений с m функциями $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}$ независимых переменных x и y.

Предположим, что эти h уравнений независимы, т. е. что ни одно из них не может быть получено из других с помощью дифференцирования и исключения неизвестных.

Если $h = m$, мы говорим, что *система определенная*; если $h > m$, система называется *переопределенной*, если $h < m$, — *недоопределенной*.

Система Коши — Римана двух уравнений с двумя неизвестными функциями $u(x, y)$, $v(x, y)$

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0$$

является примером определенной системы. Из этой системы с помощью дифференцирования и исключения легко получить, что u и v в отдельности удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ (см. п. 1), т. е. что u и v „гармонические".

Простейшим примером переопределенной системы для функции $u(x, y)$ является система

$$u_x = f(x, y), \quad u_y = g(x, y),$$

которая, как хорошо известно, разрешима тогда и только тогда, когда

$$f_y = g_x.$$

Более интересный пример дает теория *аналитических функций* $f(z_1, z_2)$ *двух комплексных переменных*

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Дифференциальные уравнения Коши — Римана, которые выражают аналитичность функции $f(z_1, z_2) = u + iv$, таковы:

$$u_{x_1} = v_{y_1}, \qquad u_{x_2} = v_{y_2},$$
$$u_{y_1} = -v_{x_1}, \qquad u_{y_2} = -v_{x_2}. \tag{8}$$

С помощью дифференцирования их можно привести к следующей переопределенной системе для одной функции u:

$$u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = 0, \qquad u_{x_1x_2} + u_{y_1y_2} = 0,$$
$$u_{x_2x_2} + u_{y_2y_2} = 0, \qquad u_{x_1y_2} - u_{x_2y_1} = 0. \tag{8'}$$

Тот факт, что эта система сильно переопределенная, показывает, что теория функций многих комплексных переменных гораздо сложнее, чем классическая теория функций одного комплексного переменного.

Мы получим третий пример переопределенной системы, если введем $n+1$ „однородных переменных" $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ вместо n переменных $x, y, \ldots$ посредством соотношений

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \quad y = \frac{x_3}{x_1}, \ \ldots.$$

Функция $u(x, y, \ldots)$ тогда переходит в функцию $\omega(x_1, x_2, \ldots)$, которая является однородной функцией нулевой степени относительно новых переменных, и, следовательно, удовлетворяет соотношению Эйлера

$$x_1\omega_{x_1} + x_2\omega_{x_2} + \ldots = 0.$$

Первые частные производные функции $u(x, y, \ldots)$ по $x, y, \ldots$ можно выразить через производные функции $\omega(x_1, x_2, \ldots)$:

$$u_x = x_1\omega_{x_2},$$
$$u_y = x_1\omega_{x_3},$$
$$\cdots\cdots$$

Таким образом, если задано дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка для u

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots) = 0,$$

то оно преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, \omega, \omega_{x_2}, \omega_{x_3}, \ldots) = 0.$$

Кроме того, дополнительным уравнением является соотношение однородности

$$x_1\omega_{x_1} + x_2\omega_{x_2} + \ldots = 0.$$

Вместо одного дифференциального уравнения мы получаем переопределенную систему двух уравнений. Если мы преобразуем систему

уравнений, вводя однородные переменные, то мы, конечно, получим такую же ситуацию.

Уравнение

$$u_x v_y - u_y v_x = 0,$$

которое, как легко видеть, выражает тождественное обращение в нуль якобиана двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, является примером недоопределенной системы. Из этого уравнения следует[1]), что u и v связаны соотношением

$$w(u, v) = 0.$$

Это соотношение явно не содержит независимых переменных x и y; оно является „общим решением" недоопределенной системы дифференциальных уравнений[2]). Для системы, содержащей n функций $u^{(1)}$, $u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равенство нулю якобиана

$$\frac{\partial(u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} u^{(1)}_{x_1} & \ldots & u^{(n)}_{x_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ u^{(1)}_{x_n} & \ldots & u^{(n)}_{x_n} \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

вообще говоря, означает зависимость между n функциями $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$ $\ldots, u^{(n)}$:

$$w(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}) = 0. \tag{10}$$

Поэтому соотношение (10) можно рассматривать как общее решение недоопределенной системы дифференциальных уравнений (9). Ниже, в гл. II и III, мы вернемся к проблеме решения различных типов недоопределенных систем дифференциальных уравнений.

§ 3. *Методы интегрирования некоторых специальных дифференциальных уравнений*

1. Разделение переменных. Для многих задач математической физики, связанных с дифференциальными уравнениями, семейства решений, зависящие от произвольных параметров, можно получить

---

[1]) См. § 1, п. 1, пример 5.

[2]) Аналогично, недоопределенное уравнение

$$u_x v_y - u_y v_x = 1,$$

которое характеризует преобразования плоскости x, y на плоскость u, v сохраняющие площадь, имеет решение

$$x = \alpha + \omega_\beta, \qquad u = \alpha - \omega_\beta,$$
$$y = \beta - \omega_\alpha, \qquad v = \beta + \omega_\alpha,$$

где ω — произвольная функция, для которой

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} = 1 + \omega_{\alpha\alpha}\,\omega_{\beta\beta} - \omega^2_{\alpha\beta} \neq 0.$$

с помощью специальных методов, хотя эти методы непосредственно не дают всю совокупность решений.

Самый важный из этих методов — *метод разделения переменных*; он будет продемонстрирован на нескольких примерах.

1) Рассмотрим уравнение

$$u_x^2+u_y^2=1;$$

предположив, что

$$u(x, y)=\varphi(x)+\psi(y),$$

мы получим

$$(\varphi'(x))^2+(\psi'(y))^2=1,$$

или

$$(\varphi'(x))^2=1-(\psi'(y))^2.$$

Так как правая часть не зависит от x, а левая часть не зависит от y, то обе они не зависят ни от x, ни от y; следовательно, они равны одной и той же константе α^2. Таким образом, мы сразу получаем семейство решений

$$u(x, y)=\alpha x+\sqrt{1-\alpha^2}\,y+\beta, \tag{1}$$

содержащее два произвольных параметра α и β.

2) Аналогично, дифференциальное уравнение

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=1$$

для функции u трех переменных x, y, z приводит к семейству решений

$$u=\alpha x+\beta y+\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\,z+\gamma \tag{2}$$

с тремя параметрами α, β, γ, если предположить, что

$$u=\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z).$$

3) Предположение о том, что $u=\varphi(x)+\psi(y)$, в применении к дифференциальному уравнению

$$f(x)\,u_x^2+g(y)u_y^2=a(x)+b(y)$$

дает, так же как в предыдущих примерах,

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{a(\xi)+\alpha}{f(\xi)}}\,d\xi+\int_{y_0}^{y}\sqrt{\frac{b(\eta)-\alpha}{g(\eta)}}\,d\eta+\beta, \tag{3}$$

где α и β — произвольные постоянные.

4) Часто разделение переменных успешно проходит после некоторого преобразования переменных. Например, уравнение с неизвестной функцией $u(x, y)$

$$u_x^2+u_y^2=\frac{k}{r}-h \quad (r^2=x^2+y^2, \quad k,\ h\text{ — постоянные}),$$

встречающееся в *проблеме двух тел* в небесной механике, переходит в уравнение

$$u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2 = \frac{k}{r} - h \qquad \text{или} \quad r^2 u_r^2 + u_\theta^2 = kr - hr^2$$

для $u(r, \theta)$ в полярных координатах r, θ. Следовательно, формула (3) дает семейство решений

$$u = \int_0^r \sqrt{\frac{k}{\rho} - h - \frac{\alpha^2}{\rho^2}}\, d\rho + \alpha\theta + \beta, \tag{4}$$

зависящее от двух произвольных параметров α, β.

5) В случае линейных дифференциальных уравнений, в частности уравнений второго порядка, часто бывает полезно положить

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

(примеры даны в т. I, гл. V, §§ 3—9).

Для уравнения теплопроводности

$$u_{xx} - u_y = 0 \tag{5}$$

мы имеем

$$\varphi''(x) : \varphi(x) = \psi'(y) : \psi(y),$$

а следовательно, и левая и правая части должны быть постоянными. Можно предположить, что эта постоянная положительна или отрицательна и соответственно обозначить ее через ν^2 или $-\nu^2$; таким образом получаются два семейства решений

$$u = a \operatorname{sh} \nu(x - \alpha) e^{\nu^2 y},$$

$$u = a \sin \nu(x - \alpha) e^{-\nu^2 y}.$$

Последнее семейство играет особую роль в математической физике; если u — температура, y — время, x — пространственная координата, то оно описывает распределение температуры, стремящееся к нулю с течением времени.

2. Построение других решений посредством суперпозиции. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона. Из решений линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметры, могут быть получены другие решения с помощью сложения, интегрирования и дифференцирования. Так как в т. I, гл. V, дано много таких примеров, здесь будет рассмотрено только несколько дополнительных.

Чтобы получить еще одно решение уравнения теплопроводности, мы интегрируем решение $e^{-\nu^2 y} \cos \nu x$ по параметру ν от $-\infty$ до ∞

и получаем новое решение

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 y} \cos \nu x \, d\nu \qquad (y > 0).$$

Интеграл в правой части легко вычисляется[1]) и дает

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{y}}\, e^{-x^2/4y} \qquad (6)$$

— „фундаментальное решение“ уравнения теплопроводности.

В качестве второго примера на принцип суперпозиции мы даем решение *краевой задачи для уравнения Лапласа* $\Delta u = 0$ в круге $r^2 = x^2 + y^2 < 1$; при $r = 1$ задаются граничные значения u как (непрерывно дифференцируемая) функция $g(\theta)$ полярного угла θ. Пусть

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi$$

— коэффициенты ряда Фурье для функции $g(\theta)$; тогда ряд

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)\, r^\nu =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu P_\nu(x, y) + b_\nu Q_\nu(x, y))$$

---

[1]) Чтобы вычислить этот интеграл, мы делаем подстановку $\nu^2 y = \lambda^2$ и получаем интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{y}} J(a), \text{ где } a = \frac{x}{\sqrt{y}} \quad \text{и} \quad J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} \cos(a\lambda)\, d\lambda.$$

Чтобы найти $J(a)$, мы находим $J'(a)$, дифференцируя под знаком интеграла:

$$J'(a) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} \lambda \sin(a\lambda)\, d\lambda;$$

интегрируя по частям, мы сразу получаем

$$J'(a) = -a\, J(a)/2;$$

непосредственный подсчет дает

$$J(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda = \sqrt{\pi}.$$

Отсюда следует, что

$$J(a) = \sqrt{\pi}\, e^{a^2/4};$$

таким образом, формула (6) установлена.

равномерно сходится при $r \leqslant q < 1$. Этот ряд можно дважды почленно дифференцировать при $r \leqslant q$; он является суперпозицией гармонических функций P_n и Q_n, рассмотренных в примере 8 из § 1, п. 1.

Следовательно, это гармоническая функция, которая, кроме того, решает граничную задачу. Внутри круга мы можем изменить порядок суммирования и интегрирования и получить

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu} \cos \nu (\theta - \varphi) \right] d\varphi.$$

Используя формулу $2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ и суммируя полученную таким образом геометрическую прогрессию, мы приходим, после очевидных выкладок, к выражению

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} g(\varphi) \, d\varphi, \tag{7}$$

которое представляет решение краевой задачи в виде интеграла Пуассона (см. гл. IV, а также т. I, стр. 433).

§ 4. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными. Полный интеграл

1. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Геометрическая интуиция очень помогает в теории интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка для функции $u(x, y)$ двух независимых переменных.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{1}$$

$F_p^2 + F_q^2 \neq 0$, где применяются сокращенные обозначения $p = u_x$, $q = u_y$. Тогда для любой интегральной поверхности, проходящей через точку P с координатами x, y, u, величины p и q, которые определяют положение касательной плоскости в этой точке, должны удовлетворять условию (1). Касательная плоскость к интегральной поверхности в точке P [1]) имеет наклон, обязательно принадлежащий многообразию наклонов, характеризуемому уравнением (1) [2]). Для

[1]) Чтобы подчеркнуть тот факт, что для рассматриваемых касательных плоскостей играет роль лишь непосредственная окрестность точки касания P, удобно рассматривать точку P вместе с ее бесконечно малой окрестностью на касательной плоскости как „элемент поверхности“ и оперировать с такими элементами поверхности (в случае обыкновенного дифференциального уравнения аналогично используются элементы кривой).

[2]) Более подробно см. гл. II, § 3, п. 1.

данной точки $P:(x, y, u)$ это множество, вообще говоря, является однопараметрическим семейством (например, для $p^2+q^2=1$ это семейство есть $p=\cos t$, $q=\sin t$ с параметром t). Если F линейно по p и q, то семейство возможных касательных плоскостей образует пучок плоскостей, проходящих через прямую, которая называется *„осью Монжа“*. Мы пока оставляем без внимания этот специальный случай „квазилинейных“ уравнений первого порядка, который будет рассмотрен в § 5; вместо этого мы предположим, что в любой точке P наше семейство плоскостей имеет в качестве огибающей невырожденный конус, *„конус Монжа“* [1]). Таким образом, в некоторой области пространства x, y, u дифференциальное уравнение геометрически интерпретируется как „поле конусов“ точно так же, как обыкновенное дифференциальное уравнение может быть истолковано как поле направлений. Найти решение — значит найти такую поверхность, которая в каждой своей точке касается соответствующего конуса Монжа (или входит в поле конусов).

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, геометрическая интерпретация делает очевидной следующую теорему: *Если семейство решений*

$$u=f(x, y, a) \tag{2}$$

дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q)=0$, зависящее от параметра a, имеет огибающую, то эта огибающая тоже является решением.

Действительно, огибающая семейства интегральных поверхностей в каждой точке P имеет касательную плоскость, касающуюся соответствующего конуса Монжа; эта касательная плоскость совпадает с касательной плоскостью к той интегральной поверхности из семейства, которая касается огибающей в точке P.

Аналитически можно прийти к этому утверждению следующим путем: огибающая получается, если выразить a как функцию x и y из уравнения

$$f_a(x, y, a)=0 \tag{3}$$

и подставить затем $a(x, y)$ в f; таким образом, уравнение огибающей имеет вид

$$u=f(x, y, a(x, y))=\psi(x, y).$$

Тогда с помощью (3) мы получаем

$$\psi_x=u_x=f_x+f_a a_x=f_x, \quad \psi_y=u_y=f_y+f_a a_y=f_y.$$

Следовательно, значения $\psi(x_0, y_0)$, $\psi_x(x_0, y_0)$, $\psi_y(x_0, y_0)$ в фиксированной точке x_0, y_0 совпадают со значениями $f(x, y, a_0)$, $f_x(x, y, a_0)$,

---

[1]) В честь Гаспара Монжа, 1746—1818.

$f_y(x, y, a_0)$ соответственно, где $a_0 = a(x_0, y_0)$. Так как функция $u = f(x, y, a_0)$ удовлетворяет уравнению в точке x_0, y_0, то ему удовлетворяет и функция $u = f(x, y, a(x, y)) = \psi(x, y)$.

2. Полный интеграл. Примеры из § 3 показывают, что для дифференциальных уравнений первого порядка мы часто можем найти семейства решений, зависящие от произвольных параметров.

Пусть, например, дифференциальное уравнение (1)

$$F(x, y, u, p, q) = 0$$

имеет решение

$$u = \varphi(x, y, a, b), \tag{4}$$

зависящее от двух параметров a, b. (Если u не входит явно в функцию F, то однопараметрическое семейство решений $u = \varphi(x, y, a)$ сразу дает семейство $u = \varphi(x, y, a) + b$, зависящее от двух параметров.)

Двухпараметрическое семейство решений называется полным интегралом уравнения (1), *если в рассматриваемой области ранг матрицы*

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_a & \varphi_{xa} & \varphi_{ya} \\ \varphi_b & \varphi_{xb} & \varphi_{yb} \end{pmatrix}$$

равен 2 [1]); *в частности, это так, если определитель*

$$D = \varphi_{xa}\varphi_{yb} - \varphi_{xb}\varphi_{ya} \tag{5}$$

не обращается в нуль.

Значение понятия „полный интеграл" определяется следующим основным фактом.

При помощи образования огибающих, т. е. при помощи только дифференцирования и исключения, из полного интеграла (4) *можно получить множество решений дифференциального уравнения* (1), *зависящее от произвольной функции* [2]).

---

[1]) Это условие гарантирует, что функция φ существенно зависит от двух независимых параметров. В самом деле, если бы, вводя подходящую комбинацию $\gamma = g(a, b)$, функцию φ можно было бы привести к виду $\varphi(x, y, a, b) = \psi(x, y, \gamma)$, где ψ зависит только от одного параметра γ, то из соотношений

$$\varphi_{xa} = \psi_{x\gamma}\gamma_a, \quad \varphi_{xb} = \psi_{x\gamma}\gamma_b, \quad \varphi_{ya} = \psi_{y\gamma}\gamma_a, \quad \varphi_{yb} = \psi_{y\gamma}\gamma_b, \quad \varphi_a = \psi_\gamma\gamma_a, \quad \varphi_b = \psi_\gamma\gamma_b$$

сразу следовало бы, что ранг матрицы M не может равняться двум.

[2]) Здесь не будет обсуждаться вопрос, дает ли этот метод все решения или нет. Сделать здесь какие-нибудь общие утверждения трудно; это ясно из следующего примера. Пусть $F(x, y, u, p, q) = G(x, y, u, p, q)\,H(x, y, u, p, q)$, и пусть φ — полный интеграл уравнения $G = 0$, который не является одновременно решением уравнения $H = 0$. Тогда, согласно нашему определению, φ является также полным интегралом уравнения $F = 0$; однако существуют семейства решений уравнения $F = 0$ — а именно, решения уравнения $H = 0$, — которые не могут быть построены как огибающие семейства φ.

Чтобы построить такое решение, мы выбираем однопараметрическое семейство из двухпараметрического, связывая параметры a и b, которые до сих пор были независимыми, при помощи произвольной функции, например $b=w(a)$. Затем мы образуем огибающую этого однопараметрического семейства. Мы рассматриваем a как функцию x и y, полученную из уравнения

$$\varphi_a+\varphi_b w'(a)=0 \qquad (b=w(a)), \tag{6}$$

и подставляем ее в равенство

$$u(x, y)=\varphi(x, y, a, w(a))=\psi(x, y).$$

Здесь мы дополнительно предполагаем, что уравнение (6) можно разрешить относительно a. Таким образом мы получаем множество решений $\psi(x, y)$, зависящее от произвольной функции w. Между прочим, описанная ситуация объясняет кажущийся парадокс, упомянутый в § 1, п. 2. Если для дифференциального уравнения с частными производными дано двухпараметрическое семейство решений, то тем самым дано множество решений, зависящее от произвольной функции; но произвольная функция входит таким сложным образом, что это множество решений, вообще говоря, не может быть записано, как в § 1, п. 2.

Систематическое изложение теории дифференциальных уравнений первого порядка, данное в следующей главе, показывает, что теорию полных интегралов можно обобщить на дифференциальные уравнения для функций n независимых переменных, и что эта теория тесно связана с общей теорией интегрирования уравнений первого порядка.

3. Особые интегралы. Кроме „общего“ решения, полученного в п. 2 путем образования огибающих однопараметрических подсемейств двухпараметрического семейства решений $u=\varphi(x, y, a, b)$, мы можем, образуя огибающие, иногда найти еще одно, *особое*, решение, так как двухпараметрическое семейство u может иметь огибающую [1]), не содержащуюся среди огибающих однопараметрических подсемейств. Эта огибающая получается исключением a и b из трех уравнений

$$\begin{aligned} u&=\varphi(x, y, a, b),\\ 0&=\varphi_a,\\ 0&=\varphi_b, \end{aligned} \tag{7}$$

и тоже должна быть решением; она называется „особым“ решением уравнения (1). Заметим, что так же, как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, не надо знать полного решения, чтобы найти особые решения; их находят непосредственно из

[1]) Этого, правда, не может быть, если u не входит явно в F.

дифференциального уравнения с помощью дифференцирования и исключения. *Особое решение получается исключением p и q из уравнений*

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0. \tag{8}$$

Уравнение

$$F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = 0,$$

которое является тождеством относительно a и b, можно продифференцировать по a и b, что приводит к равенствам

$$F_u\varphi_a + F_p\varphi_{xa} + F_q\varphi_{ya} = 0,$$
$$F_u\varphi_b + F_p\varphi_{xb} + F_q\varphi_{yb} = 0.$$

На особой интегральной поверхности имеем $\varphi_a = \varphi_b = 0$, и, следовательно, для всех ее точек справедливы соотношения

$$F_p\varphi_{xa} + F_q\varphi_{ya} = 0,$$
$$F_p\varphi_{xb} + F_q\varphi_{yb} = 0.$$

Если мы предположим, что на этой поверхности не обращается в нуль определитель

$$D = \varphi_{xa}\varphi_{yb} - \varphi_{xb}\varphi_{ya},$$

то имеют место равенства

$$F_p = 0, \quad F_q = 0.$$

Следовательно, уравнение особого интеграла может быть получено из уравнений (8) исключением p и q.

В соответствии с этим особое решение может быть определено без использования полного интеграла, как решение, для которого

$$F = F_p = F_q = 0$$

(см. гл. II, § 4).

4. Примеры. Рассмотрим двухпараметрическое семейство функций

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + u^2 = 1, \tag{9}$$

т. е. множество всех сфер радиуса 1 в пространстве x, y, u с центрами на плоскости x, y. Эти функции образуют полный интеграл для дифференциального уравнения

$$u^2(1 + p^2 + q^2) = 1. \tag{10}$$

Если мы положим $b = w(a)$, выделяя из всех таких сфер однопараметрическое семейство, центры которого лежат на кривой $y = w(x)$ в плоскости x, y, то огибающая этого семейства, т. е. поверхность, полученная исключением a из уравнений

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y - w(a))^2 + u^2 = 1, \\ x - a + w'(a)(y - w(a)) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

дает еще одно решение. Любая такая огибающая есть *трубчатая поверхность* с осью $y = w(x)$.

Все двухпараметрическое семейство (9) имеет еще одну огибающую, состоящую из плоскостей $u = 1$ и $u = -1$; это ясно непосредственно и может быть проверено аналитически исключением a и b из уравнений

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2+u^2&=1,\\ x-a&=0,\\ y-b&=0.\end{aligned} \tag{12}$$

Так как эти поверхности удовлетворяют дифференциальному уравнению (10), они являются особыми решениями уравнения (10). Мы также придем к этим поверхностям, если исключим p и q из уравнений

$$\begin{aligned}F&=u^2(1+p^2+q^2)=1,\\ F_p&=2u^2p=0,\\ F_q&=2u^2q=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Другой пример — *дифференциальное уравнение Клеро*

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y), \tag{14}$$

которое часто встречается в приложениях. Мы исходим из двухпараметрического семейства плоскостей

$$u = ax + by + f(a, b), \tag{15}$$

где $f(a, b)$ — заданная функция параметров a и b. Так как $u_x = a$, $u_y = b$, это семейство удовлетворяет дифференциальному уравнению (14). Здесь $D = 1$ (см. формулу (5)); следовательно, функция u, заданная формулой (15), является полным интегралом дифференциального уравнения Клеро.

Мы опять образуем огибающие, чтобы получить общее решение этого уравнения; выбирая произвольную функцию $b = w(a)$, мы исключаем a из уравнений

$$\begin{aligned}u&=ax+yw(a)+f(a, w(a)),\\ 0&=x+yw'(a)+f_a+f_bw'(a).\end{aligned} \tag{16}$$

Особое решение уравнения Клеро имеет важное значение; мы получаем его как огибающую двухпараметрического семейства (15), т. е. исключая a и b из уравнений

$$\begin{aligned}u&=ax+by+f(a, b),\\ x&=-f_a,\\ y&=-f_b.\end{aligned} \tag{17}$$

Если мы продифференцируем дифференциальное уравнение (14) по $u_x = p$, $u_y = q$, то правило, изложенное в п. 3, приведет к тем же формулам. (Ср. § 6, п. 3, где представлена другая точка зрения.)

§ 5. *Теория линейных и квазилинейных уравнений первого порядка*

1. Линейные дифференциальные уравнения. Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными для функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a. \tag{1}$$

Если a_i и a — непрерывно дифференцируемые функции только независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то уравнение (1) называется линейным дифференциальным уравнением; в более общем случае, если a_i и a зависят также от неизвестной функции u, это уравнение называется квазилинейным. В этом параграфе мы покажем, что теория таких квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными эквивалентна теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ср. гл. II, § 2).

Сначала мы рассмотрим частный случай линейного однородного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = 0. \tag{1'}$$

В n-мерном пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы определим кривые $x_i = x_i(s)$, выраженные через параметр s, при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Эти кривые называются *характеристическими кривыми*. (Мы будем говорить об их общем значении в связи с рассмотрением квазилинейных дифференциальных уравнений, проведенном в гл. II, § 2.) В случае $n = 2$ эти кривые касаются осей Монжа, упомянутых в § 4, п. 1 в качестве вырождающихся конусов Монжа.

Напомним некоторые факты, касающиеся обыкновенных дифференциальных уравнений. Считая в уравнениях (2) независимым переменным одну из величин x_i вместо s, мы можем представить общее решение полученной в результате этого системы, зависящее от $(n-1)$ параметров c_i, в виде

$$c_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Здесь c_i — произвольные постоянные интегрирования, а φ_i — независимые первые интегралы системы. Под первым интегралом $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ здесь подразумевается функция независимых переменных x_i, которая имеет постоянное значение вдоль каждой кривой $x_i(s)$, удовлетворяющей системе (2).

Уравнение (1′) очевидно показывает, что для значений $u(s) = u[x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)]$ решения u дифференциального уравнения с частными производными вдоль интегральной кривой системы обыкновенных дифференциальных уравнений справедливо соотношение

$$\frac{du}{ds} = 0. \tag{3}$$

Таким образом, *на каждой интегральной кривой системы* (2) *обыкновенных дифференциальных уравнений любое решение дифференциального уравнения с частными производными* (1′) *имеет постоянное значение, т. е. значение, не зависящее от s.* Любое решение этого дифференциального уравнения с частными производными есть *интеграл* системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

С другой стороны, любой интеграл

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) есть решение дифференциального уравнения с частными производными (1′); подставляя в этот интеграл вместо x_i любое решение $x_i(s)$ системы (2) и дифференцируя φ по s, можно проверить, что (1′) выполняется на любой интегральной кривой $x_i(s)$. Через любую точку соответствующим образом ограниченной области пространства x проходит интегральная кривая; следовательно, φ удовлетворяет уравнению (1′) тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в этой области.

Для любого множества n интегралов

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

системы дифференциальных уравнений (2) справедливо соотношение вида

$$\omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0, \tag{4}$$

так как уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где некоторые коэффициенты a_ν отличны от нуля, могут удовлетворяться, только если определитель

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{5}$$

обращается в нуль. Но это есть достаточное условие того, чтобы выполнялось соотношение вида (4). С другой стороны, согласно элементарным теоремам существования в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, существует $(n-1)$ независимых интегралов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ системы (2), так что каждый интеграл φ должен иметь вид

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}). \tag{6}$$

Обратно, так как каждая функция $w(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ постоянна на любой интегральной кривой системы (2) и, следовательно, является интегралом системы (2), то все решения дифференциального уравнения с частными производными (1′) записываются в виде (6), где w — произвольная функция $n-1$ аргументов.

Наоборот, система обыкновенных дифференциальных уравнений (2) может быть решена с помощью $n-1$ независимых решений

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$$

дифференциального уравнения с частными производными; уравнения (2) можно, например, разрешить, если из уравнений $\varphi_\nu = c_\nu$ определить $n-1$ величин $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ как функции независимой переменной x_n и параметров $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$.

2. Квазилинейные дифференциальные уравнения. Общий случай, когда дифференциальное уравнение (1) квазилинейно и может иметь отличную от нуля правую часть $a(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$, не является по существу более трудным; он может быть сведен к случаю линейного однородного дифференциального уравнения с одной дополнительной независимой переменной x_{n+1} и полностью исследован. (Способ, которым выполняется это сведение, будет использован и далее в этой книге.) Мы введем $u = x_{n+1}$ в качестве новой независимой переменной; если мы будем допускать представление искомого решения уравнения (1) в неявном виде $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$, или в более общем виде, включающем константу c:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c, \tag{7}$$

то задача сведется к определению φ. Так как $\varphi_{x_i} + \varphi_{x_{n+1}} u_{x_i} = 0$, функция φ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu \varphi_{x_\nu} = 0, \tag{8}$$

где мы положим $a(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = a_{n+1}$.

Это уравнение как раз имеет вид линейного однородного уравнения для функции $n+1$ переменных $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Однако здесь есть некоторое затруднение, касающееся самого понятия диф-

ференциального уравнения: уравнение (8) не должно выполняться тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, так как оно введено только для тех множеств значений x_ν, на которых выполняются соотношения $\varphi=0$ или $\varphi=c$. Таким образом, с этой точки зрения (8) еще не является линейным однородным дифференциальным уравнением. Но если вместо того, чтобы рассматривать одно решение исходного дифференциального уравнения, мы рассматриваем однопараметрическое семейство, зависящее от параметра c и заданное уравнением $\varphi=c$, то уравнение (8) должно выполняться для всех значений $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n+1}$, т. е. оно действительно является линейным дифференциальным уравнением рассматриваемого типа. Если мы произвольно выберем

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$$

и возьмем значение c, такое, что $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})=c$, то, так как уравнение (8) должно выполняться для этого значения c, оно выполняется тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Обратно, если мы найдем решение φ уравнения (8) и положим $\varphi=c$, то мы получим однопараметрическое семейство решений уравнения (1).

Таким образом, мы доказали, что существует взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (8) и однопараметрическими семействами решений исходного уравнения (1). Это показывает, что интегрирование общего квазилинейного дифференциального уравнения (1) эквивалентно интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds}=a_i, \qquad \frac{du}{ds}=a. \tag{9}$$

§ 6. Преобразование Лежандра

1. Преобразование Лежандра для функций двух переменных. Интегрирование некоторых классов дифференциальных уравнений можно существенно упростить, применив „*преобразование Лежандра*“. Это преобразование подсказывается геометрической интерпретацией дифференциального уравнения, если представлять интегральную поверхность не через координаты точки, а через координаты ее касательной плоскости[1]).

Для описания некоторой поверхности в пространстве x, y, u имеются две двойственные возможности. Можно или задавать поверхность как множество точек, определенное функцией $u(x, y)$, или рассматривать эту поверхность как огибающую семейства ее касательных плоскостей, т. е. написать уравнение, которому должна удовлетво-

[1]) См. т. I, стр. 207—208.

рять плоскость, чтобы быть касательной плоскостью к этой поверхности. Если $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{u}$ — текущие координаты на плоскости, уравнение которой имеет вид

$$\bar{u} - \xi\bar{x} - \eta\bar{y} + \omega = 0,$$

то мы будем называть ξ, η, ω координатами этой плоскости. Так как уравнение плоскости, касающейся поверхности $u(x, y)$ в точке (x, y, u), имеет вид

$$\bar{u} - u - (\bar{x} - x)\, u_x - (\bar{y} - y)\, u_y = 0,$$

то ее координаты равны

$$\xi = u_x, \quad \eta = u_y, \quad \omega = xu_x + yu_y - u.$$

Рассматриваемая поверхность будет определена также, если ω задана как функция ξ и η, чем уже задается двухпараметрическое семейство касательных плоскостей. Мы можем найти зависимость $\omega(\xi, \eta)$ от $u(x, y)$, определяя x и y как функции ξ и η из уравнений

$$\xi = u_x, \qquad \eta = u_y$$

и подставляя их в уравнение

$$\omega = xu_x + yu_y - u = x\xi + y\eta - u.$$

Обратно, чтобы определить координаты точки по координатам касательной плоскости, мы найдем частные производные функции $\omega(\xi, \eta)$. Так как $\xi = u_x$ и $\eta = u_y$, мы имеем

$$\omega_\xi = x + \xi \frac{\partial x}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} - u_x \frac{\partial x}{\partial \xi} - u_y \frac{\partial y}{\partial \xi} = x$$

и, аналогично,

$$\omega_\eta = y.$$

Таким образом, мы получаем систему формул

$$\begin{gathered} \omega(\xi, \eta) + u(x, y) = x\xi + y\eta, \\ \xi = u_x, \qquad \eta = u_y, \\ x = \omega_\xi, \qquad y = \omega_\eta, \end{gathered} \tag{1}$$

которая указывает на двойственный характер соотношения между координатами точки и координатами касательной плоскости.

Такое преобразование поверхности от координат точки к координатам плоскости называется *преобразованием Лежандра* для функций двух переменных. Оно существенно отличается по своему характеру от простого преобразования координат, ибо оно ставит в соответствие не точке точку, а элементу поверхности (x, y, u, u_x, u_y) элемент поверхности $(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega)$.

Преобразование Лежандра всегда возможно, если уравнения $u_x = \xi$, $u_y = \eta$ могут быть разрешены относительно x и y; это так, если якобиан

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \rho \tag{2}$$

не обращается в нуль в точках рассматриваемой поверхности. Преобразование Лежандра, очевидно, невозможно для поверхностей удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0,$$

т. е. *для развертывающихся поверхностей*. Этот результат можно сделать геометрически наглядным. Развертывающаяся поверхность по определению обладает однопараметрическим семейством касательных плоскостей, каждая из которых касается поверхности по прямой, а не только в точке; таким образом, невозможно установить взаимно однозначное соответствие между точками и касательными плоскостями к поверхности.

Наконец, чтобы применить преобразование Лежандра к дифференциальным уравнениям второго порядка, мы найдем, как преобразуются вторые производные функций $u(x, y)$ и $\omega(\xi, \eta)$. Для этого мы будем считать, что переменные x и y в уравнениях $\xi = u_x$, $\eta = u_y$ выражены через ξ и η при помощи соотношений $x = \omega_\xi$, $y = \omega_\eta$. Дифференцируя уравнения $\xi = u_x$, $\eta = u_y$ по ξ и η, мы найдем

$$\begin{aligned}
1 &= u_{xx}\omega_{\xi\xi} + u_{xy}\omega_{\xi\eta},\\
0 &= u_{xy}\omega_{\xi\xi} + u_{yy}\omega_{\xi\eta},\\
0 &= u_{xx}\omega_{\xi\eta} + u_{xy}\omega_{\eta\eta},\\
1 &= u_{xy}\omega_{\xi\eta} + u_{yy}\omega_{\eta\eta},
\end{aligned}$$

или, в матричных обозначениях,

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_{\xi\xi} & \omega_{\xi\eta} \\ \omega_{\xi\eta} & \omega_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если мы введем сокращенные обозначения

$$\begin{aligned}
\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2 &= \frac{1}{\rho},\\
u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 &= \rho,
\end{aligned} \tag{3}$$

то мы получим

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \rho\omega_{\eta\eta},\\
u_{xy} &= -\rho\omega_{\xi\eta},\\
u_{yy} &= \rho\omega_{\xi\xi}.
\end{aligned} \tag{4}$$

2. Преобразование Лежандра для функций n переменных. Для полноты мы упомянем также преобразование Лежандра для функций n независимых переменных. Оно задается следующей системой формул:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n, \quad (5)$$

$$u_{x_1} = \xi_1, \quad u_{x_2} = \xi_2, \ \ldots, \ u_{x_n} = \xi_n,$$

$$\omega_{\xi_1} = x_1, \quad \omega_{\xi_2} = x_2, \ \ldots, \ \omega_{\xi_n} = x_n.$$

Чтобы дать формулы преобразования для вторых производных, мы обозначим алгебраические дополнения элементов $u_{x_i x_k}$, $\omega_{\xi_i \xi_k}$ в матрицах

$$\begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & \ldots & u_{x_1 x_n} \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \\ u_{x_n x_1} & \ldots & u_{x_n x_n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \omega_{\xi_1 \xi_1} & \ldots & \omega_{\xi_1 \xi_n} \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \\ \omega_{\xi_n \xi_1} & \ldots & \omega_{\xi_n \xi_n} \end{pmatrix}$$

через U_{ik} и Ω_{ik}, а определители этих матриц — через U и Ω. Тогда формулы преобразования имеют вид

$$u_{x_i x_k} = \frac{\Omega_{ik}}{\Omega}, \quad \omega_{\xi_i \xi_k} = \frac{U_{ik}}{U}, \quad (6)$$

и $U\Omega = 1$.

Применимость преобразования Лежандра, как легко проверить, зависит от выполнения неравенства $U \neq 0$ (или $\Omega \neq 0$).

3. Применение преобразования Лежандра к дифференциальным уравнениям в частных производных. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных не более чем второго порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (7)$$

С помощью преобразования Лежандра мы ставим в соответствие интегральной поверхности $u(x, y)$ этого уравнения функцию $\omega(\xi, \eta)$. Тогда уравнение $F = 0$ переходит в дифференциальное уравнение для функции ω тоже не более чем второго порядка, а именно, в уравнение

$$G = F(\omega_\xi, \omega_\eta, \xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta - \omega, \xi, \eta, \rho\omega_{\eta\eta}, -\rho\omega_{\xi\eta}, \rho\omega_{\xi\xi}) = 0, \quad (8)$$

где

$$\rho = \frac{1}{\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2}.$$

Однако это дифференциальное уравнение, как правило, дает только не развертывающиеся интегральные поверхности исходного уравнения, так как преобразование Лежандра неприменимо к развертывающимся поверхностям.

В частности, в случае дифференциального уравнения первого порядка преобразование Лежандра может быть полезным, если переменные x, y и u входят в уравнение простым образом, а производные u_x, u_y — более сложным образом.

В качестве примера мы рассмотрим уравнение

$$u_x u_y = x, \tag{9}$$

которое после преобразования Лежандра переходит в уравнение

$$\xi\eta = \omega_\xi; \tag{10}$$

его решение сразу дается формулой

$$\omega = \frac{1}{2}\xi^2\eta + w(\eta).$$

Из формул преобразования следует, что

$$\begin{aligned} x &= \xi\eta, \\ y &= \frac{1}{2}\xi^2 + w'(\eta), \\ u &= \xi^2\eta + \eta w'(\eta) - w(\eta). \end{aligned} \tag{11}$$

Если мы исключим ξ и η из этих трех уравнений, то получим искомое решение заданного дифференциального уравнения[1]).

С другой стороны, дифференциальное уравнение

$$u_x u_y = 1 \tag{12}$$

переводится преобразованием Лежандра в уравнение

$$\xi\eta = 1.$$

Это уравнение уже не является дифференциальным, и преобразование здесь ничего не дает; все решения уравнения $u_x u_y = 1$ представляют

---

[1]) Однако здесь потеряны решения, для которых выражение $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$ обращается в нуль. Дифференцируя уравнение $u_x u_y = x$ по x и y, мы получим

$$\begin{aligned} u_{xx}u_y + u_{xy}u_x &= 1, \\ u_{xy}u_y + u_{yy}u_x &= 0, \end{aligned}$$

т. е. неоднородную систему уравнений, определитель которой $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$ обращается в нуль, только если $u_{xy} = u_{yy} = 0$. Отсюда следует, что потерянные решения должны иметь вид

$$u = ay + \frac{1}{2a}x^2 + b,$$

где a и b — произвольные постоянные. Действительно, это выражение является полным интегралом уравнения (9), и из него можно получить систему (11) методом, изложенным в § 4, п. 2, с помощью введения соответствующих параметров.

собой развертывающиеся поверхности. Это сразу подтверждается дифференцированием уравнения по x и по y:

$$u_{xx}u_y + u_{xy}u_x = 0,$$
$$u_{xy}u_y + u_{yy}u_x = 0. \qquad (13)$$

Так как возможность $u_x = u_y = 0$ исключена в силу того, что $u_x u_y = 1$, для каждой интегральной поверхности $u(x, y)$ должно выполняться условие $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$ [1]).

Точно так же преобразование Лежандра не проходит ни для какого уравнения вида

$$F(u_x, u_y) = 0. \qquad (14)$$

Третий пример дает *уравнение Клеро*

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y), \qquad (15)$$

уже рассмотренное в § 4, п. 4. Преобразование Лежандра переводит (15) в простое уравнение

$$\omega = -f(\xi, \eta). \qquad (16)$$

Отсюда мы заключаем, что единственная не развертывающаяся интегральная поверхность дифференциального уравнения Клеро задается уравнением (16), или, в точечных координатах, уравнениями

$$x = -f_\xi(\xi, \eta),$$
$$y = -f_\eta(\xi, \eta), \qquad (17)$$
$$u = f - \xi f_\xi - \eta f_\eta.$$

Это заключение подтверждается следующими вычислениями. Мы дифференцируем уравнение (15) и получаем формулы

$$(x + f_p)u_{xx} + (y + f_q)u_{xy} = 0,$$
$$(x + f_p)u_{xy} + (y + f_q)u_{yy} = 0$$

(здесь $p = u_x$, $q = u_y$); отсюда следует, что для интегральной поверхности имеем или

$$D = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0,$$

или

$$x = -f_p, \qquad y = -f_q.$$

Но вторая возможность дает именно ту исключительную поверхность, которая получается с помощью преобразования Лежандра.

---

[1]) Между прочим, уравнение (12) заменой $x = \xi^2/2$ может быть сведено к виду (9) и таким образом решено; это можно сделать также с помощью полного интеграла

$$u = ax + \frac{1}{a}y + b.$$

В качестве следующего примера мы рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка — уравнение *минимальных поверхностей* (см. также т. I):

$$\left(1+u_y^2\right)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+\left(1+u_x^2\right)u_{yy}=0, \tag{18}$$

нелинейное относительно производных функции $u(x, y)$. Эту кажущуюся трудность можно обойти, приводя уравнение (18) с помощью преобразования Лежандра к виду

$$(1+\eta^2)\,\omega_{\eta\eta}+2\xi\eta\omega_{\xi\eta}+(1+\xi^2)\,\omega_{\xi\xi}=0, \tag{19}$$

т. е. к линейному дифференциальному уравнению. Ниже (см. приложение 1 к этой главе, гл. III, § 1, п. 4 и т. III) мы рассмотрим другие способы линеаризации уравнения (18), которые дают простой подход к теории минимальных поверхностей.

Аналогичное важное применение преобразования Лежандра встречается в гидродинамике[1]). Двумерное стационарное течение сжимаемой жидкости описывается двумя компонентами скорости u, v, заданными как функции декартовых координат x, y. Пусть скорость звука c есть заданная функция от u^2+v^2. Движение подчиняется системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u_y-v_x&=0,\\ (c^2-u^2)\,u_x-uv\,(u_y-v_x)+(c^2-v^2)\,v_y&=0. \end{aligned}$$

В соответствии с этим существует потенциал скоростей $\varphi(x, y)$, такой, что

$$u=\varphi_x, \qquad v=\varphi_y$$

и

$$\left(c^2-\varphi_x^2\right)\varphi_{xx}-2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+\left(c^2-\varphi_y^2\right)\varphi_{yy}=0.$$

Решающий шаг в рассмотрении этого нелинейного дифференциального уравнения заключается в применении преобразования Лежандра

$$\begin{aligned} &\Phi+\varphi=ux+vy,\\ &\varphi_x=u, \qquad \varphi_y=v,\\ &\Phi_u=x, \qquad \Phi_v=y. \end{aligned}$$

Для $\Phi(u, v)$ получается линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(c^2-u^2)\,\Phi_{vv}+2uv\Phi_{uv}+(c^2-v^2)\,\Phi_{uu}=0,$$

которое применяется при решении многих задач гидродинамики[2]).

---

[1]) См. также гл. V и **Курант** и **Фридрихс** [1], стр. 239—243.

[2]) Это преобразование может быть непосредственно получено обращением системы функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, т. е. введением x, y как функций независимых переменных u, v. Этот метод часто называют методом „годографа", так как плоскость вектора скорости u, v, называемая „плоскостью годографа", становится основной плоскостью (см. гл. V, § 2).

§ 7. Теорема существования Коши — Ковалевской

1. Введение и примеры. Мы закончим эту главу фундаментальной теоремой, которая обеспечивает существование дифференциальных уравнений в частных производных и одновременно выясняет, каким именно образом произвольные функции входят в „общее" решение. Эта теорема принадлежит Коши, который положил начало современной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Софья Ковалевская в своей диссертации, написанной под влиянием Вейерштрасса, провела доказательство в весьма общем виде [1]).

Теорема относится к задаче с начальными значениями, которую мы часто будем называть „задачей Коши". В теореме предполагается, что дифференциальное уравнение и начальные условия, так же как и решение, аналитичны; она относится к системе m дифференциальных уравнений в частных производных, каждое порядка k, с m неизвестными функциями $u^1, u^2, \ldots, u^m$ (иногда их записывают как $u_1, u_2, \ldots, u_m$) от $n+1$ независимых переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Предполагается, что эта система имеет „нормальную форму", где переменная x выделена:

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^i = f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial u^1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u^m}{\partial y_n^k}\right), \tag{1}$$

а функции f_i *аналитичны* по $x, y_1, y_2, \ldots, \partial^k u^m / \partial y_n^k$ в некоторой области многомерного пространства этих переменных. (Это значит, что они могут быть разложены в степенные ряды по всем этим переменным, сходящиеся в достаточно малой области, относительно которой можно предположить, что она содержит начало координат $x=0$, $y_i=0$, $u_i=0$.) В „плоскости начальных значений" $x=0$ мы задаем km произвольных аналитических функций $\varphi_{ij}(y_1, \ldots, y_n)$ $(i=1, \ldots, m;\ j=0, \ldots, k-1)$ переменных $y_1, \ldots, y_n$ в достаточно малой окрестности начала координат $y_i=0$. Задача Коши состоит в том, чтобы построить решение системы (1), которое при $x=0$ принимает начальные значения

$$u^i(0, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_{i,0}(y_1, \ldots, y_n), \ldots,$$
$$\frac{\partial^{k-1} u^i}{\partial x^{k-1}}(0, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_{i,k-1}(y_1, \ldots, y_n).$$

Надо всегда помнить, что эта задача поставлена только в малом, т. е. для достаточно малой окрестности точки $x=0$, $y_i=0$.

---

[1]) См. Адамар [2], сноска на стр. 11. Адамар ссылается на Коши, Ковалевскую, Дарбу и Гурса. [См. также диссертацию С. В. Ковалевской: Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, *J. reine angew. Math.*, 80 (1875), и книгу: Ковалевская С. В., Научные работы, М., 1948. — *Прим. ред.*]

Основная теорема утверждает, что *задача Коши имеет одно и только одно аналитическое решение* $u^1, \ldots, u^m$.

Достаточно предположить, что $k=1$, т. е. рассматривать системы уравнений первого порядка. Далее, мы проведем все рассуждения только для случая $n=1$, т. е. для дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными x, y, так как для бо́льшего числа независимых переменных не требуется никаких модификаций.

Вообще говоря, систему можно привести к нормальной форме (1). Однако, как мы увидим в п. 5, есть важные исключительные случаи, когда это невозможно[1]).

Для доказательства этой теоремы сначала формально строят степенные ряды для решения, а затем показывают, что они равномерно сходятся.

Прежде чем переходить к общему рассмотрению, мы разберем несколько примеров.

Для дифференциального уравнения

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0$$

с постоянными α и β все решения задаются формулой

$$u = w(\alpha y - \beta x)$$

с произвольной функцией w.

Предположим теперь, что нам произвольным образом заданы начальные значения $u(0, y) = \varphi(y)$. Тогда функция w определится, если положить $x=0$; мы получим решение $u = \varphi(y - \beta x/\alpha)$.

Вообще, рассмотрим (ср. § 1, п. 1, пример 5) нелинейное дифференциальное уравнение

$$\alpha(u)\, u_x + \beta(u)\, u_y = 0,$$

предполагая, что коэффициенты α и β зависят от неизвестной функции u.

Задача Коши состоит в том, чтобы найти решение, для которого $u(0, y) = \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — заданная функция.

Как мы видели раньше, все решения нашего дифференциального уравнения задаются формулой $\alpha(u)\, y - \beta(u)\, x = w(u)$, где w — произвольная функция; функция w снова определяется из начальных

[1]) То, что задача Коши является самой естественной задачей (так же, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, где она сразу объясняет присутствие в решении произвольных констант интегрирования), видно из самого смысла дифференциальных уравнений (1); они выражают через начальные данные и их неявно известные производные по переменным y единственную производную, которая этими данными не определяется; как мы увидим, это открывает путь к определению всех производных неизвестных функций в начале координат.

условий. Подставив в формулу $x=0$ и $u=\varphi(y)$, мы получим $w(\varphi)=\alpha(\varphi)\,y$; если обратная функция для $u=\varphi(y)$ есть $y=\chi(u)$, то мы определим произвольную функцию w соотношением $w(\varphi)=\alpha(\varphi)\,\chi(\varphi)$. Таким образом, искомое решение удовлетворяет соотношению

$$\alpha(u)\,y-\beta(u)\,x=\alpha(u)\,\chi(u)$$

или эквивалентному ему соотношению

$$u=\varphi\left(y-\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}\,x\right).$$

Если функция $u(x, y)$ определена из этого неявного уравнения, то задача Коши решена. (В конце этого параграфа, на стр. 62, мы рассмотрим частный случай, важный для дальнейших приложений.)

Для дифференциального уравнения второго порядка $u_{xy}=f(x, y)$ интеграл по треугольнику в формуле (2) из § 1, п. 1 дает решение задачи Коши.

Простейшее дифференциальное уравнение колебаний

$$u_{xx}-u_{yy}=0$$

приводит к следующей задаче Коши: найти u, если при $x=0$ произвольным образом задано начальное состояние $u(0, y)=\varphi(y)$ и $u_x(0, y)=\psi(y)$ (ср. т. I, гл. V, § 3). Из общего решения этого дифференциального уравнения $u=f(y+x)+g(y-x)$ можно найти вид функций f и g, приспособив их к начальным условиям. Функции f и g находятся из соотношений $f(y)+g(y)=\varphi(y)$, $f'(y)-g'(y)=\psi(y)$, которые непосредственно дают

$$2u(x, y)=\varphi(y+x)+\varphi(y-x)+\int_{y-x}^{y+x}\psi(\lambda)\,d\lambda.$$

При формулировке общей задачи Коши мы предположим, что дифференциальное уравнение можно разрешить относительно старших производных неизвестной функции (или функций) по x.

В соответствии с этим мы будем, например, рассматривать дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, u, p, q)=0, \tag{2'}$$

где

$$p=u_x, \quad q=u_y,$$

и предполагать, что уравнение (2′) может быть разрешено относительно p и приведено к виду

$$p=f(x, y, u, q). \tag{2}$$

Задача Коши состоит теперь в том, чтобы найти решение $u(x, y)$ уравнения (2), которое обращается в заданную функцию

$u(0, y) = \varphi(y)$ при $x = 0$; геометрически это означает, что надо найти интегральную поверхность, пересекающуюся с плоскостью $x = 0$ по заданной начальной кривой $u = \varphi(y)$.

Можно было бы поставить более общую задачу: найти интегральную поверхность уравнения $F(x, y, u, p, q) = 0$, проходящую через заданную пространственную кривую $u = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$. Если мы вместо x и y введем новые независимые переменные $\xi = x - \psi(y)$, $\eta = y$ и положим

$$u(x, y) = u(\xi + \psi(\eta), \eta) = \omega(\xi, \eta),$$

то рассматриваемое дифференциальное уравнение перейдет в уравнение

$$F(\xi + \psi(\eta), \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta - \psi'\omega_\xi) = G(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta) = 0$$

с начальным условием $\omega(0, \eta) = \varphi(\eta)$. Более общая задача сводится таким образом к ранее рассмотренной задаче специального вида, которой мы теперь и ограничимся.

Рассмотрим также дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0, \tag{3'}$$

где введены сокращенные обозначения

$$r = u_{xx} = p_x, \quad s = u_{xy} = p_y = q_x, \quad t = u_{yy} = q_y,$$

которые будут часто применяться в дальнейшем. Предположим, что это уравнение может быть разрешено относительно r в рассматриваемой области изменения аргументов, т. е. что оно может быть приведено к виду

$$r = f(x, y, u, p, q, s, t). \tag{3}$$

Задача Коши для этого дифференциального уравнения состоит в том, чтобы найти решение $u(x, y)$, для которого при $x = 0$ заданы начальные значения u и u_x:

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad u_x(0, y) = \psi(y). \tag{4}$$

Вместо одной произвольной начальной функции $\varphi(y)$, как в случае дифференциальных уравнений первого порядка, мы имеем две произвольным образом заданные функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$.

Аналогичные задачи можно ставить для дифференциальных уравнений более высокого порядка или для систем дифференциальных уравнений. В частности, мы рассмотрим систему первого порядка для неизвестных функций $u_i(x, y)$ (иногда они будут обозначаться через $u^i(x, y)$) следующего вида:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i\left(x, y, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial y}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

с заданными произвольными начальными значениями

$$u_i(0, y) = \varphi_i(y).$$

Доказав, что эти задачи Коши имеют единственные решения, мы выясним, каким образом произвольные функции входят в общее решение.

2. Сведение к системе квазилинейных дифференциальных уравнений. Все задачи Коши, сформулированные выше, могут быть сведены к эквивалентным задачам для систем квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Мы подчеркивали, что многообразие решений системы дифференциальных уравнений, вообще говоря, не эквивалентно множеству решений одного уравнения. Однако, как мы увидим, они эквивалентны, если рассматривать дифференциальные уравнения не в отдельности, а вместе с соответствующими дополнительными начальными условиями. Система квазилинейных дифференциальных уравнений имеет более широкое множество решений, чем исходные уравнения, однако мы так ограничим начальные значения, что множества решений обеих начальных задач будут совпадать.

Прежде всего мы выполним это сведение для дифференциального уравнения первого порядка (2). Заметим, что если задано $u(0, y) = \varphi(y)$, то тем самым автоматически заданы и начальные условия $q(0, y) = \varphi'(y)$. Более того, дифференциальное уравнение (2) дает начальные значения для p, а именно

$$p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y)).$$

Дифференцируя уравнение (2) по x, мы получим для трех функций u, p, q систему квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} u_x &= p, \\ q_x &= p_y, \\ p_x &= f_x + f_u p + f_q p_y \end{aligned} \tag{6}$$

и начальные условия

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi(y), \\ q(0, y) &= \varphi'(y), \\ p(0, y) &= f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y)). \end{aligned} \tag{7}$$

Мы утверждаем, что эта задача Коши эквивалентна исходной. Чтобы оправдать это утверждение, достаточно показать, что для решения u, p, q системы уравнений (6), (7) выполняются уравнения

$$p = f(x, y, u, q), \quad u_x = p, \quad u_y = q.$$

Так как согласно (6) $p_y = q_x$, мы имеем

$$u_{xy} = q_x;$$

отсюда, интегрируя по x, получим

$$u_y(x, y) = q + v(y).$$

Подставляя $x = 0$ и принимая во внимание начальные условия (7), имеем

$$u_y = q$$

для всех x и y, так как из $\varphi'(y) = u_y(0, y)$ следует, что $v(y) = 0$. Далее, согласно (6)

$$u_{xx} = p_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, u, q);$$

следовательно, интегрирование дает

$$u_x = f(x, y, u, q) + a(y).$$

Но так как для $x = 0$ выполняется равенство $u_x = f$, то $a(y) = 0$, и отсюда $u_x = f(x, y, u, u_y)$, т. е. $u(x, y)$ является решением исходной задачи.

Аналогично, задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка (3) с двумя начальными условиями (4) может быть заменена эквивалентной задачей Коши для следующей системы дифференциальных уравнений с шестью функциями u, p, q, r, s, t независимых переменных x, y:

$$\begin{aligned} &u_x = p, \quad q_x = p_y, \quad p_x = r, \\ &s_x = r_y, \quad t_x = s_y, \\ &r_x = f_x + f_u p + f_p r + f_q p_y + f_s r_y + f_t s_y \end{aligned}$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} &u(0, y) = \varphi(y), \quad p(0, y) = \psi(y), \quad q(0, y) = \varphi'(y), \\ &t(0, y) = \varphi''(y), \quad s(0, y) = \psi'(y), \\ &r(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \psi(y), \varphi'(y), \psi'(y), \varphi''(y)). \end{aligned}$$

Из заданных начальных значений исходной задачи φ, ψ и из дифференциального уравнения мы немедленно получаем дополнительные правильно согласованные начальные данные для q, t, s, r. Как и выше, мы можем показать, что p, q, r, s, t совпадают с производными u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, что u и u_x принимают заданные начальные значения (4) и что выполняется дифференциальное уравнение (3), $r = f(x, y, u, p, q, r, s, t)$.

Аналогично мы можем заменить дифференциальное уравнение высшего порядка или систему уравнений квазилинейной системой первого порядка.

Полученные выше квазилинейные системы дифференциальных уравнений содержат независимые переменные x и y в коэффициентах правой части. Часто бывает удобно перейти с помощью одного искусственного приема к другой эквивалентной квазилинейной системе дифференциальных уравнений, в которую уже явно не входят независимые переменные x и y и которая, кроме того, однородна относительно производных. С этой целью мы формально вводим две функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ вместо x и y с помощью уравнений

$$\xi_x = \eta_y, \quad \eta_x = 0 \tag{8}$$

и начальных условий

$$\xi(0, y) = 0, \quad \eta(0, y) = y; \tag{9}$$

решениями системы (8), (9) являются $\xi = x$, $\eta = y$. Так как $\eta_y = 1$, мы можем теперь заменить нашу задачу Коши (6), (7) очевидно эквивалентной ей системой для пяти функций u, p, q, ξ, η:

$$\begin{aligned} &u_x = p\eta_y, \qquad q_x = p_y, \\ &\xi_x = \eta_y, \qquad \eta_x = 0, \\ &p_x = f_q p_y + (f_x + pf_u)\eta_y. \end{aligned} \tag{10}$$

При этом мы должны подставить ξ, η вместо x, y в f_q, f_x, f_u и потребовать, чтобы выполнялись начальные условия

$$\begin{aligned} &u(0, y) = \varphi(y), \quad q(0, y) = \varphi'(y), \\ &\xi(0, y) = 0, \qquad \eta(0, y) = y, \\ &p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y)). \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, сформулирована задача Коши указанного выше вида, эквивалентная исходной задаче Коши для уравнения (2).

Аналогичный результат получается в случае задачи Коши для уравнения второго порядка. Как и в задаче для уравнения первого порядка, мы искусственно заменяем x и y функциями ξ и η, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям (8) и начальным условиям (9); опять вместо (3), (4) мы можем поставить эквивалентную задачу Коши для системы квазилинейных однородных уравнений первого порядка относительно функций u, p, q, r, s, t, ξ, η.

Все задачи, получаемые таким способом, имеют вид квазилинейной системы первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(u_1, u_2, \ldots, u_m) \frac{\partial u_j}{\partial y} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{12}$$

с заданными начальными условиями вида

$$u_i(0, y) = \varphi_i(y). \tag{13}$$

В такой квазилинейной системе коэффициенты $G_{ik}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ явно зависят только от самих неизвестных функций u_i, но не от независимых переменных x и y. Соответствующий общий результат формулируется так: задача Коши любого порядка для систем дифференциальных уравнений может быть легко сведена к задаче Коши этого типа. Конечно, в случае n переменных $y_1, \ldots, y_n$ систему (12) надо заменить системой вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} G_{i,j,\nu}(u_1, \ldots, u_m) \frac{\partial u_j}{\partial y_\nu}. \tag{12a}$$

3. Определение производных вдоль начального многообразия. Решающим фактом является то, что дифференциальные уравнения вместе с начальными условиями дают метод вычисления всех производных искомого решения вдоль начальной кривой, например $x = 0$, если только это решение существует и если как решение, так и дифференциальное уравнение и начальные функции аналитичны. Сначала заметим, что вдоль начальной кривой $x = 0$ все величины, которые нам уже известны (например, u и некоторые производные от u), дают при дифференцировании по y новые известные величины, т. е. дополнительные производные. Недостающие производные, содержащие дифференцирования по x, должны затем определяться с помощью дифференциальных уравнений.

Таким образом, в случае дифференциального уравнения (2), $p = f(x, y, u, q)$, мы можем определить $q = \varphi'(y)$ и $t = u_{yy} = q_y = \varphi''(y)$ и т. д. вдоль $x = 0$ с помощью начальных данных. Само дифференциальное уравнение дает величину $p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y))$. Аналогично, при $x = 0$ известно

$$q_x = p_y = f_y + f_u q + f_q q_y.$$

Чтобы определить вдоль начальной кривой недостающую вторую производную $r = p_x = u_{xx}$, мы продифференцируем уравнение (2) по x и получим $r = p_x = f_x + f_u p + f_q q_x$. В правой части содержатся величины, уже известные при $x = 0$ из изложенных выше соображений; следовательно, левая часть тоже определена для $x = 0$.

Дальнейшее дифференцирование по x определенных таким образом величин и дифференциального уравнения дает все старшие производные вдоль $x = 0$ до тех пор, пока справедливы предположения о непрерывной дифференцируемости функции f и решения u.

Аналогично мы можем определить производные функции u вдоль начальной кривой в случае задачи Коши для уравнения второго порядка (3). Но не менее просто рассмотреть общую задачу Коши (12), (13), которая содержит все рассматриваемые частные задачи. Для

системы такого вида ясно, как последовательно получаются производные функций u_i вдоль начального многообразия, т. е. вдоль $x=0$.

Сначала посредством дифференцирования функций $\varphi_i(y)$ находятся производные $\partial u_i/\partial y$, $\partial^2 u_i/\partial y^2$, ... вдоль линии $x=0$, а затем первые производные по x определяются из дифференциальных уравнений; дифференцируя определенные таким образом величины по y, мы получаем смешанные производные $\partial^2 u_i/\partial x\,\partial y$ для $x=0$. Затем, дифференцируя систему дифференциальных уравнений (12) по x, в правых частях получают выражения, содержащие только первые и смешанную вторую производные функций u_i по x и y; следовательно, эти выражения известны и определяют выражения, стоящие слева, т. е. вторые производные $\partial^2 u_i/\partial x^2$, и т. д. Подчеркнем, что в этом процессе последовательного определения производных применяются только дифференцирование и подстановки.

Согласно нашим предположениям об аналитичности, можно произвести неограниченное количество дифференцирований; тогда из начальных данных определятся все производные функций u_i при $x=0$ и, в частности, при $x=0$, $y=0$.

Теперь естественно рассмотреть обратный процесс. Если описанное выше последовательное определение начальных значений производных можно применять неограниченное число раз — а это так в случае, когда сами уравнения и начальные значения *аналитичны*, — то можно построить формальный степенной ряд, используя полученные таким образом производные в качестве коэффициентов. Тогда остается показать, что так построенный степенной ряд сходится и является решением первоначальной задачи Коши.

4. Доказательство существования решений аналитических дифференциальных уравнений. При доказательстве фундаментальной теоремы существования для системы (12) можно пытаться строить разложение в окрестности начала $x=0$, $y=0$ в предположении, что начальные значения удовлетворяют условию $\varphi_i(0)=0$. Если бы это было не так, мы могли бы ввести разности $u_i-\varphi_i(0)$ в качестве новых неизвестных функций[1]). Аналитичность наших данных означает, что функции G_{ik}, φ_i заданы степенными рядами

$$\varphi_i(y)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^i y^\nu, \tag{14}$$

$$G_{ik}(u_1, \ldots, u_m)=\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m=0}^{\infty} b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{ik} u_1^{\nu_1} \ldots u_m^{\nu_m}, \tag{15}$$

сходящимися соответственно в областях $|y|\leqslant\rho$ и $|u_i|\leqslant r$.

---

[1]) Мы могли бы добиться еще большего упрощения, введя в качестве новых неизвестных функций $u_i-\varphi_i(y)=v_i$, для которых все начальные значения $v_i(0, y)$ тождественно равны нулю, в то время как общий вид системы дифференциальных уравнений остается неизменным.

Мы утверждаем, что задача Коши для такой системы дифференциальных уравнений имеет решение, которое может быть выражено степенным рядом

$$u_i(x, y) = \sum_{\substack{l=0 \\ k=1}}^{\infty} c_{lk}^i x^l y^k. \tag{16}$$

Согласно п. 3, коэффициенты степенного ряда (16) однозначно определяются с помощью дифференциальных уравнений и начальных данных, так как значения производных предполагаемых решений u_i в точке $x=0$, $y=0$ могут быть получены простой подстановкой частного значения $y=0$ в производные на начальной линии $x=0$. Таким образом, коэффициенты c_{lk}^i разложения (16) определены однозначно.

Если мы предположим, что построенный таким образом ряд сходится в некоторой окрестности начала $x=0$, $y=0$, то, согласно хорошо известным теоремам, этот ряд можно почленно дифференцировать внутри его области сходимости; полученные производные можно подставить в дифференциальные уравнения. Выражения, полученные в результате, снова можно представить как ряды по x и y. Вспоминая, как определялись последовательные производные функций u_i в начале координат, мы видим, что в левой и правой части каждого уравнения, а также уравнений, полученных их дифференцированием, в точке $x=0$, $y=0$ получается одно и то же. В силу аналитичности рассматриваемые дифференциальные уравнения удовлетворяются тождественно, т. е. функции u_i являются системой решений. Эта система решений принимает заданные начальные значения и является поэтому решением нашей задачи Коши, что непосредственно следует из построения степенных рядов (16) и из предположения об их сходимости.

Следовательно, доказательство теоремы существования будет завершено, как только будет показано, что ряды (16) *сходятся в некоторой области.*

Чтобы доказать их сходимость, мы исследуем зависимость коэффициентов c_{lk}^i от коэффициентов a_ν^j, $b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}$. Заметим сначала, что почленное дифференцирование любого степенного ряда дает новый степенной ряд, коэффициенты которого строятся как линейные комбинации коэффициентов исходного ряда с неотрицательными целыми коэффициентами. При подстановке степенных рядов в дифференциальные уравнения (12) используются только действия сложения и умножения. Таким образом, выражения, полученные в правых частях, тоже являются степенными рядами по x и y, коэффициенты c_{lk}^i которых представляют собой полиномы от величин a_ν^j, $b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}$:

$$c_{lk}^i = P_{lk}^i\left(a_\nu^j,\ b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}\right). \tag{17}$$

Коэффициенты этих полиномов — неотрицательные целые числа, не зависящие от вида функций G_{ik} и φ_i.

После этих подготовительных рассуждений мы установим сходимость, пользуясь классическим *методом мажорант*. Вместе с нашей исходной задачей Коши, относящейся к функциям G_{ik} и φ_i, мы рассмотрим новую задачу Коши, в которой функции G_{ik} и φ_i заменены другими функциями — „мажорантами" K_{ik} и ψ_i. В некоторой окрестности начала координат мы положим

$$\psi_i(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^i y^\nu \tag{18}$$

и

$$K_{ik}(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0}^{\infty} B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{ik} u_1^{\nu_1} \ldots u_m^{\nu_m}, \tag{19}$$

где

$$A_\nu^i \geqslant |a_\nu^i|, \quad B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{ik} \geqslant |b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{ik}|.$$

Другими словами, коэффициенты степенных рядов новых функций K_{ik} и ψ_i неотрицательны и не меньше, чем абсолютные величины соответствующих коэффициентов заданных функций G_{ik} и φ_i.

Мы поставим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} K_{ik}(v_1, \ldots, v_m) \frac{\partial v_k}{\partial y} \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{20}$$

$$v_i(0, y) = \psi_i(y), \tag{21}$$

„мажорантную" для исходной задачи.

Если в соответствии с описанным выше методом мы построим коэффициенты C_{lk}^i степенных рядов для предполагаемых решений

$$v_i(x, y) = \sum_{\substack{l=0,\\ k=1}}^{\infty} C_{lk}^i x^l y^k \tag{22}$$

мажорантной задачи, то мы получим новые выражения C_{lk}^i через A_ν^j и $B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}$ таким же способом, каким первоначальные коэффициенты c_{lk}^i получались из a_ν^j и $b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}$ $\left(\text{т. е. } C_{lk}^i = P_{lk}^i\left(A_\nu^j, B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}\right)\right)$. Но так как коэффициенты этих полиномов неотрицательны, мы сразу получаем

$$C_{lk}^i \geqslant |c_{lk}^i|.$$

Таким образом, формальный степенной ряд (22) является мажорантой для степенного ряда (16). Следовательно, если мы докажем сходи-

мость этого мажорантного ряда (22), то мы обеспечим и сходимость исходного ряда (16).

Мы используем это замечание следующим образом: построим мажорантную задачу особенно простого вида, решение которой можно получить в явном виде и доказать тем самым сходимость мажорантного ряда. С этой целью мы выберем (как и выше) два положительных числа r и ρ, таких, что степенные ряды для $G_{ik}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ и $\varphi_i(y)$ сходятся соответственно при $|u_i| \leqslant r$ и $|y| \leqslant \rho$. Тогда, согласно хорошо известной теореме о степенных рядах, существует постоянная M, такая, что

$$|a_\nu^i| \leqslant \frac{M}{\rho^\nu} = A_\nu^i$$

и

$$\left|b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}\right| \leqslant \frac{M}{r^{\nu_1 + \ldots + \nu_m}};$$

тогда a fortiori мы имеем

$$\left|b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}\right| \leqslant \frac{M}{r^{\nu_1 + \ldots + \nu_m}} \frac{(\nu_1 + \ldots + \nu_m)!}{\nu_1! \ldots \nu_m!} = B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}.$$

Теперь мы положим (ср. (18), (19))

$$\psi_i(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^i y^\nu = M \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\rho}\right)^\nu \tag{23}$$

и

$$K_{ik}(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0}^{\infty} B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{ik} u_1^{\nu_1} \ldots u_m^{\nu_m} =$$

$$= M \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0}^{\infty} \left(\frac{u_1}{r}\right)^{\nu_1} \ldots \left(\frac{u_m}{r}\right)^{\nu_m} \frac{(\nu_1 + \ldots + \nu_m)!}{\nu_1! \ldots \nu_m!}. \tag{24}$$

Ряд (24) сходится, если аргументы

$$u_1, u_2, \ldots, u_m$$

изменяются в области, где

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m| < r;$$

его сумма выражается формулой

$$K_{ik}(u_1, \ldots, u_m) = \frac{M}{1 - \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_m}{r}}. \tag{25}$$

Ряд (23) для $|y| < \rho$ дает

$$\psi_i(y) = \frac{My}{\rho - y}. \tag{26}$$

Таким образом, задача

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{M}{1 - \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_m}{r}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial v_k}{\partial y}, \tag{27}$$

$$v_i(0, y) = \frac{My}{\rho - y} \tag{28}$$

является мажорантной задачей Коши для задачи (12).

Единственное, что осталось сделать — это явно построить решения $v_i(x, y)$ этой системы и показать, что в точке $x = 0$, $y = 0$ они могут быть разложены в степенные ряды.

Так как все функции K_{ik}, а также функции ψ_i тождественны, то естественно предположить, что

$$v_i(x, y) = v(x, y)$$

независимо от i.

Это приводит к одному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{mM}{1 - \frac{m}{r} v} \frac{\partial v}{\partial y},$$

или

$$\left(1 - \frac{m}{r} v\right) v_x - mMv_y = 0, \tag{29}$$

с начальными условиями

$$v(0, y) = v_0 = \frac{My}{\rho - y}. \tag{30}$$

Следовательно, мы должны только показать, что эта задача Коши имеет решение $v(x, y)$, которое может быть разложено в степенной ряд в достаточно малой окрестности начала координат.

Наша задача Коши совпадает с задачей, уже рассмотренной в качестве примера в п. 1, стр. 51. Данный там метод приводит к квадратному уравнению

$$(v + M)\left[\left(1 - \frac{m}{r} v\right) y + mMx\right] = \rho v \left(1 - \frac{m}{r} v\right) \tag{31}$$

относительно функции v. Из двух корней этого уравнения мы должны выбрать тот, который принимает нулевое значение при $x = 0$, $y = 0$. Существование такого решения сразу следует из уравнения (31), которое при $x = 0$, $y = 0$ переходит в уравнение $v(1 - mv/r) = 0$. Так как по предположению $r > 0$, корни различны при $x = 0$, $y = 0$. Поэтому дискриминант квадратного уравнения (31) отличен от нуля в начале координат, а следовательно, и в некоторой окрестности

начала, так что в этой окрестности корень несомненно может быть разложен в степенной ряд по x и y.

Действительно, это решение явно дается формулой

$$v = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{M}{\rho}(y - rx) + \frac{r}{m}\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)}{1 - y/\rho} - \\ - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\left[\frac{M}{\rho}(y + rx) - \frac{r}{m}\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)\right]^2 - 4M^2\frac{rx}{\rho}}}{1 - y/\rho}, \quad (32)$$

что легко проверить.

Таким образом, в некоторой окрестности начала координат доказана сходимость мажорантного ряда (22) и, следовательно, сходимость исходного ряда (16), а тем самым полностью доказано существование аналитического решения нашей задачи Коши.

В то же время непосредственно ясно, что *для всех дифференциальных уравнений и начальных функций, допускающих общие мажоранты, степенные ряды сходятся равномерно и решения существуют в одной и той же области.*

Данное выше доказательство, очевидно, показывает, что может быть только одно *аналитическое* решение задачи Коши для аналитической системы (12), если только начальные данные аналитичны. Во многих случаях предположение об аналитичности начальных данных является слишком сильным; часто оно даже противоречит природе рассматриваемых физических задач. Поэтому представляет интерес установленный Хольмгреном [1] факт, что единственность решения задачи Коши для аналитического уравнения или системы имеет место независимо от того, являются ли начальные данные или решение аналитическими. В частности, аналитическое решение, соответствующее аналитическим данным Коши, является единственным решением, соответствующим этим данным Коши; таким образом, любое решение автоматически является аналитическим. (См. гл. III, приложение 2.)

Точную формулировку и доказательство теоремы Хольмгрена см. в приложении 2 к гл. III.

4а. Замечание о линейных дифференциальных уравнениях. Если коэффициенты G фиксированы, то предыдущее рассуждение показывает, что степенной ряд для решения u сходится в круге радиуса r, который является функцией $r(M, \rho)$, зависящей только от M и ρ.

Если заданное дифференциальное уравнение линейно и однородно, то αu с произвольной константой α является решением с тем же радиусом сходимости r, соответствующим начальным данным $\alpha\varphi$, которые, согласно предыдущему пункту, сохраняют радиус сходимости ρ. Следовательно, $r = r(\alpha M, \rho)$ не зависит от M и является

функцией одного ρ. Аналогично мы можем рассуждать в случае неоднородных дифференциальных уравнений. Отсюда вытекает следующий важный факт. *Если для фиксированных линейных дифференциальных уравнений начальные данные сходятся при всех значениях их аргумента, например, если они являются полиномами, то ряды для решений имеют фиксированный радиус сходимости, не зависящий от начальных данных.*

4б. Замечание о неаналитических дифференциальных уравнениях. Для нужд математической физики предположение об аналитичности дифференциальных уравнений является слишком узким. В следующих главах мы будем строить решения для широких классов дифференциальных уравнений (необязательно аналитических), к которым доказательство существования из этого параграфа не применимо без дополнительных или совершенно иных соображений. Тем более важно, что недавно Ганс Леви [1] построил пример, а Хёрмандер [1] провел дальнейшее исследование классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных с бесконечно дифференцируемыми, но не аналитическими коэффициентами, у которых совсем нет решений. Такое неожиданное поведение некоторых дифференциальных уравнений, которые, казалось бы, не слишком отличаются от аналитических уравнений, ставит следующую проблему: найти простое различие между разрешимыми и „неправильными" не разрешимыми дифференциальными уравнениями. Работа Хёрмандера в большой мере проливает свет на этот вопрос.

5. Замечания о критических начальных данных. Характеристики. Результаты п. 2 и 3 основаны на предположении, что систему дифференциальных уравнений можно записать в виде (12). Если мы рассмотрим условия, при которых можно написать такую „нормальную" форму, то мы придем к понятию исключительных, или „критических", начальных многообразий, или „характеристик". Мы определим понятие характеристики, которое играет фундаментальную роль в теории дифференциальных уравнений в частных производных и встречается в разных местах этой книги.

Предположим сначала, что заданная система уравнений линейна и что независимых переменных две:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial y}+c_{ij}u_j\right)=d_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

здесь a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_i — заданные функции x и y. Эту систему можно разрешить относительно производных по x в некоторой точке (x_0, y_0) тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов a_{ij} *неособая*

в (x_0, y_0). Если матрица a_{ij} особая в (x_0, y_0), то линия $x = x_0$ называется *характеристической* в точке (x_0, y_0); в противном случае она называется нехарактеристической, или *свободной*.

В более общем случае мы можем рассматривать аналитическую кривую C, заданную в виде $\xi(x, y) = 0$ и входящую в семейство $\xi(x, y) = \text{const}$. Нам часто приходится решать задачу Коши с начальными данными для $u^1, u^2, \ldots, u^m$, заданными на C. Эту задачу можно просто свести к случаю, когда начальное многообразие является координатной линией, если ввести новые независимые переменные ξ и η вместо x и y, где η — любая подходящая вторая переменная. Запишем систему для переменных ξ и η:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(a_{ij}\xi_x + b_{ij}\xi_y)\frac{\partial u_j}{\partial\xi} + (a_{ij}\eta_x + b_{ij}\eta_y)\frac{\partial u_j}{\partial\eta} + c_{ij}u_j\right] = d_i \qquad (33)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Кривая C называется характеристической в точке (x_0, y_0), если прямая $\xi = \xi_0$ — характеристическая для преобразованной системы в соответствующей точке (ξ_0, η_0).

Но (33) есть система линейных уравнений относительно производных $\partial u_j/\partial\xi$ на C; она имеет одно и только одно решение, если матрица $a_{ik}\xi_x + b_{ik}\xi_y$ неособая в рассматриваемой точке P, т. е. если определитель $Q = \| a_{ik}\xi_x + b_{ik}\xi_y \|$ отличен от нуля в P. Если это так, то кривая C называется нехарактеристической, или свободной, в P; в противном случае она называется *критической*, или *характеристической*, в P.

В гл. III мы основательно исследуем этот вопрос. Здесь мы только упомянем, что для начальных кривых, которые не являются характеристическими ни в одной точке, теорема Коши — Ковалевской и ее доказательство остаются без изменений.

Приведенные определения и формулировки легко обобщаются на любое число переменных, на квазилинейные и другие нелинейные системы и на системы высших порядков.

Следует добавить краткое замечание, относящееся к *характеристическим задачам Коши*.

Теорема Коши — Ковалевской для линейных уравнений обобщена на случай, когда начальное многообразие является характеристическим в каждой точке [1]). В этом случае начальные данные не могут быть заданы произвольным образом; они должны удовлетворять некоторым условиям, которые диктуются дифференциальным уравнением (см. гл. VI, § 3). Соответственно решение определяется не единственным образом, если только не наложены некоторые допол-

[1]) См. Адамар [2], стр. 77, Дафф [1] и Людвиг [1].

нительные условия вдоль многообразия, не касательного к начальному *многообразию; эта ситуация аналогична той, которая возникает* в случае системы линейных алгебраических уравнений с определителем, равным нулю.

Лере [1] рассмотрел случай, когда начальное многообразие является характеристическим вдоль некоторых кривых. Вообще говоря, решение многозначно в окрестности начальной поверхности; степень ветвления решения определяется геометрической природой соответствующих характеристических поверхностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ I К ГЛАВЕ I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА ДЛЯ ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Нелинейное дифференциальное уравнение минимальной поверхности $u(x, y)$ в § 6, п. 3 было преобразовано в линейное уравнение с помощью преобразования Лежандра. Несколько другая однородная форма преобразования Лежандра переводит уравнение минимальных поверхностей в уравнение Лапласа для некоторой (так называемой опорной) функции трех переменных. А именно, сначала мы напишем уравнение минимальной поверхности M (ср. т. I, стр. 170):

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}=0$$

в виде

$$\alpha_x+\beta_y=0,$$

где α, β и $\gamma=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$ — направляющие косинусы нормали к M. Мы ограничимся рассмотрением такой части поверхности M, в которой две нормали в различных точках не могут иметь одинаковых направляющих косинусов α, β. Приняв α, β за независимые переменные и считая x, y, u функциями от них, мы можем переписать уравнение в эквивалентной форме

$$x_\alpha+y_\beta=0. \tag{1}$$

Теперь вместо направляющих косинусов рассмотрим любой набор трех „однородных“ переменных α, β, γ на поверхности, пропорциональных направляющим косинусам нормали. Тогда касательная плоскость, ортогональная к вектору с компонентами α, β, γ, задается уравнением

$$x\alpha+y\beta+u\gamma=\varphi(\alpha, \beta, \gamma), \tag{2}$$

где „опорная функция“ $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ — однородная функция степени 1 относительно α, β, γ, которая при $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ определяет рас-

стояние от плоскости до начала координат. Поверхность надо рассматривать как огибающую ее касательных плоскостей, заданных уравнением (2). Координаты точки касания, соответствующей нормальному направлению с компонентами, пропорциональными α, β, γ, даются формулами

$$x=\varphi_\alpha, \quad y=\varphi_\beta, \quad u=\varphi_\gamma;$$

это „обратное преобразование Лежандра“ по отношению к

$$\alpha=f_x, \quad \beta=f_y, \quad \gamma=f_u,$$

где $f(x, y, u)=0$ — уравнение поверхности.

Применяя записанные выше соотношения и условие однородности, легко проверить, что уравнение минимальной поверхности $x_\alpha+y_\beta=0$ преобразуется в уравнение Лапласа

$$\varphi_{\alpha\alpha}+\varphi_{\beta\beta}+\varphi_{\gamma\gamma}=0$$

для опорной функции этой минимальной поверхности. (Другое изложение см. в гл. V, § 2.)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 К ГЛАВЕ I

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Эвристические соображения. В § 2 и 7 мы показали, что решение одного дифференциального уравнения высшего порядка может быть сведено к решению системы уравнений первого порядка, если на решения наложить дополнительные начальные условия. Поэтому целесообразно обратить особое внимание на теорию систем первого порядка.

Однако, вообще говоря, мы не можем рассчитывать, что существует полная эквивалентность между одним дифференциальным уравнением и системой. Из сказанного в § 2 видно, что система дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными в общем случае не может быть сведена к одному дифференциальному уравнению высшего порядка для одной функции с помощью дифференцирования и исключения переменных. Рассуждения из § 2 можно применить и к уравнениям с n независимыми переменными.

Конечно, эти соображения не дают окончательного доказательства невозможности исключения в общем случае. Действительно, система, полученная из данной системы с помощью дифференцирования, имеет очень специальный вид, так что, может быть, исключение и возможно в некоторых случаях. Поэтому в следующем пункте мы уста-

новим (по крайней мере, для одного частного случая) необходимые и достаточные условия, при которых система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению высшего порядка (см. также § 2).

2. Условия эквивалентности системы двух уравнений в частных производных первого порядка и дифференциального уравнения второго порядка. Пример системы Коши — Римана

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \tag{1}$$

показывает, что в частных случаях система дифференциальных уравнений может быть эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка для одной функции. Любое решение u системы (1) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$; для любой гармонической функции u можно найти сопряженную функцию v, такую, что u и v удовлетворяют системе (1).

Поставим далее общий вопрос: при каких условиях система

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) &= 0, \\ \Psi(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка $L[u] = 0$ для одной только функции u в том смысле, что *любое решение u системы* (2) *удовлетворяет уравнению $L[u] = 0$ и, наоборот, для любого решения u уравнения $L[u] = 0$ можно найти „сопряженную“ функцию v, такую, что u и v удовлетворяют системе* (2).

Сначала мы рассмотрим линейные дифференциальные уравнения, записанные в виде

$$\begin{aligned} v_x &= a(x, y)v + A(x, y, u, u_x, u_y), \\ v_y &= b(x, y)v + B(x, y, u, u_x, u_y). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь A и B — линейные функции от u, u_x, u_y, коэффициенты которых, так же как и функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, аналитичны по своим аргументам в окрестности начала координат. Кроме того, мы предположим, что коэффициент при u_x в B отличен от нуля.

Из § 7 следует, что если заданы аналитические начальные данные $u(0, y)$ и $v(0, y)$, то система (3) имеет *единственное аналитическое решение $u(x, y)$, $v(x, y)$* в окрестности начала координат. С другой стороны, мы могли бы произвольным образом задать $u(0, y) = \varphi(y)$ и $u_x(0, y) = \psi(y)$ вместо $u(0, y)$ и $v(0, y)$; *однако эти начальные условия не определяют решение системы u, v единственным образом.* Действительно, второе уравнение системы

(3) дает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для функции $v(0, y)$:

$$v_y(0, y) = b(0, y)\, v(0, y) + B(0, y, \varphi(y), \psi(y), \psi'(y)),$$

т. е. дает однопараметрическое семейство начальных значений $v(0, y)$, а следовательно, однопараметрическое семейство решений $v(x, y)$ системы (3).

Имея это в виду, мы докажем следующую теорему.

Система (3) *эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка для одной функции и тогда и только тогда, когда выполнено условие*[1])

$$a_y = b_x.$$

Чтобы доказать эту теорему, мы продифференцируем уравнения (3) по x и y и получим

$$(a_y - b_x)\, v = L[u], \tag{4}$$

где $L[u] = -[aB - bA + A_y - B_x]$ — дифференциальный оператор второго порядка относительно одной функции u. (Здесь символы A_y, B_x означают полные производные от A и B по y и x.)

Сначала предположим, что $a_y - b_x = 0$; тогда $L[u] = 0$, т. е. u удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$L[u] \equiv aB - bA + A_y - B_x = 0.$$

Чтобы найти функцию $v(x, y)$, сопряженную к u, мы подставим решение u уравнения $L[u] = 0$ в A и B в системе (3). Эта система имеет решение v, если выполнено условие совместности

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Производя необходимые дифференцирования и применяя условие $a_y = b_x$, мы получим неоднородное линейное уравнение первого порядка для $v(x, y)$, которое можно решить, если $a(x, y)$ и $b(x, y)$ не обращаются в нуль одновременно (см. § 5, п. 2). Таким образом, первая часть нашей теоремы доказана.

Предположим теперь, что $a_y - b_x \neq 0$ при $x = 0$ (а следовательно, и в окрестности оси y). Тогда из равенства (4) мы получаем выражение

$$v = \frac{L[u]}{a_y - b_x}, \tag{5}$$

которое однозначно определяет v для любого u.

---

[1]) Если система (3) эллиптическая и эквивалентность понимается в несколько более широком смысле, то можно показать, что всегда существует „эквивалентное“ уравнение второго порядка для одной только функции, и наоборот.

Но если бы все u, удовлетворяющие системе (3), удовлетворяли одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка, то функции u, а в силу равенства (5) также и v, однозначно определялись бы начальными данными $u(0, y)$ и $u_x(0, y)$; однако это противоречит результату, ранее полученному в этом пункте [1]).

Наконец, мы рассмотрим случай, когда система (2) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} v_x &= F(x, y, u, v, p, q), \\ v_y &= G(x, y, u, v, p, q), \end{aligned} \tag{6}$$

где F и G — аналитические функции своих аргументов и где, кроме того, $\partial G/\partial p \neq 0$. Вычисляя v_{xy} из обоих уравнений, мы получим

$$\begin{aligned} G_p u_{xx} + (G_p - F_q) u_{xy} - F_q u_{yy} + G_u p - F_u q + \\ + G_x - F_y + G_v F - F_v G = 0. \end{aligned}$$

Это равенство является уравнением второго порядка относительно функции u, если выражения

$$\frac{F_q}{G_p}, \quad \frac{G_q - F_p}{G_p}, \quad \frac{G_u p - F_u q + G_x - F_y + G_v F - F_v G}{G_p} \tag{7}$$

не зависят от v. Обратно, можно показать, что дифференциальное уравнение второго порядка для u, эквивалентное системе (6), существует тогда и только тогда, когда выражения (7) не зависят от v.

[1]) Заметим, что эта теорема справедлива также, если A и B не являются линейными функциями u, u_x, u_y. Если, кроме того, коэффициенты a и b также зависят от u, $u_x = p$, $u_y = q$, то вместо $a_y = b_x$ мы имеем следующие условия, при которых сведение к одному уравнению возможно:

$$a_q = b_p = 0, \quad a_p = b_q, \quad a_y + a_u q = b_x + b_u p.$$

Глава II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Чтобы строить решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью степенных рядов, требуется очень сильное ограничение: данные задачи должны быть аналитическими (см. гл. I, § 7, п. 4). Это исключает многие задачи, заслуживающие рассмотрения.

Однако для дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка можно построить более прямую и полную теорию интегрирования при очень слабых предположениях относительно непрерывности и дифференцируемости.

Главным результатом этой главы является установление *эквивалентности между дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка и некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений*[1]. Ключом к этой теории является *понятие характеристики*, которое будет играть решающую роль также для уравнений более высокого порядка.

Заметим, что здесь опять все встречающиеся производные будут предполагаться непрерывными, если специально не оговорено противное.

Следует снова подчеркнуть, что все утверждения и выводы надо понимать „в малом“, т. е. они касаются только некоторых окрестностей точек, причем, каких именно окрестностей — не всегда точно оговаривается[2]).

§ 1. Геометрическая теория квазилинейных дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными

1. Характеристические кривые. Мы вкратце напомним то, что было сказано о квазилинейных дифференциальных уравнениях в гл. I, § 5. Сначала мы рассмотрим уравнение с двумя независимыми переменными x, y:

$$au_x + bu_y = c, \tag{1}$$

[1]) См. также Каратеодори [1].

[2]) Одно исключение будет указано в приложении 2, касающемся теории законов сохранения.

где a, b, c — заданные функции от x, y, u, которые в рассматриваемой области непрерывны вместе со своими производными первого порядка и удовлетворяют условию $a^2+b^2 \neq 0$.

Это дифференциальное уравнение в частных производных можно геометрически истолковать следующим образом. Интегральная поверхность $u(x, y)$ этого уравнения в точке $P:(x, y, u)$ должна иметь касательную плоскость, компоненты нормали к которой $u_x = p$, $u_y = q$, -1 связаны линейным уравнением $ap+bq=c$. В силу этого уравнения касательные плоскости ко всем интегральным поверхностям, проходящим через точку (x, y, u), принадлежат пучку плоскостей, ось которого задается соотношениями

$$dx : dy : du = a : b : c \tag{2}$$

в точке P; эти пучки и их оси называются *пучками Монжа* и *осями Монжа*[1]).

Точка P вместе с направлением оси Монжа, проходящей через P, называется *характеристическим линейным элементом.*

Направления осей Монжа образуют поле направлений в пространстве x, y, u; интегральные кривые, соответствующие этому полю направлений, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2) и называются *характеристическими кривыми* нашего уравнения в частных производных. Если мы введем параметр s, изменяющийся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения примут вид

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{du}{ds} = c. \tag{2'}$$

Проекции характеристических кривых на плоскость x, y называются „проекциями характеристик“.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение в частных производных (1) — это значит найти такие поверхности, касательные плоскости к которым в каждой точке входят в соответствующий пучок Монжа, или, другими словами, поверхности, которые в каждой точке касаются оси Монжа. Таким образом, мы видим, что *любая поверхность $u(x, y)$, составленная из однопараметрического семейства характеристических кривых, есть интегральная поверхность уравнения в частных производных.* Обратно, *любая интегральная поверхность $u(x, y)$ порождается некоторым однопараметрическим семейством характеристических кривых.*

Последнее утверждение легко проверить. На любой интегральной поверхности $u(x, y)$ дифференциального уравнения (1) можно задать одно-

---

[1]) Ср. стр. 35.

параметрическое семейство кривых $x=x(s)$, $y=y(s)$, $u=u(x(s), y(s))$ с помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds}=a, \quad \frac{dy}{ds}=b,$$

где вместо u в a и b надо поставить функцию $u(x, y)$.

Вдоль такой кривой дифференциальное уравнение (1) равносильно утверждению, что $du/ds=c$. Таким образом, наше однопараметрическое семейство удовлетворяет соотношениям (2′) и, следовательно, состоит из характеристических кривых. Заметим, что параметр s явно не входит в дифференциальные уравнения, так что если заменить s на $s+\text{const}$, то мы получим те же самые интегральные кривые. В этом смысле можно считать, что произвольная аддитивная постоянная, входящая в параметр, не является существенной.

Так как решения системы дифференциальных уравнений (2′) однозначно определяются начальными значениями x, y, u при $s=0$, мы получаем следующую теорему.

Любая характеристическая кривая, имеющая общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой интегральной поверхности. Кроме того, *любая интегральная поверхность порождается однопараметрическим семейством характеристических кривых.*

2. Задача Коши. Мы получаем все многообразие решений дифференциального уравнения в частных производных, исходя из *задачи Коши*. Определим пространственную кривую C, задав x, y, u как функции параметра t, такие, что $x_t^2+y_t^2\neq 0$ и C имеет простую[1]) проекцию C_0 на плоскость x, y. В окрестности проекции C_0 мы теперь будем искать интегральную поверхность $u(x, y)$, проходящую через кривую C, т. е. решение уравнения (1), для которого $u(t)=u(x(t), y(t))$ тождественно по t. Данные задачи, т. е. коэффициенты дифференциального уравнения и начальные функции $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ должны быть только непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой области; они не обязательно должны быть аналитическими.

Чтобы решить задачу Коши, мы через каждую точку кривой C проведем характеристику, т. е. интегральную кривую системы дифференциальных уравнений (2′); это можно сделать, причем единственным образом, в некоторой окрестности. Мы получим семейство характеристических кривых

$$x=x(s, t), \quad y=y(s, t), \quad u=u(s, t),$$

зависящее от параметра t.

[1]) Если бы проекция C_0 кривой C на плоскость x, y, или сама кривая C имели двойные точки, то мы пришли бы к интегральным поверхностям с самопересечениями.

Если из первых двух уравнений мы можем выразить s и t через x и y, то эти кривые порождают поверхность $u(x, y)$. Для этого достаточно, чтобы на кривой C не обращался в нуль якобиан

$$\Delta = x_s y_t - y_s x_t = a y_t - b x_t. \tag{3}$$

(Здесь мы пользуемся хорошо известной теоремой из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, согласно которой x, y, u являются непрерывно дифференцируемыми функциями s и t.)[1])

Если на C выполняется условие $\Delta \neq 0$, то u является функцией x и y; третье дифференциальное уравнение $\frac{du}{ds} = c$ тогда эквивалентно заданному дифференциальному уравнению в частных производных, так как $\frac{du}{ds} = au_x + bu_y$. *Таким образом, задача Коши для начальной кривой C решена.* Единственность решения сразу следует из теоремы п. 1, которая утверждает, что характеристическая кривая, имеющая одну общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности. Это значит, что любое решение, проходящее через C, целиком содержит однопараметрическое семейство характеристик, проходящих через C, и, следовательно, совпадает с u.

Условие, что $\Delta \neq 0$ на C, допускает следующую геометрическую интерпретацию. В любой точке кривой C касательное и характеристическое направления должны иметь различные проекции на плоскость x, y.

Если задача Коши имеет решение и всюду на кривой C выполняется исключительное равенство $\Delta = 0$, то сама кривая C является характеристической[2]), так как в этом случае параметр t на кривой можно выбрать так, что вдоль этой кривой $a = dx/dt$, $b = dy/dt$. Далее, из дифференциального уравнения вытекает, что $c = du/dt$; следовательно, C действительно является характеристической кривой. Но если C — характеристическая кривая, то через нее проходит не только одна, а бесконечно много интегральных поверхностей. Рассмотрим другую кривую C', которая проходит через произвольную точку кривой C и для которой якобиан Δ не обращается в нуль; тогда интегральная поверхность, проходящая через C', обязательно содержит характеристику C. Таким образом, множество решений задачи Коши для кривой C определяется множеством кривых C'. Все интегральные поверхности, проходящие через кривые этого множества, содержат кривую C. Следовательно, характеристические кривые являются линиями пересечения интегральных поверхностей — *линиями*

---

[1]) Аналогичные теоремы с доказательствами см. в гл. V, § 6.

[2]) Случай, когда Δ обращается в нуль в изолированных точках и на других собственных подмножествах C, здесь не рассматривается. См. Лере [1].

ветвления, — тогда как через нехарактеристическую кривую не может проходить более одной интегральной поверхности.

Следующая теорема резюмирует предыдущие результаты.

Если $\Delta \neq 0$ всюду на начальной кривой C, то задача Коши имеет одно и только одно решение[1]).

Если же $\Delta = 0$ всюду на C, то задача Коши неразрешима, когда C не является характеристической; в противном случае задача имеет бесконечно много решений.

Заметим, что решениями задачи Коши являются только те решения уравнения (1), которые проходят через C и которые в некоторой окрестности C, а следовательно, и на кривой C, непрерывно дифференцируемы. Без предположения о непрерывной дифференцируемости функции u вдоль C мы не можем из равенства $\Delta = 0$ сделать вывод, что C — характеристическая кривая. Действительно, могут быть решения дифференциального уравнения, которые проходят через нехарактеристическую кривую C и для которых $\Delta = 0$. Однако производные функции u на C тогда уже не могут быть непрерывными. В таких случаях C может быть *ребром возврата* (огибающей характеристических кривых) *интегральной поверхности* $u(x, y)$; во всяком случае, проекция C_0 кривой C есть огибающая проекций характеристических кривых. В окрестности кривой C функция u уже не может быть задана как однозначная функция x и y.

3. Примеры.

1) Чтобы проиллюстрировать наши результаты, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$uu_x + u_y = 1 \tag{4}$$

(частный случай примера 5 в гл. I, § 1). Соответствующие дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 1; \tag{5}$$

---

[1]) Несколько громоздкая формулировка теоремы существования, где перечислены все предположения, такова: пусть G_0 — область плоскости x, y, G — область пространства x, y, u, полученная из G_0 добавлением координаты u, причем $|u| < U$. Пусть a, b, c — непрерывно дифференцируемые функции от x, y, u в G, а $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции t для $|t| < T$, определяющие кривую C в G с простой проекцией C_0 в G_0, и такие, что $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$. Предположим, что $\Delta \equiv ay_t - bx_t \neq 0$ на C. Тогда существует подобласть G_0' области G_0, содержащая C_0, в которой определена непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $au_x + bu_y = c$ в G_0 и начальным условиям $u(x(t), y(t)) = u(t)$ на C_0. Эта функция определяется единственным образом.

их решение

$$x = x_0 + u_0 s + \frac{s^2}{2},$$
$$y = y_0 + s,$$
$$u = u_0 + s,$$

где x_0, y_0, u_0 — произвольные постоянные интегрирования. В частности, семейство характеристических кривых, пересекающих заданную начальную кривую C:

$$x_0 = \varphi(t), \quad y_0 = \psi(t), \quad u_0 = \chi(t),$$

задается формулами

$$\begin{aligned} x(s, t) &= \varphi(t) + s\chi(t) + \frac{s^2}{2}, \\ y(s, t) &= \psi(t) + s, \\ u(s, t) &= \chi(t) + s. \end{aligned} \tag{6}$$

Определитель

$$\Delta(s, t) = x_s y_t - x_t y_s = s(\psi_t - \chi_t) + \chi\psi_t - \varphi_t$$

на кривой C принимает значение

$$\Delta = \Delta(0, t) = \chi\psi_t - \varphi_t. \tag{7}$$

Если этот определитель Δ не обращается в нуль на C, то из уравнений (6) можно исключить параметры s и t и выразить u как функцию x и y. Действительно, из уравнений (6) следует, что

$$u = y + \chi(t) - \psi(t),$$
$$x = \varphi(t) + \chi(t)(y - \psi(t)) + \frac{(y - \psi(t))^2}{2};$$

из второго уравнения можно получить t как функцию x и y, если выражение

$$D = \varphi_t - \chi\psi_t + (y - \psi(t))(\chi_t - \psi_t)$$

отлично от нуля. Когда мы приближаемся к кривой C, мы имеем $y - \psi(t) \to 0$; так как $\varphi_t - \chi\psi_t \neq 0$, существует такая окрестность кривой C, что в ней $D \neq 0$ и, следовательно, $t = t(x, y)$ и $u = u(x, y)$.

Если в качестве C мы возьмем *характеристику*

$$x_0 = \frac{1}{2}t^2, \quad y_0 = t, \quad u_0 = t, \tag{8}$$

то уравнения (6) перейдут в уравнения

$$x = \frac{1}{2}(s + t)^2, \quad y = s + t, \quad u = s + t$$

(т. е. снова получится выражение для той же самой дуги C); это не дает выражения для решения уравнения (4). Чтобы решить задачу Коши для такой кривой C, мы заметим, что решение уравнения (4) неявно задается уравнением

$$x = \frac{1}{2} u^2 + w(u - y) \tag{9}$$

с произвольной функцией w. Если мы выберем w так, что $w(0) = 0$, и так, что функцию u можно однозначно определить из уравнения (9), то все соответствующие интегральные поверхности $u = u(x, y)$ будут проходить через кривую C.

Наконец, пусть C — нехарактеристическая кривая

$$x_0 = t^2, \quad y_0 = 2t, \quad u_0 = t. \tag{10}$$

Система (6) переходит в систему

$$x = \frac{s^2}{2} + st + t^2, \quad y = s + 2t, \quad u = s + t. \tag{11}$$

Определитель $\Delta(s, t) = s$ обращается в нуль при $s = 0$, хотя C не характеристика. Исключая s и t, мы получим

$$u(x, y) = \frac{y}{2} \pm \sqrt{x - \frac{y^2}{4}}, \tag{12}$$

т. е. две поверхности, проходящие через C и удовлетворяющие уравнению (4) при $x > y^2/4$. Формулы (12) не дают решения задачи Коши, так как производные u_x и u_y неограничены при приближении к C.

Кривая C не является ребром возврата поверхности $u = u(x, y)$; однако, она является особой кривой на поверхности в том смысле, что в окрестности проекции C на плоскость x, y функция u неоднозначна.

2) В случае *линейного дифференциального уравнения* (1), когда функции a, b, c не зависят явно от u, обращение Δ в нуль вдоль нехарактеристической кривой означает, как мы увидим, что многообразие, определяемое системой уравнений

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad u = u(s, t),$$

есть цилиндрическая поверхность, перпендикулярная плоскости x, y. Если мы предположим, что

$$y_s u_t - u_s y_t \neq 0$$

на C, то x можно выразить как функцию y и u. Мы покажем, что $x = f(y, u)$ не зависит от u.

Сначала мы замечаем, что для линейных дифференциальных уравнений соотношение

$$\Delta_s = (a_x + b_y)\Delta$$

для определителя Δ следует из (2′), так что Δ обращается в нуль всюду, если он равен нулю на C. Далее, из соотношений

$$x_s = f_y y_s + f_u u_s,$$
$$x_t = f_y y_t + f_u u_t$$

непосредственно вытекает, что

$$\Delta = f_u (u_s y_t - u_t y_s);$$

следовательно,

$$f_u = 0, \quad \text{т. е.} \quad x = f(y).$$

§ 2. Квазилинейные дифференциальные уравнения с n независимыми переменными

Для n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $n > 2$ в теории нет никаких существенных изменений; однако здесь мы должны рассматривать не только одномерные характеристические кривые и n-мерные интегральные поверхности, но также и $(n-1)$-мерные характеристические многообразия C. Интегральную поверхность можно построить либо из $(n-1)$-параметрического семейства характеристических кривых, либо из однопараметрического семейства $(n-1)$-мерных характеристических многообразий, каждое из которых в свою очередь порождается $(n-2)$-параметрическим семейством характеристических кривых[1]).

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a, \tag{1}$$

где коэффициенты a_i и a — заданные функции переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, u$, имеющие непрерывные производные и такие, что $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$. Геометрически уравнение (1) означает, что в каждой точке пространства x, u на поверхности $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ „характеристическое направление“ $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : du = a_1 : a_2 : \ldots : a_n : a$ является касательным к поверхности. Так же, как в случае двух независимых переменных, мы пользуемся следующим определением характеристических кривых: n-параметрическое семейство кривых в пространстве x, u, заданное системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i, \qquad \frac{du}{ds} = a \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

[1]) Можно также определить промежуточные $(n-2)$-мерные характеристические многообразия и т. д.; однако они не будут играть никакой роли в дальнейших рассуждениях.

называется *семейством характеристических кривых*, соответствующим дифференциальному уравнению; проекция характеристики в пространство x называется *проекцией характеристической кривой*.

Характеристические кривые в пространстве x, u определяются уравнениями (2) независимо от решения уравнения в частных производных (1)[1]).

Связь между характеристическими кривыми и интегральными поверхностями устанавливается следующей теоремой.

На любой интегральной поверхности $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *дифференциального уравнения в частных производных существует* $(n-1)$*-параметрическое семейство характеристических кривых, порождающее эту интегральную поверхность.* Обратно, *любая поверхность* $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *порожденная таким семейством, есть интегральная поверхность.* Более того, *если характеристическая кривая имеет общую точку с интегральной поверхностью, то она целиком лежит на этой поверхности.*

Чтобы доказать первое утверждение, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $dx_i/ds = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где в правые части вместо u подставлено решение $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Эта система на интегральной поверхности определяет $(n-1)$-параметрическое семейство кривых, порождающее эту поверхность. Вдоль каждой кривой этого семейства u является функцией параметра s на кривой, и мы получаем

$$\frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}.$$

Следовательно, так как u удовлетворяет дифференциальному уравнению, мы имеем $du/ds = a$. Поэтому такая кривая является характеристической. Так же как в § 1, второе утверждение непосредственно следует из определения характеристических кривых, а третье — из единственности характеристической кривой, проходящей через данную точку.

---

[1]) То, что система $n+1$ характеристических уравнений (2) определяет только n-параметрическое семейство кривых, объясняется присутствием несущественной аддитивной постоянной интегрирования параметра s (s не входит явно в (2)).

Особо отметим, что в частном случае линейного уравнения, т. е. в случае, когда a_i не зависят явно от u, уже дифференциальные уравнения $\frac{dx_i}{ds} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ составляют определенную систему, задающую в пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n-1)$-параметрическое семейство „проекций характеристик", тогда как в общем случае они образуют n-параметрическое семейство.

Теперь мы можем построить интегральную поверхность из характеристических кривых, определенных характеристической системой уравнений, решая следующую *задачу Коши*. Пусть в $(n+1)$-мерном пространстве x, u с помощью $(n-1)$ независимых параметров $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ задано $(n-1)$-мерное многообразие C:

$$x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad u = u(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n);$$

предположим, что ранг матрицы $(\partial x_i/\partial t_\nu)$ равен $n-1$. Пусть проекция C_0 этого многообразия в пространство x не имеет двойных точек, т. е. различным наборам $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ соответствуют различные точки на C_0. В окрестности C_0 мы ищем решение дифференциального уравнения $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, проходящее через C, т. е. такое, которое обращается в $u(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$, когда вместо x_i подставлены $x_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$.

Мы решаем эту задачу Коши следующим образом: для данного набора значений $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ мы находим решение характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2)

$$x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

которое при $s=0$ совпадает с заданными функциями от $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_{n-1}$. Эти решения являются непрерывно дифференцируемыми функциями не только s, но и $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Будем теперь считать, что величины $s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ выражены через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (с помощью уравнений $x_i = x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$), и подставим их в $u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$, так что u станет функцией переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Введение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в качестве новых независимых переменных несомненно возможно, если якобиан

$$\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(s, t_1, \ldots, t_{n-1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

не обращается в нуль на C, т. е. при $s=0$. В силу уравнений (2), элементы первой строки можно выразить на C с помощью соотношений $\partial x_i/\partial s = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$; здесь вместо x_i и u надо подставить заданные начальные функции переменных $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$.

Таким образом, якобиан (3) тождественно равен определителю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

В предположении, что $\Delta \neq 0$, из $u(s, t_1, \dots, t_{n-1})$ мы получаем функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Уравнение $du/ds = a$ для

$$u(s, t_1, \dots, t_{n-1})$$

переходит в уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a.$$

Следовательно, функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть решение дифференциального уравнения (1). *Таким образом, в предположении, что $\Delta \neq 0$, наша задача Коши имеет единственное решение.*

Такой способ решения задачи Коши не проходит в исключительном случае, когда $\Delta = 0$ всюду на C.

Возникает вопрос: какие нужны дополнительные условия, чтобы гарантировать существование решения задачи Коши в этом случае?

Заметим сначала, что предположение $\Delta = 0$ эквивалентно существованию $n-1$ однозначно определенных непрерывных функций $\lambda_i(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$, таких, что на C выполняются линейные соотношения

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}. \tag{4}$$

Действительно, это сразу следует из обращения в нуль определителя Δ и наличия ненулевого алгебраического дополнения хотя бы у одного элемента первой строки.

Чтобы сформулировать искомые необходимые условия, мы введем понятие $(n-1)$-*мерного характеристического многообразия*. Говоря геометрическим языком, каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ пространства x, u мы поставим в соответствие *характеристический вектор* $a_1, a_2, \dots, a_n, a$. *Многообразие C размерности $n-1$ называется характеристическим, если в каждой точке соответствующий характеристический вектор касается этого многообразия.*

Аналитически мы можем сформулировать это определение, представив многообразие C с помощью $n-1$ параметров $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$: C называется характеристическим многообразием дифференциального

уравнения в частных производных $\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a$, если существует $n-1$ функций $\lambda_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, таких, что на C выполняются соотношения

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

$$a = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu}, \tag{5'}$$

т. е. таких, что характеристический вектор линейно выражается через $n-1$ линейно независимых касательных векторов с компонентами $\partial x_i/\partial t_\nu$, $\partial u/\partial t_\nu$.

Для характеристического многообразия квазилинейного дифференциального уравнения справедливы следующие теоремы.

Любое характеристическое многообразие порождается $(n-2)$-параметрическим семейством характеристических кривых; обратно, любое такое семейство порождает характеристическое многообразие.

Если характеристическая кривая Γ имеет хотя бы одну общую точку с характеристическим многообразием C, то она целиком лежит в нем.

Чтобы доказать первую теорему, рассмотрим в пространстве параметров t_i $(n-2)$-параметрическое семейство кривых $t_i = t_i(s)$, определенное системой $(n-1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt_\nu}{ds} = \lambda_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}). \tag{6}$$

Функции $x_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ и $u(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ перейдут тогда в функции переменной s, задающие кривые на C, для которых справедливы соотношения

$$\frac{dx_i}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \lambda_\nu \quad \text{и} \quad \frac{du}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial t_\nu} \lambda_\nu.$$

В силу уравнений, определяющих характеристическое многообразие, мы получим $dx_i/ds = a_i$, $du/ds = a$, откуда следует, что наши кривые — характеристические; они образуют $(n-2)$-параметрическое семейство и, следовательно, порождают C. Обратное очевидно, так как многообразие, порожденное семейством характеристических кривых, в каждой точке касается характеристического вектора.

Вторая теорема непосредственно следует из того, что решения характеристических дифференциальных уравнений однозначно опре-

деляются начальными условиями, требующими, чтобы каждая характеристическая кривая содержала некоторую точку многообразия C. Как мы видели выше, существует характеристическая кривая, целиком лежащая в C, проходящая через эту точку C.

Теперь мы резюмируем основные результаты в следующей теореме.

Если $\Delta \neq 0$ на начальном многообразии C, то существует одно и только одно решение задачи Коши. Если же $\Delta = 0$ всюду на C, то задача Коши разрешима тогда и только тогда, когда C — характеристическое многообразие. В этом случае существует бесконечно много решений задачи Коши и C является многообразием ветвления, через которое различные решения можно гладко продолжать друг в друга.

Осталось доказать только ту часть теоремы, которая касается случая $\Delta = 0$. Из условия $\Delta = 0$ мы сделали заключение о существовании $n - 1$ непрерывно дифференцируемых функций λ от параметров $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, таких, что выполняются соотношения (5). Мы должны также установить недостающее соотношение (5′), которое следует из предположения,что интегральная поверхность $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ проходит через C. Действительно, для решения u на C мы имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}$$

и, следовательно, так как u удовлетворяет дифференциальному уравнению (1),

$$a = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu};$$

это как раз то соотношение, которое мы хотели доказать[1]).

Обратно, если C — характеристическое многообразие, то мы можем построить бесконечное множество решений u дифференциального уравнения в частных производных, содержащих многообразие C. Мы выбираем произвольное $(n-1)$-мерное многообразие C', пересекающееся с C по $(n-2)$-мерному многообразию S, такое, что для него всюду $\Delta \neq 0$. Тогда через C' проходит единственная интегральная поверхность J'. Но, согласно проведенному выше построению, J' содержит все характеристические кривые, проходящие через S, а следовательно, и многообразие C, порожденное ими. Этим завершается доказательство нашей основной теоремы.

[1]) Этот результат становится геометрически очевидным, если вспомнить, что характеристический вектор касается интегральной поверхности; так как, согласно (5), его проекция в пространство $x_1, x_2, \ldots, x_n$ касается проекции C в пространство $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то он сам касается C.

§ 3. Общие дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

1. Характеристические кривые и фокальные кривые. Конус Монжа. Рассмотрим общее дифференциальное уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \qquad (1)$$

где использованы сокращенные обозначения $u_x = p$, $u_y = q$.

Как обычно, мы предполагаем, что F — непрерывная функция, обладающая непрерывными первыми частными производными по всем пяти аргументам в рассматриваемой области. Кроме того, мы требуем, чтобы было

$$F_p^2 + F_q^2 \neq 0.$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (1) можно следующим образом истолковать геометрически (ср. гл. I, § 4): величины p, q, определяющие направление касательной плоскости к интегральной поверхности в пространстве x, y, u, удовлетворяют уравнению $F = 0$ в каждой точке $P:(x, y, u)$. Это уравнение уже не является линейным относительно p и q; следовательно, вообще говоря, возможные касательные плоскости образуют уже не пучок плоскостей, проходящих через прямую, а однопараметрическое семейство, огибающей которого является коническая поверхность с вершиной P, так называемый „конус Монжа“. (Не следует забывать, что наши рассуждения относятся к конической поверхности в малом, т. е. к достаточно малой части полости конуса. В целом конус Монжа может состоять из отдельных полостей[1].) Такой конус Монжа задается дифференциальным уравнением в каждой точке (x, y, u) рассматриваемой области пространства. Задача интегрирования этого уравнения состоит в отыскании поверхностей, которые в каждой точке касаются соответствующего конуса.

Мы можем представлять конусы Монжа также с помощью соотношения, задающего их образующие, а не с помощью соотношения $F = 0$, задающего их касательные плоскости. Чтобы сделать это аналитическим путем, мы сначала задаем конус Монжа $F = 0$ параметрически, считая p и q функциями параметра λ. Образующая конуса является тогда пределом линий пересечения касательных плоскостей, соответствующих значениям параметра λ и $\lambda + h$, при $h \to 0$. Если мы будем рассматривать координаты x, y, u вдоль фиксированной

[1]) В гл. V и VI мы проведем более подробное исследование конуса Монжа „в целом“. Рассуждения этого параграфа относятся только к достаточно малой области изменения p, q, т. е. к такой части полости конуса в пределах которой q может быть выражено как однозначная дифференцируемая функция от p.

образующей как функции расстояния σ от вершины конуса, то мы легко получим уравнения

$$\frac{du}{d\sigma} = p(\lambda)\frac{dx}{d\sigma} + q(\lambda)\frac{dy}{d\sigma}$$

и

$$0 = p'(\lambda)\frac{dx}{d\sigma} + q'(\lambda)\frac{dy}{d\sigma}.$$

Дифференцируя соотношение $F = 0$ по λ, мы находим

$$F_p p'(\lambda) + F_q q'(\lambda) = 0;$$

отсюда следует соотношение

$$dx : dy : du = F_p : F_q : (pF_p + qF_q), \tag{2}$$

которое выполняется на образующих конуса.

Мы можем считать, что это соотношение является представлением конуса Монжа, двойственным по отношению к представлению с помощью дифференциального уравнения (1).

Направления образующих конуса Монжа называются *характеристическими направлениями*. В то время как в случае квазилинейного уравнения каждой точке в пространстве соответствует только одно характеристическое направление, здесь мы в каждой точке имеем однопараметрическое семейство характеристических направлений. Пространственные кривые, имеющие в каждой точке характеристическое направление, называются *фокальными кривыми*, или *кривыми Монжа*. Условия (2) для фокальных кривых мы можем записать в виде

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q, \quad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q, \tag{3}$$

введя вдоль этих кривых соответствующий параметр s. Третье из этих дифференциальных уравнений называется *условием полосы*. Оно означает, что функции $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$, $p(s)$, $q(s)$ определяют не только пространственную кривую, но и плоскость, касающуюся ее в каждой точке. Конфигурация, состоящая из кривой и семейства касающихся ее плоскостей, называется *полосой*. Эта система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (3) и соотношение $F(x, y, u, p, q) = 0$ для пяти функций x, y, u, p, q аргумента s составляют *недоопределенную* систему. Каждое решение такой системы дает так называемую *фокальную полосу*[1]).

---

[1]) Четыре условия, которым удовлетворяет фокальная полоса, превращаются в определенную систему, если мы зададим дополнительное произвольное соотношение между x, y, u, т. е. если мы потребуем, чтобы фокальная кривая лежала на заранее заданной поверхности. (Однако полоса не обязательно должна быть касательной к поверхности.) Таким образом, становится ясно, что, вообще говоря, существует однопараметрическое семейство фокальных кривых на заданной поверхности.

В основе нашей теории лежит следующее рассуждение, которое позволяет выделить фокальные полосы, входящие в интегральные поверхности и называемые *характеристическими полосами*. На любой интегральной поверхности $u(x, y)$ должны лежать фокальные кривые, так как в каждой своей точке интегральная поверхность касается конуса Монжа и, следовательно, содержит характеристическое направление. Поле, образованное этими характеристическими направлениями, позволяет найти соответствующие фокальные кривые как интегральные кривые этого поля на интегральной поверхности. Требование, чтобы фокальная кривая включалась[1]) в интегральную поверхность $u(x, y)$, приводит к двум дополнительным обыкновенным дифференциальным уравнениям для величин p и q как функций s; это мы теперь и покажем.

Чтобы найти указанные дифференциальные уравнения для заданной интегральной поверхности $u = u(x, y)$, на которой величины p и q тоже можно рассматривать как заданные функции x и y, мы заметим, что дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q$$

определяют на поверхности однопараметрическое семейство кривых, вдоль которых выполняется соотношение

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds}$$

и, следовательно,

$$\frac{du}{ds} = pF_p + qF_q.$$

Таким образом, наши кривые образуют семейство кривых Монжа и порождают интегральную поверхность. Дифференцируя уравнение в частных производных сначала по x, а затем по y, мы получаем соотношения

$$F_p p_x + F_q q_x + F_u p + F_x = 0,$$
$$F_p p_y + F_q q_y + F_u q + F_y = 0,$$

которые являются тождествами на нашей поверхности. Так как $F_p = dx/ds$, $F_q = dy/ds$, $p_y = q_x$, то мы видим, что для кривых Монжа, заданных функциями параметра s, эти два уравнения переходят в соотношения

$$\frac{dp}{ds} + F_u p + F_x = 0, \quad \frac{dq}{ds} + F_u q + F_y = 0.$$

---

[1]) Здесь включение означает, что u есть однозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция x и y в окрестности проекции фокальной кривой на плоскость x, y.

Таким образом, если кривая Монжа включена в интегральную поверхность, то координаты x, y, u ее точек и величины p и q вдоль этой кривой удовлетворяют системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q, \quad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q,$$
$$\frac{dp}{ds} = -(pF_u + F_x), \quad \frac{dq}{ds} = -(qF_u + F_y). \tag{4}$$

Эта система называется *характеристической системой дифференциальных уравнений*, соответствующей уравнению (1).

Теперь мы будем проводить рассуждения в обратном порядке, оставляя без внимания тот факт, что эта система обыкновенных дифференциальных уравнений была получена при рассмотрении некоторой заданной интегральной поверхности; вместо этого мы воспользуемся этой системой как исходной, не обращаясь к решениям уравнения (1). Так как имеется несущественная аддитивная постоянная, входящая в параметр s, эта система определяет *четырехпараметрическое семейство кривых* $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$ вместе с соответствующими касательными плоскостями $p(s)$, $q(s)$, т. е. семейство полос.

Заметим, что *функция F является интегралом*[1]) *нашей характеристической системы дифференциальных уравнений*. Другими словами, вдоль любого решения этой системы F принимает постоянное значение. Действительно, для этого решения выполняется соотношение

$$\frac{dF}{ds} = F_p \frac{dp}{ds} + F_q \frac{dq}{ds} + F_u \frac{du}{ds} + F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds}$$

и, в силу характеристической системы дифференциальных уравнений, выражение, стоящее в правой части, тождественно по s равно нулю.

Теперь мы выделим из нашего четырехпараметрического семейства решений характеристической системы дифференциальных уравнений трехпараметрическое семейство, пользуясь тем условием, что вдоль этих решений функция F должна принимать значение нуль, как того требует исходное дифференциальное уравнение[2]). *Любое*

---

[1]) Термин „интеграл“ здесь не надо путать с „интегралом“ в смысле решения. Под интегралом $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы понимаем функцию независимых переменных x_i, которая принимает постоянное значение вдоль каждой кривой $x_i(s)$, удовлетворяющей системе

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

[2]) Без этого ограничения мы вынуждены были бы одновременно рассматривать целое семейство дифференциальных уравнений $F = \text{const}$.

решение характеристической системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее также уравнению $F=0$, мы будем называть „характеристической полосой"; пространственная кривая $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$, несущая эту полосу, называется характеристической кривой.

Как и для квазилинейных уравнений, из самого вывода характеристической системы уравнений можно получить следующие теоремы.

На любой интегральной поверхности существует однопараметрическое семейство характеристических кривых и соответствующих характеристических полос. Кроме того, *если характеристическая полоса имеет общий элемент (т. е. значения x, y, u, p, q) с интегральной поверхностью, то эта полоса целиком принадлежит интегральной поверхности*[1]).

2. Решение задачи Коши. Самым важным фактом теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка является эквивалентность задач интегрирования дифференциального уравнения с частными производными (1) и характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4). Другими словами, интегрирование дифференциального уравнения с частными производными первого порядка можно свести к интегрированию соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Чтобы доказать эту эквивалентность, мы построим интегральные поверхности с помощью характеристических полос (аналогичный метод применялся в § 1 и 2). Мы снова поставим *задачу Коши* для данного дифференциального уравнения с частными производными. Для нашей цели удобно поставить эту задачу в следующей форме. Пусть *начальная полоса* C_1 задана функциями $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $p(t)$, $q(t)$ параметра t, причем проекция C_0 кривой $C: x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ не имеет двойных точек. Кроме того, предположим, что

1) соотношение полосы

$$\frac{du}{dt}=p\frac{dx}{dt}+q\frac{dy}{dt}$$

и

2) соотношение $F=0$

выполняются тождественно по t.

Такая полоса C_1 называется *интегральной полосой.*

Задача Коши состоит в том, чтобы в окрестности C_0 найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую там рассматриваемому дифференциальному уравнению и принимающую вместе с функциями $p=u_x$

[1]) Снова подчеркнем, что не всякая фокальная кривая является характеристической и что множество фокальных кривых существенно шире, чем множество характеристик. См. § 3, п. 3.

и $q = u_y$ заданные начальные значения на C_0, т. е. содержащую начальную полосу C_1[1]).

Чтобы решить поставленную задачу Коши, мы через каждый элемент заданной начальной полосы проводим характеристическую полосу (заданную с помощью параметра s). Эта полоса получается как решение характеристических дифференциальных уравнений (4), которое при $s=0$ обращается в заданные элементы полосы $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $p(t)$, $q(t)$. Мы обозначим эту систему решений через

$$x(s, t),\ y(s, t),\ u(s, t),\ p(s, t),\ q(s, t).$$

Снова единственность таких решений и их непрерывная дифференцируемость по s и по параметру t гарантируются хорошо известными теоремами из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если выражение

$$\Delta = F_p y_t - F_q x_t = x_s y_t - x_t y_s \tag{5}$$

отлично от нуля на начальной полосе, а следовательно, и в некоторой ее s, t-окрестности, то мы можем считать x и y независимыми переменными в этой окрестности вместо параметров s, t. Это значит, что мы можем выразить величины u, p, q как функции от x и y; в частности, мы получаем поверхность $u(x, y)$. Мы утверждаем, что на этой поверхности $p=u_x$, $q=u_y$, что она является интегральной поверхностью и, таким образом, решает нашу задачу Коши.

Последнее очевидно, если только установлены соотношения $p=u_x$, $q=u_y$. Действительно, так как F является интегралом системы уравнений (4), выражение $F(x, y, u, p, q)$, несомненно, обращается в нуль тождественно по s и t на нашей поверхности (в силу второго из начальных условий); следовательно, оно также обращается в нуль тождественно по x и y.

Чтобы проверить соотношения $p=u_x$, $q=u_y$, нам достаточно показать, что два выражения

$$\begin{aligned} U &= u_t - p x_t - q y_t, \\ V &= u_s - p x_s - q y_s \end{aligned} \tag{6}$$

тождественно обращаются в нуль на нашей поверхности; тогда из соотношений

$$\begin{aligned} 0 &= u_t - u_x x_t - u_y y_t, \\ 0 &= u_s - u_x x_s - u_y y_s \end{aligned} \tag{7}$$

[1]) При постановке такой задачи можно было бы сначала считать заданной только начальную кривую C, а величины p и q определить из соотношения полосы и из уравнения $F=0$; однако выбранная здесь форма постановки задачи Коши лучше, так как в ней отсутствуют несущественные ссылки на возможную многозначность решений уравнений, определяющих p и q вдоль C.

следует, что $p = u_x$, $q = u_y$, так как определитель $\Delta = x_t y_s - x_s y_t$ этой системы линейных уравнений относительно u_x, u_y по предположению отличен от нуля.

Обращение в нуль величины V непосредственно следует из характеристических дифференциальных уравнений. Чтобы доказать, что U обращается в нуль, мы будем рассматривать U и V как функции от s и t. Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial t} = -(p_s x_t - p_t x_s + q_s y_t - q_t y_s)$$

и воспользуемся характеристическими дифференциальными уравнениями (4), а также тем, что из тождественного обращения в нуль функции V следует равенство $\partial V/\partial t = 0$. Мы получим

$$\frac{\partial U}{\partial s} = p_t F_p + q_t F_q + (p x_t + q y_t) F_u + F_x x_t + F_y y_t.$$

С другой стороны, дифференцируя по t соотношение $F = 0$, которое выполняется тождественно по s и t, имеем

$$p_t F_p + q_t F_q + u_t F_u + x_t F_x + y_t F_y = 0;$$

отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -F_u U. \tag{8}$$

При фиксированном t это уравнение является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением относительно U как функции s. Так как по предположению U обращается в нуль при $s = 0$, из единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения при заданном начальном условии $U(0)$[1]) следует, что величина U обращается в нуль при всех значениях s. Это как раз то, что мы хотели доказать. Построенная интегральная поверхность единственна, так как решения обыкновенных дифференциальных уравнений (в данном случае характеристических уравнений) однозначно определяются начальными условиями.

Мы следующим образом резюмируем полученный результат. *Пусть дана пространственная кривая* C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$, *которую можно дополнить функциями* $p(t)$, $q(t)$

---

[1]) То есть из соотношения

$$U(s) = U(0)\, e^{-\int\limits_0^s F_u\, ds}.$$

до начальной полосы C_1: x, y, u, p, q, где C_1 удовлетворяет соотношению полосы и уравнению $F=0$; если вдоль этой полосы $\Delta = F_p y_t - F_q x_t \neq 0$, то в окрестности полосы C_1 существует одна и только одна интегральная поверхность $u(x, y)$, проходящая через эту полосу.

3. Характеристические кривые как элементы ветвлечия. Дополнительные замечания. Интегральный коноид. Каустики. Теперь мы должны разъяснить значение исключительного случая $\Delta = 0$. Если $F_p y_t - F_q x_t = 0$ всюду вдоль полосы C_1 на некоторой интегральной поверхности, то, согласно рассуждению на стр. 87, полоса C_1 должна быть характеристической полосой на этой поверхности. Следовательно, в исключительном случае, когда $\Delta = 0$, интегральная поверхность может проходить через C, только если C является характеристикой, т. е. если функции p и q, определенные условиями 1) и 2), дополняют эту кривую до характеристической полосы. Но если это условие выполнено, то существует не одна, а бесконечно много интегральных поверхностей, касающихся друг друга на начальной полосе. Рассмотрим кривую C', которая пересекает C и которую можно дополнить до начальной полосы так, что эта начальная полоса будет касаться полосы, соответствующей C, в общей точке. Тогда задача Коши с начальной кривой C' даст интегральную поверхность, содержащую всю характеристическую полосу, соответствующую кривой C, так как эта интегральная поверхность имеет общий элемент с этой характеристической полосой.

Таким образом, характеристики на интегральной поверхности — это такие кривые, вдоль которых различные интегральные поверхности пересекаются, касаясь друг друга. Поэтому эти кривые (или полосы) можно рассматривать как *элементы ветвления интегральных поверхностей*. Пересекая одну из этих кривых, можно без нарушения непрерывности первых производных функции u перейти на другую поверхность из семейства интегральных поверхностей, вместо того чтобы продолжить движение по первоначальной поверхности.

Итак, при решении задачи Коши могут встретиться два случая: *Если $\Delta \neq 0$ на начальной полосе C_1, то задача Коши имеет единственное решение. Если же $\Delta = 0$ вдоль C_1, то задача Коши имеет решение только тогда, когда полоса C_1 является характеристической; в этом случае существует бесконечно много решений.*

Последнее замечание, касающееся случая, когда $\Delta = 0$: если начальная полоса C_1 не является характеристической, то она просто является фокальной полосой, и не существует решения задачи Коши, проходящего через C_1, т. е. *не существует интегральной поверх-*

ности, содержащей эту начальную полосу и обладающей в ее окрестности непрерывными производными вплоть до второго порядка. Однако возможно, что существует интегральная поверхность, для которой фокальная кривая C_1 является сингулярной кривой. Действительно, если мы построим характеристические полосы, проходящие через каждый элемент (x, y, u, p, q) полосы C_1, взятый в качестве начального условия, и если не все они совпадают (как это было бы в случае, когда полоса C_1 — характеристическая), то эти полосы могут образовывать интегральную поверхность.

На таких интегральных поверхностях кривая C обязательно должна быть сингулярной и, как правило, оказывается огибающей характеристических кривых, порождающих поверхность. Мы можем рассчитывать, что она будет *ребром возврата интегральной поверхности* или, по крайней мере, что в окрестности проекции C на плоскость x, y переменная u не может быть определена как однозначная функция x и y. Мы проиллюстрируем эти возможности примерами (см. § 6 и пример, рассмотренный в связи с квазилинейными дифференциальными уравнениями в § 1). В теории распространения света *характеристические кривые* соответствуют *световым лучам*; поэтому *каустические кривые* этих лучей являются *фокальными кривыми* (что определяет терминологию).

Особый интерес представляет частный предельный случай задачи Коши, когда начальная кривая вырождается в точку. Те же рассуждения, что и выше, приводят к следующему результату. *Все характеристические кривые, проходящие через фиксированную точку P пространства x, y, u, образуют интегральную поверхность.* Эта интегральная поверхность (которая может состоять из нескольких полостей) имеет коническую особенность в точке P (причем конус Монжа является касательным конусом) и называется *интегральным коноидом дифференциального уравнения с частными производными в точке P.* Как мы увидим дальше, он играет роль *светового конуса* в теории распространения света.

Следующее замечание, применимое также в случае n независимых переменных, указывает на существенное различие между квазилинейными уравнениями и общими нелинейными уравнениями. Чтобы построить решение в случае линейного и квазилинейного уравнения, достаточно рассматривать характеристические кривые, образующие двухпараметрическое (или, может быть, n-параметрическое) семейство. В общем случае мы вынуждены рассматривать целую характеристическую полосу, чтобы включить величины p и q, определяющие направление касательной плоскости. Кривая в пространстве x, y, u, несущая эту полосу, есть характеристическая кривая. Но эти полосы образуют трехпараметрическое (или $(2n-1)$-параметрическое) семейство; то же самое, вообще говоря, справедливо относительно соответствующих характеристических кривых.

§ 4. Полный интеграл

В гл. I, § 4 полный интеграл u дифференциального уравнения $F=0$, зависящий от двух параметров a и b,

$$u=\varphi(x, y, a, b),$$

использовался для построения решения, содержащего произвольную функцию $w(a)$. Построение состояло в том, что рассматривалась огибающая; мы полагали $b=w(a)$ и исключали a из двух уравнений

$$u=\varphi(x, y, a, w(a)),$$
$$0=\varphi_a+\varphi_b w'(a).$$

Для фиксированного значения a эти уравнения дают линию касания интегральной поверхности $u=\varphi(x, y, a, w(a))$ с огибающей. Так как функцию $w(a)$ можно выбрать так, чтобы для некоторого a она принимала произвольное значение b, а ее производная $w'(a)$ имела произвольное значение c, то два уравнения

$$u=\varphi(x, y, a, b), \tag{1}$$
$$0=\varphi_a+c\varphi_b \tag{1'}$$

дают семейство кривых (зависящих от трех параметров a, b, c), которые являются линиями касания при образовании огибающих [1]).

Теперь мы покажем, что *кривые, заданные уравнениями* (1), (1'), *являются характеристическими кривыми нашего дифференциального уравнения*. Соответствующие полосы, получаемые с помощью формул $p=\varphi_x(x, y, a, b)$, $q=\varphi_y(x, y, a, b)$, тогда автоматически будут характеристическими.

Доказательство интуитивно ясно из того, что вдоль наших кривых две различные интегральные поверхности касаются друг друга, а это, как мы видели в § 3, возможно только вдоль характеристической полосы.

Мы легко можем проверить это утверждение прямыми вычислениями. Рассмотрим x вместо s в качестве независимой переменной на нашей кривой; из уравнения (1') с помощью дифференцирования по x получим

$$\varphi_{ax}+c\varphi_{bx}=-y_x(\varphi_{ay}+c\varphi_{by}). \tag{2}$$

Эта величина не может обращаться в нуль, так как по определению $\varphi_{ax}\varphi_{by}-\varphi_{ay}\varphi_{bx}\neq 0$. Дифференцируя дифференциальное уравнение

[1]) Конечно, все эти утверждения относятся к достаточно малым областям изменения параметров.

$F=0$ с $u=\varphi(x, y, a, b)$ сначала по a, а потом по b, мы получим уравнения

$$
\begin{aligned}
F_u\varphi_a+F_p\varphi_{ax}+F_q\varphi_{ay}&=0,\\
F_u\varphi_b+F_p\varphi_{bx}+F_q\varphi_{by}&=0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Умножая второе уравнение на c, складывая с первым и учитывая (1′) и (2), мы получаем $F_p y_x - F_q = 0$. Согласно § 3, п. 1, (3), если $F_p \neq 0$, то это выражает тот факт, что наши кривые являются характеристическими. Для наших выводов очень существенным является предположение, что

$$F_p^2+F_q^2 \neq 0$$

в рассматриваемой области.

Отсюда следует, что всякий полный интеграл дифференциального уравнения с частными производными дает трехпараметрическое семейство характеристических кривых и полос. (Выбор x в качестве независимого переменного вместо симметричного представления через параметр s не приводит ни к каким существенным трудностям.)

Таким образом, мы обратили рассуждения из § 3, т. е. *мы получили решения характеристических дифференциальных уравнений из полного интеграла дифференциального уравнения с частными производными*. Тот же путь будет снова использован ниже в § 7.

Таким образом мы, вообще говоря, получаем все характеристики и соответственно решения дифференциального уравнения с частными производными. Это становится очевидным, если мы предположим, что в каждой точке любой интегральной поверхности, на которой $F_p^2+F_q^2 \neq 0$, мы можем задать решение из семейства $u=\varphi(x, y, a, b)$, касающееся нашей поверхности в этой точке.

Целесообразно сделать последнее замечание, касающееся роли особого решения. Согласно гл. I, § 4, п. 3, это решение получается как огибающая двухпараметрического семейства $u=\varphi(x, y, a, b)$, или, если не обращаться к полному интегралу, с помощью исключения p и q из уравнений

$$F=0,\ F_p=0,\ F_q=0.$$

Для особого решения не справедливы никакие рассуждения этого параграфа, так как мы все время предполагали, что на наших интегральных поверхностях выполняется условие $F_p^2+F_q^2 \neq 0$.

Исключительная природа особого решения становится ясной также из того, что характеристическое начальное условие

$$\Delta \equiv F_p y_t - F_q x_t = 0$$

выполняется тождественно, независимо от того, как выбрана начальная кривая. Любая полоса на особом решении является в этом смысле характеристической.

§ 5. Фокальные кривые и уравнение Монжа

В § 3, п. 1 фокальные кривые задавались системой дифференциальных уравнений (3), где величины p и q подчинялись дополнительному условию $F(x, y, u, p, q)=0$. Если мы предположим, что $F_p \neq 0$, и введем x вместо s в качестве независимой переменной вдоль кривых, то будут иметь место следующие три уравнения

$$F=0, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{F_q}{F_p}, \quad \frac{du}{dx}=\frac{pF_p+qF_q}{F_p}. \tag{1}$$

Исключая p и q из этих уравнений, приходим к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$M\left(x, y, u, \frac{dy}{dx}, \frac{du}{dx}\right)=0 \tag{2}$$

с двумя неизвестными функциями y и u. Это уравнение называется *дифференциальным уравнением Монжа*. Это простой пример недоопределенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений; это уравнение представляет собой условие на направление образующих конуса Монжа, в то время как исходное дифференциальное уравнение в частных производных $F=0$ является соотношением, которому удовлетворяют касательные плоскости конуса Монжа. В терминах параметра s (а не x) уравнение этого конуса имеет вид

$$M\left(x, y, u, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{du}{ds}\right)=0, \tag{2'}$$

где функция M однородна относительно последних трех аргументов.

Обратно, если дано уравнение Монжа $M(x, y, u, y', u')=0$, то мы можем построить соответствующее дифференциальное уравнение в частных производных, исключив величины y' и u' из уравнения $M=0$ и из двух уравнений, определяющих касательную плоскость, содержащую линейный элемент dx, dy, du:

$$q=-\frac{M_{y'}}{M_{u'}}, \quad p=\frac{y'M_{y'}+u'M_{u'}}{M_{u'}}.$$

В результате мы получаем уравнение $F(x, y, u, p, q)=0$ (переход к представлению конуса Монжа через касательные плоскости). Таким образом, уравнение Монжа (т. е. обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с двумя неизвестными функциями) и дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка для функции двух независимых переменных описывают одну и ту же

геометрическую конфигурацию, а именно конус с вершиной в точке (x, y, u). Уравнения $F=0$ и $M=0$ двойственны друг другу в смысле проективной геометрии.

Решения уравнения Монжа — фокальные кривые — это кривые, которые в каждой точке касаются некоторой характеристической кривой. Из рассмотрений, проведенных в § 3, п. 3, мы можем вывести, что эти фокальные кривые (за исключением самих характеристических кривых) получаются как огибающие характеристических кривых на интегральной поверхности дифференциального уравнения $F=0$ (если такие огибающие существуют).

Это приводит к замечательной теории решения произвольных уравнений Монжа. На первый взгляд нахождение функций u и y из уравнения Монжа требует наложения некоторого произвольного условия $W(x, y, u)=0$ и последующего интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, полученного исключением u или y; отсюда следовало бы, что таких процессов интегрирования существует бесконечно много.

С помощью такого метода не получается никакого общего представления для всех решений уравнения Монжа (2) через произвольную функцию. Однако с помощью полного интеграла можно дать явное решение уравнения Монжа, зависящее от произвольной функции и не требующее дальнейшего интегрирования. Мы получим это „явное" решение, предполагая, что известен полный интеграл $u=\varphi(x, y, a, b)$ дифференциального уравнения с частными производными, эквивалентного уравнению Монжа.

К двум уравнениям

$$\begin{aligned} &u=\varphi(x, y, a, w(a)), \\ &0=\varphi_a(x, y, a, w(a))+\varphi_b(x, y, a, w(a))\,w'(a), \end{aligned} \tag{3}$$

определяющим семейство характеристических кривых, зависящих от параметра a на интегральной поверхности (ср. стр. 93), мы должны добавить третье уравнение

$$\varphi_{aa}+2\varphi_{ab}w'(a)+\varphi_{bb}w'^2(a)+\varphi_b w''(a)=0, \tag{4}$$

полученное дифференцированием по a. Эти три уравнения задают пространственную кривую, зависящую от параметра a, а именно, огибающую характеристических кривых. Они дадут искомое решение уравнения Монжа, если u и y выразить как функции x с помощью процесса исключения. Чтобы представить все решения данного недоопределенного „диофантова" обыкновенного дифференциального уравнения (2) в виде (3), (4), надо сначала заменить его эквивалентным дифференциальным уравнением с частными производными $F=0$, а затем найти полный интеграл.

§ 6. Примеры

Мы проиллюстрируем только что разработанную теорию несколькими примерами; некоторые из них важны сами по себе.

1. Дифференциальное уравнение световых лучей $(\operatorname{grad} u)^2 = 1$. Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$u_x^2 + u_y^2 = 1 \tag{1}$$

для функции $u(x, y)$ и

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \tag{2}$$

для функции $u(x, y, z)$. Эти уравнения встречаются, например, в геометрической оптике. Поверхности $u = \text{const}$ представляют собой *фронт волны*, а характеристики — *световые лучи*; более общее дифференциальное уравнение

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = n(x, y, z) \tag{3}$$

описывает фронт волны при распространении света в неоднородной среде с переменным коэффициентом преломления $n(x, y, z)$.

Мы сначала рассмотрим случай двух независимых переменных, для которого мы получили (см. гл. I, § 3) полный интеграл

$$u = ax + \sqrt{1 - a^2}\, y + b \tag{4}$$

и для которого уравнения

$$\begin{aligned} u &= ax + \sqrt{1 - a^2}\, y + w(a), \\ 0 &= x - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\, y + w'(a) \end{aligned} \tag{4'}$$

дают решение, содержащее произвольную функцию. Два уравнения

$$\begin{aligned} u &= ax + \sqrt{1 - a^2}\, y + b, \\ 0 &= x - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\, y + c \end{aligned}$$

и соответствующие им соотношения

$$p = a, \quad q = \sqrt{1 - a^2}$$

определяют семейство характеристических полос, зависящее от трех параметров a, b, c; вдоль этих полос мы можем считать x независимой переменной. Характеристические кривые, „световые лучи“, являются прямыми, и вдоль каждой из этих линий касательная плоскость остается постоянной. И характеристические линии, и соответствующие плоскости образуют угол 45° с плоскостью x, y; они

определяются этим свойством. Конус Монжа в точке (x_0, y_0, u_0) очевидно имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (u - u_0)^2.$$

Характеристические дифференциальные уравнения, решения которых определяются из написанных выше соотношений, можно представить в виде

$$dx : dy : du : dp : dq = p : q : 1 : 0 : 0; \tag{5}$$

их можно проинтегрировать; мы сразу получаем

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad u = s + u_0,$$
$$x = p_0 s + x_0, \quad y = q_0 s + y_0,$$

где начальные условия, соответствующие значению $s = 0$, обозначены через x_0, y_0, u_0, p_0, q_0.

Исключая p и q из уравнений $p^2 + q^2 = 1$, $y' = q/p$, $u' = 1/p$, мы получим для функций $u(x)$ и $y(x)$ уравнение Монжа, соответствующее нашему дифференциальному уравнению с частными производными:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1. \tag{6}$$

Его решения — это такие кривые, касательные к которым в любой точке образуют угол 45° с плоскостью x, y. Эти *фокальные* или „*каустические*“ кривые (которые являются эвольвентами кривых $u = \mathrm{const}$) можно следующим образом выразить без использования интегралов через произвольную функцию $w(a)$:

$$\begin{aligned} u &= ax + \sqrt{1 - a^2}\, y + w(a), \\ 0 &= x - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\, y + w'(a), \\ 0 &= -\frac{1}{\sqrt{(1 - a^2)^3}}\, y + w''(a)\ ^{1)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Этими фокальными кривыми можно воспользоваться для того, чтобы охарактеризовать решения [2]) дифференциального уравнения (1) как развертывающиеся касательные поверхности с ребром возврата, которое является фокальной кривой, т. е. кривой, касательные к которой образуют угол 45° с плоскостью x, y.

---

[1]) Проверка этого представления с помощью прямых вычислений предлагается как упражнение.

[2]) За исключением плоскостей (4) и интегральных коноидов, т. е. прямых круговых конусов, образующие которых наклонены к плоскости x, y под углом 45°.

Решения уравнения (1) имеют еще одно важное геометрическое истолкование. Рассмотрим семейство кривых $u(x, y)=c=\text{const}$ на плоскости x, y. Мы утверждаем, что *значение функции $u(x, y)$ в любой точке плоскости равно расстоянию от этой точки до кривой $u(x, y)=0$.*

Кривые $u(x, y)=c$ параллельны кривой $u(x, y)=0$ и отстоят от нее на расстояние c; ортогональными траекториями к этому семейству кривых являются прямые (а именно проекции наших характеристических кривых), а огибающая этих прямых, общая эволюта кривых $u=\text{const}$, является проекцией ребра возврата, т. е. фокальной кривой.

Этот факт можно доказать, например, разрешая задачу Коши, поставленную для начальной кривой $G(x_0, y_0)=0$, на которой задано начальное условие $u=0$. Чтобы построить решение, мы рассмотрим характеристики, проходящие через каждую точку (x_0, y_0) начальной кривой, а именно прямые $x=p_0s+x_0$, $y=q_0s+y_0$, $u=s$. Так как

$$p_0^2+q_0^2=1,$$

s представляет собой расстояние от точки (x, y) до точки (x_0, y_0) на проекции этой прямой.

Чтобы определить p_0 и q_0, мы заметим, что если считать x_0 независимой переменной вдоль начальной кривой, то мы получим $du_0/dx_0=p_0+q_0\,dy_0/dx_0$. Следовательно, это уравнение и начальное условие $G_{x_0}+G_{y_0}\,dy_0/dx_0=0$ дают $p_0G_{y_0}-q_0G_{x_0}=0$. Таким образом, проекция упомянутой выше характеристической линии ортогональна к начальной кривой. Действительно, тогда u является — по крайней мере, в достаточно малой окрестности начальной кривой — расстоянием от точки (x, y) до кривой $G(x_0, y_0)$. Из этих замечаний сразу следует, что любая кривая $u=\text{const}$ снова ортогональна нашей прямой.

Доказательство будет иметь несколько другой вид, если мы начнем со следующей задачи: найти ортогональные траектории к данным кривым $u=\text{const}$. Эти траектории задаются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds}=u_x, \qquad \frac{dy}{ds}=u_y. \tag{8}$$

Возводя в квадрат и складывая, получаем

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1; \tag{9}$$

таким образом, мы видим, что s представляет длину дуги на траектории. Дифференцируя первое из дифференциальных уравнений (8) по s и снова используя эти уравнения, получим $d^2x/ds^2=u_{xx}u_x+u_{xy}u_y$.

Правая часть тождественно равна нулю, в чем можно убедиться, дифференцируя уравнение в частных производных (1) по x. Аналогично мы получаем $d^2y/ds^2 = 0$, откуда видно, что траектории являются прямыми.

В случае трех независимых переменных тот же самый метод показывает, что решения дифференциального уравнения (2) задаются семейством равноотстоящих друг от друга поверхностей $u(x, y, z) = \text{const}$, параллельных произвольной начальной поверхности $G(x, y, z) = 0$. Эти поверхности имеют прямолинейные ортогональные траектории, и часть этих прямых, находящаяся между поверхностями $u = c_1$ и $u = c_2$, имеет постоянную длину $c_1 - c_2$; сама величина u есть расстояние от точки (x, y, z) до начальной поверхности.

2. Уравнение $F(u_x, u_y) = 0$. Теперь мы рассмотрим дифференциальное уравнение [1])

$$pq = \frac{1}{2} \qquad (p = u_x, \ q = u_y). \tag{10}$$

Эквивалентное уравнение Монжа для $y(x)$ и $u(x)$ имеет вид

$$u'^2 = 2y'. \tag{11}$$

Полный интеграл, содержащий все поверхностные элементы для нашего дифференциального уравнения, определяется формулой

$$u = ax + \frac{1}{2a} y + b, \tag{12}$$

которая дает семейство решений

$$\begin{aligned} u &= ax + \frac{1}{2a} y + w(a), \\ 0 &= x - \frac{1}{2a^2} y + w'(a), \end{aligned} \tag{13}$$

зависящее от произвольной функции $w(a)$. Наконец, если мы добавим уравнение

$$0 = \frac{1}{a^3} y + w''(a), \tag{13'}$$

то мы получим не содержащее интегралов представление фокальных кривых через произвольную функцию w.

---

[1]) С помощью преобразования координат (вращения) $\omega = u$, $\eta = (x - y)/\sqrt{2}$, $\xi = (x + y)/\sqrt{2}$ это уравнение можно свести к уравнению $\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2 = 1$ для функции $\omega(\xi, \eta)$; это уравнение можно изучать способом, аналогичным использованному выше.

Множество всех характеристик задается уравнениями

$$u = ax + \frac{1}{2a} y + b,$$
$$0 = x - \frac{1}{2a^2} y + c$$

с тремя параметрами a, b, c и независимой переменной x.

Характеристические уравнения имеют вид

$$dx : dy : du : dp : dq = q : p : 1 : 0 : 0. \tag{14}$$

Таким образом, характеристики снова являются прямыми и соответствующие касательные плоскости постоянны вдоль всей линии. Поэтому уравнения характеристик таковы:

$$y = \frac{p_0}{q_0} x + y_0, \quad u = \frac{1}{q_0} x + u_0. \tag{15}$$

Наконец, мы решим задачу Коши для начальных значений $u(0, y_0) = u_0 = v(y_0)$, которые мы считаем заданными произвольным образом. Мы сразу получаем

$$q(0, y_0) = v'(y_0), \quad p(0, y_0) = \frac{1}{2v'(y_0)}.$$

Таким образом, уравнения

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{v'(y_0)} x + v(y_0), \\ y &= \frac{1}{2v'^2(y_0)} x + y_0 \end{aligned} \tag{16}$$

дают решение задачи Коши, если выразить y_0 через x и y из второго уравнения и подставить в первое. Сравнение с решением

$$u = 2ax + aw'(a) + w(a),$$
$$y = 2a^2 x + 2a^2 w'(a),$$

полученным из формул (13), показывает, что эти решения можно следующим образом преобразовать одно в другое. Мы введем новый параметр y_0 вместо a при помощи уравнения $y_0 = 2a^2 w'(a)$, а затем получим новую функцию $v(y_0)$, определенную уравнением

$$v(y_0) = (aw(a))' = aw'(a) + w(a).$$

В силу соотношений

$$\frac{dy_0}{da} = 2a\,[2w'(a) + aw''(a)] = 2a\,(aw(a))'',$$

$$v'(y_0) = \frac{dv(y_0)}{dy_0} = (aw(a))'' \frac{da}{dy_0} = \frac{1}{2a},$$

два эти представления решения переходят одно в другое.

Оба предыдущих примера являются частными случаями общего дифференциального уравнения в частных производных

$$F(u_x, u_y) = 0, \tag{17}$$

для которого справедливы аналогичные соотношения. Из характеристических уравнений

$$dx : dy : du : dp : dq = F_p : F_q : (pF_p + qF_q) : 0 : 0 \tag{18}$$

мы, как и выше, видим, что характеристические полосы состоят из прямых линий с одной только соответствующей касательной плоскостью, и в результате решения оказываются развертывающимися поверхностями. Это становится еще более ясным, если мы заметим, что можно построить полный интеграл, состоящий целиком из плоскостей. Для этого мы предположим, что уравнению $F(p, q) = 0$ удовлетворяют две функции параметра a: $p(a)$ и $q(a)$. Мы получаем полный интеграл

$$u = p(a)x + q(a)y + b,$$

состоящий целиком из плоскостей.

3. Дифференциальное уравнение Клеро[1]**.** Мы снова рассмотрим *дифференциальное уравнение Клеро*

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y). \tag{19}$$

В гл. I, § 4 мы нашли семейство плоскостей

$$u = ax + by + f(a, b), \tag{20}$$

которое является полным интегралом. Решения, полученные из полного интеграла с помощью образования огибающих, даются формулами

$$\begin{aligned} u &= ax + w(a)y + f(a, w(a)), \\ 0 &= x + w'(a)y + f_a + f_b w'; \end{aligned} \tag{21}$$

эти решения представляют развертывающиеся поверхности. Таким же способом мы устанавливаем, что все интегральные поверхности, порождаемые семействами характеристик, являются развертывающимися; из характеристических уравнений

$$dx : dy : du : dp : dq =$$
$$= (x + f_p) : (y + f_q) : (px + qy + pf_p + qf_q) : 0 : 0 \tag{22}$$

мы, как и выше, заключаем (см. п. 1, 2), что характеристические полосы состоят из прямых линий с одной только соответствующей касательной плоскостью.

[1]) См. гл. I, § 4 и 6.

Мы рассматривали особое решение дифференциального уравнения (19) (см. гл. I, § 4, п. 6). Предполагая, что $f_{aa}f_{bb} - f_{ab}^2 \neq 0$, мы получаем это решение, разрешая уравнения

$$x = -f_a, \quad y = -f_b$$

относительно a и b и подставляя их в уравнение

$$u = ax + by + f(a, b);$$

через координаты касательной плоскости ξ, η, ω это решение представляется просто как опорная функция

$$\omega = -f(\xi, \eta). \tag{23}$$

Теперь все решения можно легко связать с особым решением. Заметим, что плоскости, составляющие полный интеграл, совпадают с касательными к особому решению и что характеристики являются линиями касания. Поэтому вся совокупность решений уравнения Клеро состоит из развертывающихся поверхностей, касающихся особого решения. Таким образом, задачу Коши легко можно решить, выбрав плоскости, касающиеся как начальной кривой, так и особого решения, и построив их огибающую.

Можно было бы непосредственно из самого дифференциального уравнения получить, что конус Монжа в точке P есть конус с вершиной в точке P, касающийся особого решения. Кроме того, *конус Монжа является также интегральным коноидом.*

4. Дифференциальное уравчение трубчатых поверхностей. Поучительный пример дает дифференциальное уравнение трубчатых поверхностей, упомянутое в гл. I, § 4:

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1. \tag{24}$$

Семейство сфер

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + u^2 = 1 \tag{25}$$

есть полный интеграл уравнения (24). Геометрически очевидно, что характеристики являются большими кругами этих сфер, параллельными оси u.

Аналитически это следует из характеристических дифференциальных уравнений

$$dx : dy : du : dp : dq = u^2p : u^2q : (1-u^2) : \left(-\frac{p}{u}\right) : \left(-\frac{q}{u}\right), \tag{26}$$

из которых мы находим, что

$$d(x + up) = d(y + uq) = d\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$

Мы сразу получаем уравнения

$$x - a = -up, \quad y - b = -uq, \quad p = cq,$$

где a, b, c — постоянные интегрирования. Из этих уравнений и из соотношения (24) мы получаем уравнения

$$(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1$$

и $(x-a)/(y-b)=c$; таким образом, характеристическими кривыми являются описанные выше круги. Более того, из соотношений

$$(x-a):(y-b):u=p:q:(-1)$$

следует, что нормаль к касательной плоскости в любой точке круга направлена всегда к центру этого круга.

Остальные интегральные поверхности являются огибающими однопараметрических семейств сфер радиуса 1, центр которых передвигается вдоль некоторой кривой на плоскости x, y. Если кривизна этой кривой, называемой осью трубчатой поверхности, меньше, чем кривизна единичной окружности, то трубчатая поверхность будет действительно иметь форму трубки. Ее характеристические круги тогда не имеют огибающей. Однако они ее имеют, если радиус кривизны оси меньше единицы; тогда они порождают ребро возврата интегральной поверхности. Эти ребра возврата являются фокальными кривыми нашего дифференциального уравнения. Проекция такой фокальной кривой на плоскость x, y является эволютой осевой линии нашей „трубки". Эти соотношения легко сделать наглядными с помощью конкретных примеров или моделей.

5. Соотношение однородности. В качестве последнего примера мы рассмотрим соотношение однородности (ср. гл. I, § 1)

$$px+qy=hu, \tag{27}$$

где h — постоянная. Интегрируя характеристические дифференциальные уравнения

$$dx:dy:du=x:y:hu, \tag{28}$$

мы получаем уравнения

$$\frac{u}{x^h}=a \quad \text{и} \quad \frac{x}{y}=b. \tag{29}$$

Следовательно, общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения дается формулой $u=x^hV(y/x)$, где V — произвольная функция, или формулой $u=y^hv(y/x)$, где v — произвольная функция; это значит, что u — однородная функция x и y степени h.

Другое представление общего решения получается из полного интеграла

$$u=ax^h+by^h$$

с помощью уравнений

$$u=ax^h+w(a)\,y^h,$$
$$0=x^h+w'(a)\,y^h,$$

Так как из второго уравнения можно выразить a как функцию отношения x/y, мы снова получаем, что u есть общая однородная функция степени h.

§ 7. Общее дифференциальное уравнение с n независимыми переменными

Теория общего дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

в случае n независимых переменных аналогична соответствующей теории для $n = 2$. Поэтому мы не будем повторять ее геометрического обоснования, а выясним в основном роль характеристических полос.

По аналогии с § 3 мы поставим в соответствие дифференциальному уравнению $F = 0$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \quad \frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\left(F_u p_i + F_{x_i}\right) \tag{2}$$

для $2n + 1$ функций x_i, u, p_i параметра s. Система (2) называется *характеристической системой дифференциальных уравнений*, соответствующей дифференциальному уравнению (1).

Функция $F(x_i, u, p_i)$ является интегралом этой системы, так как

$$\frac{dF}{ds} = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \frac{dx_i}{ds} + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{dp_i}{ds} + F_u \frac{du}{ds} = 0$$

для любого решения системы (2).

Все решения системы (2), одновременно удовлетворяющие уравнению $F = 0$, называются *характеристическими полосами*. Эти полосы образуют $(2n - 1)$-параметрическое семейство. Кроме того, точно так же, как в случае двух переменных, *на каждой интегральной поверхности*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

дифференциального уравнения $F = 0$ лежит бесконечно много характеристических полос. Всякая характеристическая полоса, имеющая общий элемент (т. е. систему значений x_i, u, p_i) с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой интегральной поверхности.

Как и в § 3, мы имеем следующую задачу Коши. Пусть $(n - 1)$-мерное *начальное многообразие* C задано с помощью непре-

рывно дифференцируемых функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и параметров $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, причем матрица производных $\partial x/\partial t_k$ имеет ранг $n-1$. Пусть это многообразие дополнено до *многообразия полос* C_1 заданием n функций $p_1, p_2, \ldots, p_n$ параметров t_i, удовлетворяющих тождественно по t_ν *условиям полосы*

$$u_{t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Кроме того, пусть величины, определяющие полосу, удовлетворяют уравнению $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$ тождественно по t_i. *Наша цель состоит в том, чтобы найти интегральное многообразие*

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

т. е. решение уравнения $F = 0$, содержащее заданное начальное многообразие C_1.

Чтобы решить эту задачу, рассмотрим семейство характеристических полос с параметром s, начальный элемент которого, соответствующий значению $s = 0$, лежит в заданном начальном многообразии полос C_1; иными словами, мы рассмотрим те решения

$$x_i(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),$$
$$u(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),$$
$$p_i(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$$

характеристической системы дифференциальных уравнений, которые при $s = 0$ переходят в заданные функции параметров t_ν. Если якобиан

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})}, \tag{4}$$

в силу (2) совпадающий с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{p_1} \ldots F_{p_n} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} \ldots \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} \ldots \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix},$$

не обращается в нуль на начальном многообразии C_1 (т. е. при $s = 0$) и, следовательно, не обращается в нуль в некоторой окрестности C_1, то величины $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$ в этой окрестности могут быть выражены через $x_1, x_2, \ldots, x_n$; подставляя эти выражения в

$$u(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),$$

получаем однозначно определенную поверхность $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, содержащую начальное многообразие C_1. Теперь мы должны показать, что эта функция u является решением нашей задачи Коши. Если подставить решения характеристической системы дифференциальных уравнений вместо x_i, u, p_i в функцию $F(x_i, u, p_i)$, то она тождественно обратится в нуль на поверхности $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Поэтому осталось только показать, что всюду на этой поверхности

$$p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Этот факт проверяется так же, как в случае двух независимых переменных (ср. § 3, п. 2), и здесь мы можем этого не делать.

Остается рассмотреть исключительный случай, когда $\Delta=0$ тождественно на C_1. Как и в § 2, из соотношения $\Delta=0$ мы можем сделать заключение, что существует $(n-1)$ функций $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, для которых на C_1 выполняется равенство

$$F_{p_i}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}. \tag{5}$$

Наша цель состоит в том, чтобы найти, при каких дополнительных условиях в этом случае можно решить задачу Коши. Здесь опять положение проясняется с помощью понятия *характеристического многообразия*, которое мы сейчас введем и будем исследовать. В отличие от квазилинейного случая (см. § 2), когда характеристическое многообразие C было $(n-1)$-мерным многообразием в $(n+1)$-мерном пространстве x, u, мы теперь должны рассматривать $(n-1)$-мерные многообразия полос C_1, задаваемые $2n+1$ величинами x_i, u, p_i, которые можно рассматривать в $(2n+1)$-мерном пространстве x, u, p.

Каждой точке $(2n+1)$-мерного пространства x, u, p (или любому элементу поверхности в $(n+1)$-мерном пространстве x, u) мы теперь поставим в соответствие систему $2n+1$ величин

$$\begin{aligned} a_i &= F_{p_i}, \qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n)\\ b_i &= -p_iF_u-F_{x_i},\\ a &= \sum_{\nu=1}^{n}p_\nu F_{p_\nu}=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu a_\nu \end{aligned} \tag{6}$$

— компонент *характеристического вектора полосы*. Кроме того, мы примем следующее определение: $(n-1)$-*мерное многообразие полос* C_1, *для которого выполняется соотношение* $F(x_i, u, p_i)=0$, *называется характеристическим, если характеристический вектор полосы касается его в каждой точке*. Это геометри-

ческое определение, основанное на рассмотрении уравнения в $(2n+1)$-мерном пространстве, может быть сформулировано аналитически следующим образом: вектор (a_i, a, b_i) должен линейно зависеть от $n-1$ независимых векторов $\partial x_i/\partial t_\nu$, $\partial u/\partial t_\nu$, $\partial p_i/\partial t_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n-1)$, которые по определению касаются C_1. Пусть для $(n-1)$-мерного многообразия C_1, заданного функциями x_i, u, p_i параметров $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, выполняются тождественно по t_ν соотношение

$$F(x_i, u, p_i) = 0 \tag{7}$$

и соотношение полосы

$$\frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{8}$$

Тогда многообразие полос называется характеристическим, если существует $(n-1)$ функций $\lambda_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$, таких, что удовлетворяются линейные соотношения [1])

$$X_i \equiv a_i - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = 0, \tag{9}$$

$$U \equiv a - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = 0, \tag{10}$$

$$P_i \equiv b_i - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial p_i}{\partial t_\nu} = 0. \tag{11}$$

---

[1]) Эти $(2n+1)$ соотношений между величинами x_i, u, p_i не являются независимыми, так как легко проверить, что

$$U = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial F}{\partial t_\rho} = -\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial t_\rho} - \frac{\partial U_\rho}{\partial t_\nu}\right) + F_u U_\rho + \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial p_i}{\partial t_\rho} - P_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\rho}\right)$$

$$(\rho = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где

$$U_\nu = \frac{\partial u}{\partial t_\nu} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}.$$

Отсюда следует, что, кроме условия $F=0$, полученного из него соотношения $\partial F/\partial t_\rho = 0$, условий полосы (8) и условий (9), надо предположить выполнение только одного из условий (11), чтобы обеспечить выполнение условий (10) и остальных $(n-1)$ условий (11). Однако, как это часто бывает в геометрии и анализе, из соображений симметрии целесообразно сохранить написанную выше систему зависимых соотношений.

Справедливы следующие две теоремы.

Всякое характеристическое многообразие полос C_1 порождается $(n-2)$-мерным семейством характеристических полос, целиком лежащих в C_1.

Всякая характеристическая полоса, имеющая общий начальный элемент с характеристическим многообразием полос, целиком лежит в этом многообразии.

Чтобы доказать эти теоремы, мы снова, как в § 2, определим кривые $t_i(s)$ на $(n-1)$-мерном многообразии t_i с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt_\nu}{ds} = \lambda_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{12}$$

Эти кривые образуют $(n-2)$-мерное семейство, порождающее многообразие t_i. Вдоль этих кривых можно определить одномерные полосы $x_i(t_\nu)$, $u(t_\nu)$, $p_i(t_\nu)$, лежащие на C_1; после подстановки $t_\nu = t_\nu(s)$ они принимают вид $x_i(s)$, $u(s)$, $p_i(s)$; теперь мы должны доказать, что эта полоса есть характеристическая полоса нашего исходного дифференциального уравнения. Действительно, применяя (9), (10), (11), мы получаем

$$\frac{dx_i}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}\lambda_\nu = a_i = F_{p_i}, \qquad \frac{du}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial t_\nu}\lambda_\nu = a = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i},$$

$$\frac{dp_i}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial p_i}{\partial t_\nu}\lambda_\nu = b_i = -F_{x_i} - p_i F_u.$$

Таким образом, наши функции являются решениями характеристической системы дифференциальных уравнений (2) и, следовательно, в силу $F = 0$, определяют характеристическую полосу; $(n-2)$-параметрическое семейство таких полос покрывает C_1.

С помощью рассуждений, совершенно аналогичных примененным в случае квазилинейных уравнений (см. § 2), вторая теорема получается как следствие того факта, что решение характеристической системы дифференциальных уравнений однозначно определяется начальными значениями.

После такого анализа характеристических многообразий мы можем сформулировать и доказать такие же полные результаты, как и в квазилинейном случае.

Задача Коши для данного начального многообразия C_1 имеет одно и только одно решение, если $\Delta \neq 0$ всюду на C_1. Если же на C_1 выполняется соотношение $\Delta = 0$, то для разрешимости задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы C_1 было характеристическим многообразием. В этом случае существует бесконечно много решений.

Мы должны доказать это утверждение только для случая $\Delta = 0$. В этом случае мы сразу можем сделать заключение о существовании $n-1$ функций

$$\lambda_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),$$

таких, что выполняются соотношения (9). Если мы теперь предположим, что функция $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задает некоторую интегральную поверхность J, проходящую через C_1, и положим $p_i = \partial u/\partial x_i$, то соотношения (10), (11), из которых следует, что C_1 — характеристическое многообразие, получаются сразу. Так как $p_i = u_{x_i}$ и так как справедливы формулы (9), мы имеем

$$a = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu};$$

следовательно, установлено соотношение (10). Теперь мы воспользуемся тем фактом, что u должно тождественно по x_i удовлетворять соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + F_u p_k + F_{x_k} = 0; \tag{13}$$

учитывая, что $\partial p_k/\partial x_i = \partial p_i/\partial x_k$, мы видим, что это дифференциальное уравнение (1), продифференцированное по x_k. Применяя (12), мы получим

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial p_k}{\partial t_\nu} = -F_u p_k - F_{x_k} = b_k,$$

т. е. требуемое уравнение (11).

Таким образом, мы доказали, что если задача Коши для C_1 разрешима, то C_1 — характеристическое многообразие полос.

Достаточность этого условия получается так же, как в квазилинейном случае. Построим многообразие C_1', не касательное к C_1, имеющее с C_1 общее $(n-2)$-мерное многообразие S, и такое, что всюду на нем $\Delta \neq 0$; тогда задача Коши для C_1' однозначно разрешима; решением является интегральная поверхность J'. Все характеристические полосы, проходящие через S, и многообразие C_1, порожденное этими полосами, лежат на J'. Так как C_1' выбрано произвольно, существует бесконечно много решений задачи Коши для многообразия C_1.

В заключение этого параграфа мы еще раз подчеркнем, что он касается изучения вопроса только в малом. Ниже, в гл. VI, мы должны

будем рассматривать решения на всем их протяжении, допуская особенности и многозначность; это рассмотрение в целом требует гораздо больше усилий, чем локальные исследования.

§ 8. Полный интеграл и теория Гамильтона — Якоби

1. Построение огибающих и характеристические кривые. Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

где $p_i = \partial u/\partial x_i$ и $\sum_i F_{p_i}^2 \neq 0$. Пусть имеется частное решение

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{2}$$

зависящее от n параметров a_i (полный интеграл). Предположим, что условие [1])

$$D = \left|\varphi_{x_i a_k}\right| \neq 0 \tag{3}$$

выполнено в рассматриваемой области пространства x, u. Тогда огибающая произвольного $(n-1)$-параметрического семейства этих решений также есть решение. Чтобы доказать это, мы положим

$$a_i = \omega_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где ω_i — произвольные функции $n-1$ параметров t_k. Чтобы найти огибающую, надо определить $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ из уравнений

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{a_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4}$$

как функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и подставить эти t_ν в выражение

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, \omega_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \omega_n(t_1, \ldots, t_{n-1})).$$

Линии касания поверхностей, заданных полным интегралом, и огибающей оказываются *характеристическими кривыми*. Такая линия касания соответствует фиксированной системе величин t_ν, $\partial\omega_i/\partial t_\nu$ и a_i; кроме того, вдоль такой кривой выполняются соотношения (4), в силу которых функции φ_{a_i} принимают, с точностью

---

[1]) Мы могли бы, как раньше (ср. гл. I, § 4, п. 2), наложить более общее требование, чтобы матрица с n строками

$$\begin{pmatrix} \varphi_{a_1} & \varphi_{x_1 a_1} & \cdots & \varphi_{x_n a_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{a_n} & \varphi_{x_1 a_n} & \cdots & \varphi_{x_n a_n} \end{pmatrix}$$

имела ранг n.

до общего коэффициента пропорциональности λ, некоторые постоянные значения b:

$$\varphi a_i = \lambda b_i. \tag{5}$$

С помощью этих уравнений мы можем задать значения λb_i, соответствующие заданным значениям величин x_i и a_i; затем, в силу условия (3), мы можем однозначно разрешить уравнения (5) относительно x_i в окрестности рассматриваемой системы значений и получить функции

$$x_i(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, \lambda).$$

Если мы подставим эти функции в выражение

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

то мы получим кривую, заданную при помощи параметра λ. Так как в рассматриваемой окрестности величинам a_i и b_i можно придать любые значения за счет соответствующего выбора функций ω_i, то мы получаем таким образом $2n$-параметрическое семейство линий касания огибающей и нашего полного интеграла. Эти кривые являются характеристическими кривыми дифференциального уравнения (1) и вместе с функциями

$$p_i = \varphi_{x_i}(x_k(a_\nu, b_\nu, \lambda), a_k)$$

дают характеристические полосы. Это следует из геометрического смысла наших полос — как полос касания.

Чтобы доказать это утверждение аналитически, мы продифференцируем уравнение (5) по параметру λ:

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{a_i x_k} x'_k = b_i. \tag{6}$$

Здесь дифференцирование по λ обозначено штрихом. С другой стороны, функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ тождественно по a_i и x_i удовлетворяет уравнению (1); если мы продифференцируем его по a_i и применим (5), то получим

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{x_k a_i} F_{p_k} + F_u \lambda b_i = 0. \tag{7}$$

Таким образом, величины $-(F_{p_k}/\lambda F_u)$ удовлетворяют той же самой системе неоднородных уравнений, что и величины x'_k; так как определитель этой системы не обращается в нуль, мы можем сделать вывод, что

$$x'_k = -\frac{F_{p_k}}{\lambda F_u}.$$

Если мы обозначим отличное от нуля выражение $-1/\lambda F_u$ через ρ, то получим

$$x'_k = \rho F_{p_k}. \tag{8}$$

Далее, дифференцируя (1) по x_k, мы находим, что

$$F_u p_k + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + F_{x_k} = 0,$$

или, так как в силу (8) мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} x'_i = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} x'_i = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} x'_i = \frac{1}{\rho} p'_k,$$

то

$$p'_k = -\rho\left(F_u p_k + F_{x_k}\right).$$

Наконец, из (8) следует, что

$$u' = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} x'_i = \rho \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}.$$

Так как параметр λ на кривой можно выбрать так, что $\rho = 1$, рассматриваемые кривые удовлетворяют характеристическим уравнениям (2) из § 7 [1]).

2. Канонический вид характеристических дифференциальных уравнений. Теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка можно придать более ясную форму, упростив при этом вычисления, проведенные в п. 1, если неизвестная функция u не входит явно в дифференциальное уравнение. Произвольное дифференциальное уравнение всегда можно привести к такому специальному виду, искусственно увеличив на единицу число независимых переменных.

Для этой цели нам достаточно ввести, например (ср. гл. I, § 5), $u = x_{n+1}$ в качестве независимой переменной и выразить семейство решений

$$u = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, c)$$

---

[1]) Заметим, что можно и другими способами с помощью построения огибающих получать решения из решения $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, зависящего от произвольных параметров. Например, можно построить огибающую n-параметрического семейства (2) и прийти таким образом к особому решению, которое, как и в случае $n = 2$, можно получить также посредством дифференцирования и исключения переменных из соотношений $F = F_{p_i} = 0$. Или можно из n-параметрического семейства с помощью произвольных функций выбрать любое m-параметрическое семейство с $m < n$ и построить его огибающую. Многообразиями касания в этом случае будут характеристические многообразия размерности $n - m$.

в неявном виде

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c.$$

Если мы заменим u_{x_i} на $-\varphi_{x_i}/\varphi_{x_{n+1}}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то мы получим для новой неизвестной функции φ дифференциальное уравнение, не зависящее явно от φ.

Для такого дифференциального уравнения мы выделяем одну переменную, например, $x_{n+1} = x$, и считаем, что оно разрешено относительно производной φ по этой переменной. Таким образом, если вместо φ мы снова напишем u, то без ограничения общности мы можем рассматривать дифференциальные уравнения вида

$$\begin{gathered} p + H(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \\ p = u_x, \quad p_i = u_{x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{9}$$

для функции u от $(n+1)$ переменных $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тогда характеристическая система дифференциальных уравнений, одним из которых является уравнение $dx/ds = 1$ (или $x = s$), переходит в систему

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{10}$$

более того, выполняются соотношения

$$\frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^{n} p_i H_{p_i} - H, \quad \frac{dp}{dx} = -H_x. \tag{11}$$

Одни только уравнения (10) составляют систему $2n$ дифференциальных уравнений для $2n$ величин x_i, p_i. Если функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$ являются решениями системы (10), то $p(x)$ и $u(x)$ получаются из (11) простым интегрированием.

В механике и в вариационном исчислении (см. т. I, гл. IV, § 9 и § 9 этой главы) мы часто приходим к дифференциальным уравнениям вида (10). Система обыкновенных дифференциальных уравнений (10)

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i},$$

связанная с функцией $H(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, p_1, p_2 \ldots, p_n)$ $2n+1$ переменных, называется *канонической системой дифференциальных уравнений*.

Из результатов этого пункта следует, что интегрирование дифференциального уравнения с частными производными (9) можно свести к интегрированию канонической системы с той же функцией H.

3. Теория Гамильтона—Якоби. Гамильтон и Якоби получили более сильный результат, показав, что это соответствие можно обратить. Конечно, интегрирование дифференциального уравнения в частных производных обычно считается более трудной задачей, чем интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако в математической физике мы часто приходим к системам обыкновенных дифференциальных уравнений в канонической форме. Может оказаться, что эти системы трудно интегрировать элементарными методами, в то время как к соответствующему дифференциальному уравнению с частными производными можно найти подход; в частности, иногда можно легко найти полный интеграл, например, с помощью разделения переменных (см. гл. I, § 3). Зная полный интеграл, можно решить соответствующую характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования и исключения. Этот факт, который уже содержится в ранее приведенных результатах в § 4 и § 8, п. 1, формулируется особенно просто для случая канонических дифференциальных уравнений и проверяется аналитически, независимо от приведенных выше наводящих соображений, с помощью построения огибающих.

Прежде всего мы заново сформулируем понятие „полного интеграла" для дифференциального уравнения (9). Заметим, что для любого решения u этого дифференциального уравнения функция $u+a$ (с произвольной постоянной a) также является решением. Если $u=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — решение, зависящее от n параметров a_i, такое, что определитель

$$\left|\varphi_{x_i a_k}\right| \tag{12}$$

отличен от нуля, то выражение

$$u=\varphi+a,$$

зависящее от $n+1$ параметров, называется *полным интегралом*.

Основное содержание рассматриваемой здесь теории заключается в следующей теореме, аналогичной результатам, доказанным в п. 1.

Если для дифференциального уравнения (9)

$$u_x+H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}\right)=0$$

полный интеграл $u=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, a_1, a_2, \ldots, a_n)+a$ *известен, то из уравнений*

$$\varphi_{a_i}=b_i, \quad \varphi_{x_i}=p_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

с $2n$ произвольными параметрами a_i и b_i получается (неявно) $2n$-параметрическое семейство решений канонической системы дифференциальных уравнений (10)

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}.$$

Предположим, что из первых n уравнений (13) величины x_i выражены как функции от x и $2n$ параметров a_i, b_i (это возможно, так как по предположению $\left|\varphi_{x_i a_k}\right| \neq 0$), и будем считать, кроме того, что эти значения x_i подставлены во вторую серию уравнений (13); таким образом, мы получим функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$, тоже зависящие от $2n$ параметров. Мы увидим, что эти функции дают общее решение системы канонических дифференциальных уравнений. Тем самым решение этой системы сводится к задаче отыскания полного интеграла соответствующего дифференциального уравнения в частных производных.

Самым коротким доказательством этого утверждения является простая проверка, аналогичная той, которая проведена в п. 1 [1]). Чтобы показать, что так определенные функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$ удовлетворяют уравнениям (10), мы продифференцируем уравнения $\varphi_{a_i} = b_i$ по x и уравнение

$$\varphi_x + H\left(x_i, x, \varphi_{x_i}\right) = 0$$

по a_i; мы получим $2n$ уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial a_i}\,\frac{\partial x_k}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} H_{p_k}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial a_i} = 0,$$

из которых следует первая серия уравнений (10), так как определитель $\left|\varphi_{a_k x_i}\right|$ не обращается в нуль. Чтобы проверить вторую серию соотношений (10), мы продифференцируем уравнения $\varphi_{x_i} = p_i$ по x и уравнение $\varphi_x + H\left(x_i, x, \varphi_{x_i}\right) = 0$ по x_i и получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dx} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\partial x_k}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} H_{p_k}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial x_i} + H_{x_i}. \end{aligned} \tag{14}$$

---

[1]) Разница между этим доказательством и доказательством из п. 1 состоит в том, что здесь оставлены несимметричные обозначения.

Так как мы уже доказали, что $dx_i/dx = H_{p_i}$, отсюда сразу получается вторая серия соотношений (10).

4. Пример. Задача двух тел. Движение двух притягивающих друг друга частиц P_1 и P_2, согласно закону тяготения Ньютона, описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= U_{x_1}, \quad m_1\ddot{y}_1 = U_{y_1}, \quad m_1\ddot{z}_1 = U_{z_1}, \\ m_2\ddot{x}_2 &= U_{x_2}, \quad m_2\ddot{y}_2 = U_{y_2}, \quad m_2\ddot{z}_2 = U_{z_2}, \end{aligned} \tag{15}$$

где мы полагаем

$$U = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}.$$

Легко видеть, что такое движение всегда будет происходить в некоторой плоскости; поэтому мы можем выбрать плоскость, в которой происходит движение, за плоскость x, y нашей координатной системы и считать, что точка P_2 расположена в начале координат. Тогда для положения (x, y) частицы P_1 мы получаем уравнения

$$m_1\ddot{x} = U_x, \quad m_1\ddot{y} = U_y, \quad U = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{16}$$

где $k^2 = \varkappa^2 m_1 m_2$.

Если мы введем функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{k_1^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad k_1^2 = \frac{k^2}{m_1}, \tag{17}$$

то система (16) окончательно перейдет в *каноническую* систему *дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p, \quad \dot{p} = -H_x, \\ \dot{y} &= H_q, \quad \dot{q} = -H_y \end{aligned} \tag{18}$$

для величин x, y, $p = \dot{x}$, $q = \dot{y}$; интегрирование этих уравнений эквивалентно задаче нахождения полного интеграла дифференциального уравнения с частными производными [1])

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = \frac{k_1^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{19}$$

Если мы введем полярные координаты r, θ, то мы получим из (19) уравнение

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2}\varphi_\theta^2\right) = \frac{k_1^2}{r}; \tag{20}$$

[1]) См. также гл. I, § 3, п. 1, пример 4.

ясно, что это уравнение имеет семейство решений

$$\varphi = -\alpha t - \beta\theta - \int_{r_0}^{r} \sqrt{2\alpha + \frac{2k_1^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}\, d\rho, \tag{21}$$

зависящее от параметров α и β.

Согласно основной теореме из п. 3, мы получаем тогда общее решение системы (18) в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -t_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\theta_0,$$

или в явной форме

$$\begin{aligned} t - t_0 &= -\int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\sqrt{2\alpha + \frac{2k_1^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}, \\ \theta - \theta_0 &= \beta \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\alpha + \frac{2k_1^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Второе уравнение дает нам *траекторию* (или путь частицы), первое определяет движение по этому пути как функцию времени t.

Если ввести переменную интегрирования $\rho' = 1/\rho$, то траектория вычисляется в явном виде и дается формулой

$$\theta - \theta_0 = -\arcsin \frac{\frac{\beta^2}{k_1^2}\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k_1^4}}},$$

или, если мы положим

$$p = \frac{\beta^2}{k^2}, \quad \varepsilon^2 = \sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k_1^4}},$$

формулой

$$\theta - \theta_0 = -\arcsin \frac{p/r - 1}{\varepsilon^2},$$

т. е.

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon^2 \sin(\theta - \theta_0)}.$$

Траектория является эллипсом, параболой или гиперболой, если $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon > 1$ соответственно[1]).

5. Пример. Геодезические на эллипсоиде. Дифференциальные уравнения геодезических $u = u(s)$, $v = v(s)$ на поверхности

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

[1]) Общее рассмотрение уравнений (22) см. в книге Курант [1].

согласно изложенному в т. I, гл. VI, § 9, могут быть записаны в следующей канонической форме

$$\begin{aligned} u_s &= H_p, \quad p_s = -H_u, \\ v_s &= H_q, \quad q_s = -H_v, \end{aligned} \tag{23}$$

где мы полагаем

$$p = Eu_s + Fv_s,$$
$$q = Fu_s + Gv_s$$

и

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{EG-F^2}(Gp^2 - 2Fpq + Eq^2),$$

причем

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$
$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Следуя п. 3, мы рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\varphi_s + \frac{1}{2}\frac{1}{EG-F^2}\left(G\varphi_u^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + E\varphi_v^2\right) = 0, \tag{24}$$

соответствующее системе (23); наша цель состоит в том, чтобы найти полный интеграл этого уравнения. Если положить

$$\varphi = -\frac{1}{2}s + \psi(u, v),$$

то функция ψ будет удовлетворять уравнению[1])

$$G\psi_u^2 - 2F\psi_u\psi_v + E\psi_v^2 = EG - F^2. \tag{25}$$

Нас интересуют интегральные кривые системы, а не специальное параметрическое представление этих кривых; следовательно, достаточно найти однопараметрическое семейство решений $\psi(u, v, \alpha)$ уравнения (25), из которого, согласно основной теореме (п. 3), можно получить двухпараметрическое семейство геодезических в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = C. \tag{26}$$

В частном случае *эллипсоида*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \qquad (a, b, c > 0),$$

---

[1]) См. также § 9, п. 3.

как легко проверить, имеет место следующее параметрическое представление (см. т. 1, стр. 200):

$$x = \sqrt{\frac{a(u-a)(v-a)}{(b-a)(c-a)}},$$
$$y = \sqrt{\frac{b(u-b)(v-b)}{(c-b)(a-b)}}, \qquad (27)$$
$$z = \sqrt{\frac{c(u-c)(v-c)}{(a-c)(b-c)}}.$$

Отсюда следует, что

$$E = (u-v)A(u),$$
$$F = 0, \qquad (28)$$
$$G = (v-u)A(v),$$

где использовано сокращенное обозначение

$$A(u) = \frac{1}{4}\frac{u}{(a-u)(b-u)(c-u)}.$$

Таким образом, для функции $\psi(u, v)$ мы получаем дифференциальное уравнение с частными производными

$$A(v)\psi_u^2 - A(u)\psi_v^2 = (u-v)A(u)A(v), \qquad (29)$$

и, полагая $\psi(u, v) = f(u) + g(v)$, мы сразу находим семейство решений

$$\psi(u, v, \alpha) = \int_{u_0}^{u} \sqrt{A(u')(u'+\alpha)}\,du' + \int_{v_0}^{v} \sqrt{A(v')(v'+\alpha)}\,dv', \qquad (30)$$

зависящее от параметра α.

По формуле (26) мы находим *уравнение геодезических на эллипсоиде*:

$$\int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{A(u')}{u'+\alpha}}\,du' + \int_{v_0}^{v} \sqrt{\frac{A(v')}{v'+\alpha}}\,dv' = 2C. \qquad (31)$$

§ 9. Теория Гамильтона — Якоби и вариационное исчисление

Теория Гамильтона — Якоби дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка тесно связана с классическим вариационным исчислением[1]). Нахождение решений уравнений

---

[1]) См. обширный труд Каратеодори [1].

с частными производными первого порядка, в которые явно не входит неизвестная функция, эквивалентно отысканию таких функций $u_i(s)$, что вариация интеграла

$$J \equiv \int_{\tau}^{t} F(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \ldots, \dot{u}_n, u_1, u_2, \ldots, u_n, s)\, ds \tag{1}$$

обращается в нуль. Здесь $u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s)$ — функции параметра s, точка обозначает дифференцирование по s, а $F(\dot{u}_i, u_i, s)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих $2n+1$ аргументов в рассматриваемой области[1]. Теперь мы коротко объясним эту связь и тем самым снова получим результаты, изложенные в § 8, и достигнем более глубокого их понимания.

1. Дифференциальное уравнение Эйлера в каноническом виде. Экстремали вариационной задачи (1) (см. т. I, гл. IV) задаются системой *n дифференциальных уравнений Эйлера*. Это уравнения второго порядка для функций $u_\nu(s)$:

$$\frac{d}{ds} F_{\dot{u}_\nu} - F_{u_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Теперь мы можем (см. т. I, гл. IV, § 9) заменить вариационную задачу эквивалентной канонической вариационной задачей, которая приводит к системе $2n$ канонических дифференциальных уравнений первого порядка для экстремалей. С этой целью мы вводим „моменты“

$$F_{\dot{u}_\nu} = v_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

с помощью *преобразования Лежандра*.

Мы предполагаем, что величины $\dot{u}_i$ можно определить из уравнений (3) в некоторой области изменения переменных $\dot{u}_i, u_i, s$ как функции переменных v_i, u_i, s. Пусть

$$|F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu}| \neq 0, \tag{4}$$

где $|F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu}|$ обозначает определитель порядка n с элементами $\partial^2 F/\partial \dot{u}_\nu \partial \dot{u}_\mu$. Система уравнений

$$\begin{gathered} F_{\dot{u}_\nu} = v_\nu, \quad L_{v_\nu} = \dot{u}_\nu, \\ F(\dot{u}_i, u_i, s) + L(v_i, u_i, s) = \sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu v_\nu \end{gathered} \tag{5}$$

[1]) Определения и обозначения см. в т. I, гл. IV, § 3.

задает тогда *преобразование Лежандра и обратное ему преобразование*, где u_i и s остаются непреобразованными параметрами (см. гл. I, § 6); мы сразу получаем дальнейшее соотношение

$$L_{u_\nu} + F_{u_\nu} = 0. \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения Эйлера переходят в *каноническую систему*

$$\begin{aligned} \dot{v}_\nu &= -L_{u_\nu}, \\ \dot{u}_\nu &= L_{v_\nu} \end{aligned} \tag{7}$$

с функцией Лежандра $L(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n, s)$, соответствующей рассматриваемой вариационной задаче. Эти канонические дифференциальные уравнения являются системой уравнений Эйлера для некоторой вариационной задачи — *канонической формы данной вариационной задачи* (см. т. I, гл. IV, § 9). Эта задача эквивалентна исходной и имеет вид

$$\delta \int_\tau^t \left(\sum_{\nu=1}^n \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_i, u_i, s) \right) ds = 0,$$

или

$$\delta \int_\tau^t \left(\sum_{\nu=1}^n u_\nu \dot{v}_\nu + L(v_i, u_i, s) \right) ds = 0,$$

где $2n$ аргументов u_i, v_i являются функциями параметра s. Переменные u_i и v_i называются *канонически сопряженными*.

Заметим, что канонического преобразования не существует, если функция F — однородная[1]) степени единица относительно переменных $\dot{u}_i$, например, если $F = \sqrt{\sum_{\nu=1}^n \dot{u}_\nu^2}$ (см., однако, п. 3). Следует заметить, что если выполнено условие (4), то формула (5) дает возможность обратить построения, которые привели от представления экстремалей в форме Эйлера к каноническому представлению; иными словами, *в вариационной задаче любой подинтегральной функции* $F(\dot{u}_i, u_i, s)$ *соответствует функция Лежандра* $L(v_i, u_i, s)$, *и наоборот*.

Каноническая система дифференциальных уравнений Эйлера (7) совпадает с характеристической системой дифференциальных уравнений для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$J_s + L\left(J_{u_i}, u_i, s\right) = 0 \tag{8}$$

[1]) Определитель в формуле (4) тогда тождественно равен нулю.

с неизвестной функцией $J(u_1, u_2, \ldots, u_n, s)$. В п. 2 и 4 мы увидим, что уравнение (8) имеет непосредственное значение для вариационной задачи.

2. Геодезическое расстояние, или эйконал, и его производные. Дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби. Теперь мы сделаем дополнительное предположение о том, что в некоторой области $(n+1)$-мерного пространства переменных u_i, s каждую пару

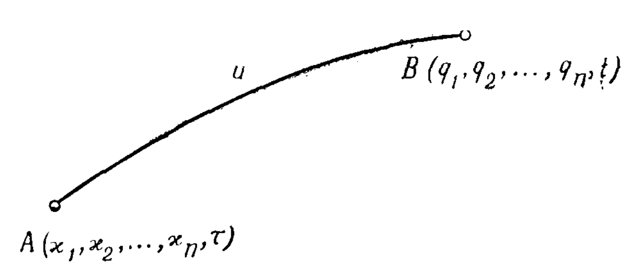


Рис. 2.

точек $A(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n, \tau)$ и $B(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ можно единственным образом соединить экстремалью (см. рис. 2). Такую экстремаль и соответствующие моменты можно представить через параметры $\varkappa_i$, τ, q_i, t в виде

$$u_\nu = f_\nu(s, \varkappa_i, \tau, q_i, t), \tag{9}$$

$$v_\nu = g_\nu(s, \varkappa_i, \tau, q_i, t). \tag{9'}$$

В частности, мы имеем для точек A и B соотношения

$$\begin{aligned} \varkappa_\nu &= f_\nu(\tau, \varkappa_i, \tau, q_i, t), \\ q_\nu &= f_\nu(t, \varkappa_i, \tau, q_i, t). \end{aligned} \tag{10}$$

Направление экстремали в этих точках дается формулами

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}_\nu &\equiv \dot{u}_\nu(A) = \dot{f}_\nu(\tau, \varkappa_i, \tau, q_i, t), \\ \dot{q}_\nu &\equiv \dot{u}_\nu(B) = \dot{f}_\nu(t, \varkappa_i, \tau, q_i, t); \end{aligned} \tag{11}$$

здесь точка обозначает дифференцирование по первому аргументу s (дифференцирование по экстремали). Величины (11), а также так называемые *функции поля* (т. е. моменты v_ν в конечных точках)

$$\begin{aligned} \pi_\nu &= g_\nu(\tau, \varkappa_i, \tau, q_i, t) = F_{\dot{\varkappa}_\nu}(\dot{\varkappa}_i, \varkappa_i, \tau), \\ p_\nu &= g_\nu(t, \varkappa_i, \tau, q_i, t) = F_{\dot{q}_\nu}(\dot{q}_i, q_i, t), \end{aligned} \tag{12}$$

являются функциями $2n+2$ величин $\varkappa_i$, τ, q_i, t.

Если мы введем функции (9) и (9′) в интеграл вариационной задачи

$$J=\int_{\tau}^{t} F(\dot{u}_i,\ u_i,\ s)\,ds=\int_{\tau}^{t}\left(\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \dot{u}_\nu - L(v_i, u_i, s)\right)ds,$$

то этот интеграл станет функцией $2n+2$ переменных $\varkappa_i$, τ, q_i, t:

$$J(\varkappa_i,\ \tau,\ q_i,\ t).$$

Эта функция называется *геодезическим расстоянием между точками A и B*; это название связано с тем, что вариационную задачу можно рассматривать как обобщение задачи об отыскании кратчайшего пути между двумя точками в пространстве. Функция $J(\varkappa_i,\ \tau,\ q_i,\ t)$ допускает также оптическую интерпретацию. Будем рассматривать s как время и положим

$$F=\frac{\sqrt{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu^2}}{V(\dot{u}_i,\ u_i,\ s)},$$

где функция V — скорость распространения света в пространстве u_i, зависящая от положения, направления и времени. Если мы предположим, *в соответствии с принципом Ферма о наименьшем времени распространения света* (см. т. I, гл. IV, § 1), что лучи света являются экстремалями нашей вариационной задачи, то функция J даст время, необходимое для того, чтобы свет прошел расстояние от A до B. В оптических задачах функцию J называют *эйконалом*.

Основная задача данной теории состоит в том, чтобы выразить производные эйконала J по его $2n+2$ аргументам через функцию F.

Частные производные эйконала определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} J_t &= -L(p_i,\ q_i,\ t)=F(\dot{q}_i,\ q_i,\ t)-\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu},\\ J_{q_\nu} &= p_\nu = F_{\dot{q}_\nu} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и

$$\left.\begin{aligned} J_\tau &= L(\pi_i,\ \varkappa_i,\ \tau)=-F(\dot{\varkappa}_i,\ \varkappa_i,\ \tau)+\sum_{\nu=1}^{n} \dot{\varkappa}_\nu F_{\dot{\varkappa}_\nu},\\ J_{\varkappa_\nu} &= -\pi_\nu = -F_{\dot{\varkappa}_\nu} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

которые вместе дают соотношение

$$\delta J=-L(p_i,\ q_i,\ t)\,\delta t+\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \delta q_\nu + L(\pi_i,\ \varkappa_i,\ \tau)\,\delta\tau-\sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \delta\varkappa_\nu; \tag{15}$$

здесь $\dot{q}_i$, $\dot{\varkappa}_i$, p_i, π_i *определяются формулами* (11) *и* (12).

Эти формулы проще всего получить непосредственно из канонического представления вариационной задачи. Рассмотрим $2n+2$ координат начальной точки A и конечной точки B как непрерывно дифференцируемые, но в остальном произвольные функции параметра ε; дифференцирование по этому параметру будем обозначать символом δ. Учитывая, что для экстремалей выполняются канонические дифференциальные уравнения (7), мы получим

$$\delta J = \left[\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_i, q_i, t)\right]\delta t - \left[\sum_{\nu=1}^{n} \dot{\varkappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_i, \varkappa_i, \tau)\right]\delta\tau + \\ + \sum_{\nu=1}^{n}\int_\tau^t \left[(v_\nu \delta\dot{u}_\nu + \dot{u}_\nu \delta v_\nu) - (L_{u_\nu}\delta u_\nu + L_{v_\nu}\delta v_\nu)\right] ds = \\ = \left[\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_i, q_i, t)\right]\delta t - \left[\sum_{\nu=1}^{n} \dot{\varkappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_i, \varkappa_i, \tau)\right]\delta\tau + \\ + \sum_{\nu=1}^{n}\int_\tau^t (v_\nu \delta u_\nu)^{\cdot}\, ds.$$

Из формул (10) непосредственно следует, что

$$\delta\varkappa_\nu = \dot{\varkappa}_\nu \delta\tau + \delta u_\nu|_{s=\tau},$$
$$\delta q_\nu = \dot{q}_\nu \delta t + \delta u_\nu|_{s=t}.$$

Так как

$$\delta J = \left[\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_i, q_i, t)\right]\delta t - \left[\sum_{\nu=1}^{n} \dot{\varkappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_i, \varkappa_i, \tau)\right]\delta t + \\ + \left[\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \delta u_\nu\right]_\tau^t,$$

мы имеем

$$\delta J = -L(p_i, q_i, t)\,\delta t + L(\pi_i, \varkappa_i, \tau)\,\delta\tau + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \delta q_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \delta\varkappa_\nu,$$

т. е. как раз требуемое соотношение (15).

Мы можем сразу исключить моменты p_i из уравнений (13). Таким образом мы получим *дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби*

$$J_t + L(J_{q_i}, q_i, t) = 0 \tag{16}$$

для геодезического расстояния J как функции конечной точки B; это уравнение называется также *уравнением эйконала*. Оно совпадает с уравнением (8) из п. 1. Как было отмечено в п. 1, характеристические уравнения для уравнения (16) совпадают с на-

шими каноническими дифференциальными уравнениями, т. е. *характеристики уравнения Гамильтона — Якоби* (16) *являются экстремалями канонической вариационной задачи.*

3. Однородные подинтегральные функции. В том исключительном случае, когда F есть однородная функция степени единица относительно величин $\dot{u}_\nu$, можно также провести соответствующие рассуждения. В этом случае мы имеем

$$|F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu}| = 0, \quad \text{а также} \quad L = -F + \sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu F_{\dot{u}_\nu} = 0,$$

и переход к канонической форме с помощью преобразования Лежандра не может быть осуществлен. Однако, в этом случае, как и в п. 2, уравнения $J_t = -L = 0$, $J_{q_\nu} = F_{\dot{q}_\nu}$ сохраняют силу, и, кроме того, выражения $F_{\dot{q}_\nu}$ однородны степени нуль относительно $\dot{q}_\nu$. Следовательно, отношения чисел $\dot{q}_\nu$ могут быть выражены через производные J_{q_ν}, а соотношение однородности

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu} = F$$

заменяет дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби.

В качестве примера рассмотрим случай *геодезических линий*, соответствующий равенствам

$$F = \sqrt{Q}, \quad Q = \sum_{\nu, \mu=1}^{n} a_{\nu\mu} \dot{u}_\nu \dot{u}_\mu,$$

где коэффициенты $a_{\nu\mu}$ квадратичной формы Q являются функциями от $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Мы получим

$$J_t = 0, \quad J_{q_\nu} = F_{\dot{q}_\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_{\nu\mu} \dot{q}_\mu}{F}$$

или

$$\frac{\dot{q}_\nu}{F} = \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu} J_{q_\mu},$$

где числа $A_{\nu\mu}$ составляют матрицу, обратную по отношению к матрице $a_{\nu\mu}$. В силу соотношения однородности, умножение на $F_{\dot{q}_\nu} = J_{q_\nu}$ и суммирование дают уравнение

$$\sum_{\nu, \mu=1}^{n} A_{\nu\mu} J_{q_\nu} J_{q_\mu} = 1 \tag{17}$$

в качестве дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби для геодезического расстояния J; отсюда получается дифференциальное уравнение

$$\sum_{\nu, \mu=1}^{n} A_{\nu\mu}\Gamma_{q_\nu}\Gamma_{q_\mu} = 4\Gamma \qquad (17')$$

для величины $\Gamma = J^2$. Например, в случае евклидова расстояния, когда $F = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu^2}$, мы получаем дифференциальное уравнение

$$1 = \sum_{\nu=1}^{n} J_{q_\nu}^2.$$

Так как s не входит явно в F, тот же общий результат, т. е. уравнение (17), можно получить для задачи о геодезических кривых, выбирая параметр s таким образом, чтобы было $Q = F^2 = 1$. Из дифференциальных уравнений Эйлера

$$\frac{d}{ds} F_{\dot{u}_\nu} - F_{u_\nu} = 0, \quad F = \sqrt{Q},$$

или (18)

$$\frac{d}{ds}\frac{Q_{\dot{u}_\nu}}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{\sqrt{Q}} Q_{u_\nu} = 0,$$

мы тогда получаем

$$\frac{d}{ds} Q_{\dot{u}_\nu} - Q_{u_\nu} = 0. \qquad (18')$$

Эта система линейных дифференциальных уравнений всегда имеет Q в качестве интеграла[1]); таким образом, мы можем, не вызывая противоречий, наложить дополнительное ограничение $Q = 1$. Теперь мы можем привести новые дифференциальные уравнения (18′) к каноническому виду, так как они относятся к квадратичной подинтегральной функции Q, а не к функции $\sqrt{Q}$, которая является однородной

[1]) Доказательство. На некоторой экстремали Q становится функцией s с производной

$$\frac{dQ}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n} Q_{\dot{u}_\nu}\ddot{u}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} Q_{u_\nu}\dot{u}_\nu.$$

В силу соотношения однородности, правая часть равна

$$2\frac{dQ}{ds} + \sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu \left[Q_{u_\nu} - \frac{d}{ds} Q_{\dot{u}_\nu}\right].$$

Из (18′) тогда вытекает, что $dQ/ds = 2dQ/ds$, и, следовательно, что $dQ/ds = 0$.

степени единица. В силу однородности Q, каноническое преобразование с функцией H вместо L дает

$$\begin{aligned} -Q+\sum_{\nu=1}^{n} Q_{\dot u_\nu}\dot u_\nu &= Q = H(p_i,\ u_i),\\ \dot u_\nu &= H_{p_\nu}, \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\\ \dot p_\nu &= -H_{u_\nu}. \end{aligned} \tag{19}$$

Из дополнительного условия $Q=1$ мы немедленно получаем

$$H(J_{u_i},\ u_i)=1,$$

что эквивалентно нашему уравнению (17).

4. Поле экстремалей. Дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби. Вернемся к функции расстояния J, рассмотренной в п. 2. Если мы зафиксируем начальную точку A, то J станет функцией $n+1$ координат q_ν, t одной лишь конечной точки B и будет удовлетворять дифференциальному уравнению Гамильтона — Якоби (16); мы предположим, как было подчеркнуто раньше, что конечная точка B может находиться только в области, для которой экстремали AB, а следовательно, и функции поля, заданные формулами (11) и (12), определены однозначно. Такая область вместе с соответствующим семейством экстремалей называется *полем*.

Понятие поля и связанной с ним *функции расстояния* от $n+1$ переменных, удовлетворяющей уравнению Гамильтона — Якоби, можно теперь расширить. Мы определим *геодезическое расстояние* не только от фиксированной точки, но и *от фиксированной начальной поверхности*

$$T(\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \ldots,\ \varkappa_n,\ \tau)=0.$$

Это понятие геодезического расстояния возникает следующим образом. Мы временно считаем фиксированной конечную точку экстремали B и ищем такую начальную точку A на заданной поверхности

$$T(\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \ldots,\ \varkappa_n,\ \tau)=0, \tag{20}$$

что геодезическое расстояние $J(A,\ B)$ остается стационарным, когда варьируется точка A. Таким образом, в формуле (15) мы должны положить равными нулю вариации δq_ν, δt координат конечной точки B, и, так как $\delta J=0$, мы получаем условие

$$L(\pi_i,\ \varkappa_i,\ \tau)\,\delta\tau-\sum_{\nu=1}^{n}\pi_\nu\delta\varkappa_\nu=0$$

для начальной точки A. Это условие должно выполняться всегда, независимо от того, каким именно образом варьируется начальная

точка на заданной поверхности $T=0$, т. е. формула (21) должна быть следствием уравнения (20) или его же в продифференцированном виде

$$\delta T = \sum_{\nu=1}^{n} T_{\varkappa_\nu} \delta\varkappa_\nu + T_\tau \delta\tau = 0.$$

Это требование эквивалентно следующему условию (так называемому *условию трансверсальности*, см. т. I, гл. IV, § 5):

$$(-L) : \pi_\nu = T_\tau : T_{\varkappa_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

где $L = L(\pi_i, \varkappa_i, \tau)$, или условию

$$\left[F - \sum_{\mu=1}^{n} \dot{\varkappa}_\mu F_{\dot{\varkappa}_\mu}\right] : F_{\dot{\varkappa}_\nu} = T_\tau : T_{\varkappa_\nu}, \tag{22'}$$

где $F = F(\dot{\varkappa}_i, \varkappa_i, \tau)$. Условие трансверсальности является соотношением между координатами точки на поверхности $T=0$ и производными $\dot{\varkappa}_\nu$, или канонически сопряженными величинами π_ν, экстремали. Экстремаль, удовлетворяющая условиям (22) в точке A, называется *трансверсалью* к поверхности $T=0$. Если построить трансверсаль в каждой точке такой поверхности, то эти кривые дадут n-параметрическое семейство.

Предположим, кроме того, что для каждой точки некоторой области на поверхности T мы можем построить такую трансверсаль и что семейство этих трансверсалей покрывает некоторую область в пространстве, примыкающую к области на поверхности, или, другими словами, образует *поле экстремалей*, так что через каждую точку области проходит в точности одна экстремаль. Тогда каждой точке B этого поля соответствует единственная точка A на поверхности. В этом поле величины $\dot{q}_i$ и, в частности, величины $\dot{q}_i$ для экстремалей являются однозначно определенными функциями положения. Величину эйконала между A и B можно, таким образом, рассматривать как функцию координат q_i, t конечной точки B. Этот эйконал измеряет стационарное геодезическое расстояние от точки B до точек поверхности $T=0$, короче — геодезическое расстояние от точки B до этой поверхности.

Случай фиксированной начальной точки A, который мы рассматривали раньше, есть предельный случай, возникающий тогда, когда начальная поверхность (например, сфера) вырождается в точку. Как легко видеть, в частном случае подынтегральной функции $F = \sqrt{1 + \sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu^2}$ геодезическое расстояние совпадает с евклидовым расстоянием по прямой. Здесь поле экстремалей состоит из семейства прямых, ортогональных поверхности $T=0$, — специального

вида n-параметрического семейства прямых. Таким образом, общее понятие поля экстремалей есть лишь обобщение этого элементарного понятия, когда евклидово расстояние заменяется геодезическим расстоянием, определенным нашей вариационной задачей, а прямая линия между двумя точками — соответствующей экстремалью.

Семейство поверхностей $J = \text{const}$ называется *семейством параллельных поверхностей нашей вариационной задачи*. Согласно условиям трансверсальности (22), (22′), для нашего геодезического расстояния выполняется соотношение (21); следовательно, из формулы (15) мы немедленно получаем для геодезического расстояния от поверхности то же самое соотношение, которое мы получили для фиксированной начальной точки A:

$$\delta J = -L(p_i, q_i, t)\,\delta t + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \delta q_\nu. \tag{23}$$

Таким образом, мы приходим к следующему общему результату.

Если функции

$$\dot{q}_\nu = \dot{q}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \quad (\textit{или} \quad p_\nu = p_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t))$$

принадлежат полю экстремалей, трансверсальному по отношению к непрерывно дифференцируемой поверхности $T = 0$, *то в этом поле частные производные геодезического расстояния* $J = J(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ *от поверхности* $T = 0$ *задаются формулами* (13)

$$J_t = F(\dot{q}_i, q_i, t) - \sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu} = -L(p_i, q_i, t),$$

$$J_{q_\nu} = F_{\dot{q}_\nu} = p_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Само геодезическое расстояние удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных Гамильтона — Якоби (*уравнению эйконала*) (16)

$$J_t + L(J_{q_i}, q_i, t) = 0.$$

Это утверждение основано на предположении, что возможно построение соответствующего поля экстремалей. Исключительный случай возникает, если сама начальная поверхность порождена трансверсальными к ней экстремалями (если она „характеристическая“), т. е. если экстремали целиком лежат на начальной поверхности. Однако вполне возможно, что трансверсальные кривые касаются начальной поверхности, но не лежат на ней; тогда они могут служить для построения поля, примыкающего к начальной поверхности с одной стороны. Начальная поверхность называется тогда *каустической поверхностью*, и вышеизложенный результат справедлив также и в этом случае.

Теперь мы сформулируем теорему, *обратную* предыдущей.

Если $J(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ *есть решение уравнения* (16), *то существует поле экстремалей, такое, что входящие в него экстремали трансверсальны по отношению ко всем поверхностям семейства* $J = \text{const}$, *и, в частности, к начальной поверхности* $J = 0$. *В этом случае* J *является геодезическим расстоянием от начальной поверхности в рассматриваемом поле экстремалей.*

Чтобы доказать эту обратную теорему, мы будем исходить из заданного решения J дифференциального уравнения (16). Введем n величин p_ν, определяющих поле в соответствующей области, с помощью уравнений

$$p_\nu = J_{q_\nu}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t).$$

В силу (16), мы имеем

$$J_t = -L(p_i, q_i, t).$$

Теперь мы определим n-параметрическое семейство кривых посредством системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{q}_\nu = L_{p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

где величины

$$p_i = J_{q_i}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

подставлены в правую часть вместо переменных p_ν. Величины p_ν являются функциями параметра t на интегральных кривых этой системы дифференциальных уравнений; дифференцирование по этому параметру дает

$$\dot{p}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} J_{q_\nu q_\mu}\dot{q}_\mu + J_{q_\nu t}.$$

С другой стороны, продифференцировав дифференциальное уравнение (16) по q_ν, мы получаем тождество

$$J_{q_\nu t} + L_{q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{n} L_{p_\mu} J_{q_\nu q_\mu} = 0,$$

и, таким образом,

$$\dot{p}_\nu = -L_{q_\nu}.$$

Эти уравнения вместе с уравнениями $\dot{q}_\nu = L_{p_\nu}$ показывают, что наше семейство кривых является n-параметрическим семейством экстремалей. Если в условии трансверсальности (22) мы заменим π_ν на J_{q_ν}, $\varkappa_i$, τ на q_i, t и, наконец, T на $J(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$, то мы сразу увидим, что это семейство экстремалей трансверсально по отношению ко всем поверхностям семейства $J = \text{const}$.

5. Конус лучей. Конструкция Гюйгенса. В предыдущем пункте мы решили вариационную задачу и таким образом построили решения дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона — Якоби, все еще зависящие от одной произвольной функции, а именно, решения, обращающиеся в нуль на заданной поверхности $T=0$. Кроме того, было показано, что тем самым мы исчерпали все возможные решения этого дифференциального уравнения с частными производными. Частный случай, когда начальная поверхность вырождается в точку, т. е. функция J становится геодезическим расстоянием от фиксированной точки, приводит к решениям дифференциального уравнения с частными производными, которые раньше были названы *интегральными коноидами*, или *конусами лучей*. Соответствующие поверхности $J=\text{const}=c$ естественно назвать *геодезическими сферами*.

Необходимо отметить, что построение поверхностей $J=c$, параллельных произвольной заданной поверхности $T=0$, по существу эквивалентно построению всех решений уравнения (16) с помощью огибающих, исходя из решения, содержащего n параметров. Действительно, поверхности $J=c$ являются огибающими параллельных поверхностей радиуса c вокруг точек A на начальной поверхности. Это построение восходит к идее Гюйгенса рассматривать в момент $t=c$ „фронт волны" света, исходящего из поверхности $T=0$ в момент $t=0$, как огибающую фронтов сферических волн, исходящих из отдельных точек поверхности $T=0$.

Надо снова подчеркнуть, что все проведенные выше построения делаются „в малом", т. е. относятся к достаточно малым окрестностям, например, некоторого луча. Рассмотрения „в целом" требуют дополнительных рассуждений, как мы увидим ниже.

6. Инвариантный интеграл Гильберта для представления эйконала. Данные выше выражения для производных функции J позволяют нам рассматривать сам эйконал как криволинейный интеграл от полного дифференциала, не зависящий от пути интегрирования. В поле в пространстве u_i, s мы соединяем точку A с переменной конечной точкой B произвольной кусочно-гладкой кривой C, заданной функциями $u_i(s)$, с параметром s и производными $u_i'(s)$. Производные и моменты, относящиеся к точкам поля и соответствующие экстремалям этого поля, являются функциями u_i, s; мы обозначим их через $\dot{u}_i$, v_i, как в п. 1.

Для любой функции J координат точки B справедливо уравнение

$$J(B)-J(A)=\int_A^B\left(\sum_{\nu=1}^n J_{u_\nu}\,du_\nu+J_s\,ds\right), \tag{24}$$

причем путь интегрирования C между точками A и B произволен. Мы рассмотрим геодезическое расстояние J от точки B до начальной поверхности $T=0$ в нашем поле (если A лежит на поверхности $T=0$, то $J(A)=0$). Подставляя частные производные функции J из формул (13), мы получим следующее интегральное представление для эйконала между точками $A:(\varkappa_i,\ \tau)$ и $B:(q_i,\ t)$:

$$J(q_i,\ t)-J(\varkappa_i,\ \tau)=\int\limits_A^B\left(F(\dot{u}_i,\ u_i,\ s)+\sum_{\nu=1}^{n}(u'_\nu-\dot{u}_\nu)F_{\dot{u}_\nu}\right)ds, \qquad (25)$$

или

$$J(q_i,\ t)-J(\varkappa_i,\ \tau)=\int\limits_A^B\left(\sum_{\nu=1}^{n}u'_\nu v_\nu-L(v_i,\ u_i,\ s)\right)ds.$$

Символы u'_ν снова обозначают производные по кривой C, а символы $\dot{u}_\nu$ и v_ν обозначают определенные ранее величины, относящиеся к полю, т. е. производные и моменты, которые в точках поля соответствуют проходящим через них экстремалям поля. Эти величины рассматриваются здесь как заданные функции координат в поле.

Обратно, „инвариантный интеграл Гильберта“ (25) обладает следующим свойством. Если в заданной области $(n+1)$-мерного пространства u, s заданы функции $v_\nu(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ s)$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, такие, что интеграл

$$\int\limits_A^B\left(\sum_{\nu=1}^{n}v_\nu u'_\nu-L(v_i,\ u_i,\ s)\right)ds,$$

взятый между парой точек A и B в пространстве, не зависит от пути интегрирования, то функции $v_\nu(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ s)$ являются величинами некоторого поля экстремалей; значением интеграла как функции конечной точки B является функция расстояния $J(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ t)$, соответствующая этому полю экстремалей.

Это можно сразу доказать, если вспомнить, что для интеграла такого типа, не зависящего от пути интегрирования, в конечной точке B выполняются соотношения

$$J_{q_\nu}=p_\nu, \quad J_t=-L.$$

Следовательно, такой интеграл как функция своего верхнего предела удовлетворяет дифференциальному уравнению Гамильтона — Якоби (16) и наше утверждение следует из теоремы п. 4, согласно которой любое решение дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби есть функция расстояния некоторого поля экстремалей.

Таким образом ясно, что дифференциальное уравнение с частными производными Гамильтона — Якоби, построение поля экстремалей

и соответствующих функций расстояния, а также независимость интеграла вида (25) от пути интегрирования, являются эквивалентными описаниями одной и той же ситуации.

7. Теорема Гамильтона и Якоби. Из интеграла Гильберта мы получаем новое понимание теоремы Якоби (см. § 8). Если $J(q_1, q_2, \ldots, q_n, t, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — решение дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона — Якоби, для которого определитель $|J_{a_\nu q_\mu}|$ не обращается в нуль, то уравнения $J_{a_\nu} = b_\nu$ и $J_{q_\nu} = p_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ дают $2n$-параметрическое семейство решений канонической системы уравнений.

Наш прежний результат показывает, что функция J определяет поле экстремалей, зависящее от параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а J в этом поле экстремалей представляется интегралом Гильберта (25). Кроме того, дифференцируя под знаком интеграла, мы получаем интегральное представление

$$J_{a_\mu} = \int_A^B \sum_{\nu=1}^n (u'_\nu - \dot{u}_\nu) F_{\dot{u}_\nu a_\mu} \, ds, \tag{26}$$

которое, конечно, также не зависит от пути интегрирования C. Если точка B сдвигается из начального положения B_0 по экстремали поля, соответствующей системе значений a_i, т. е. если рассматриваемая дуга C является экстремалью и, следовательно, $u'_\nu = \dot{u}_\nu$, то подинтегральная функция в (26) обращается в нуль и мы имеем

$$J_{a_\nu} = b_\nu. \tag{27}$$

Здесь b_ν — постоянная, равная величине интеграла между A и B_0. Обратно, если семейство кривых $q_\nu(t, a_\nu, b_\nu)$ определяется уравнением $J_{a_\nu} = b_\nu$, что возможно только единственным образом в некоторой окрестности рассматриваемой системы значений a_i, b_i в силу условия $|J_{a_\nu q_\mu}| \neq 0$, то эти кривые должны быть экстремалями. Действительно, подинтегральная функция в (26) должна обращаться в нуль на дуге C из этого семейства, и мы получаем линейную однородную систему уравнений относительно разностей $u'_\nu - \dot{u}_\nu$ с определителем $|F_{\dot{u}_\nu a_\mu}|$. С другой стороны, согласно п. 4, величины, характеризующие поле, задаются формулами $v_\nu = F_{\dot{u}_\nu} = J_{u_\nu}$. Таким образом, наш определитель совпадает с $|J_{u_\nu a_\mu}|$ и, следовательно, по предположению не обращается в нуль. Тогда мы имеем $u'_\nu - \dot{u}_\nu = 0$, откуда видно, что кривые C являются экстремалями.

В следующем параграфе мы дадим другое доказательство теоремы Гамильтона — Якоби.

§ 10. Канонические преобразования и их приложения

1. Каноническое преобразование. Каноническое представление характеристических дифференциальных уравнений вариационной задачи или дифференциального уравнения с частными производными первого порядка является отправным пунктом *теории канонических преобразований*, имеющей важные приложения.

Пусть заданы функция $L(v_\nu, u_\nu, s)$ и соответствующая каноническая система дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_\nu = L_{v_\nu}, \quad \dot{v}_\nu = -L_{u_\nu}. \tag{1}$$

Мы ставим вопрос, можно ли и каким способом преобразовать канонически сопряженные переменные v_ν, u_ν в новые переменные

$$\begin{aligned} \eta_\nu &= \eta_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n), \\ \omega_\nu &= \omega_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n) \end{aligned} \tag{2}$$

и получить таким образом из функции $L(v_\nu, u_\nu, s)$ новую функцию $\Lambda(\eta_\nu, \omega_\nu, t)$, такую, чтобы решения новой канонической системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\omega}_\nu = \Lambda_{\eta_\nu}, \quad \dot{\eta}_\nu = -\Lambda_{\omega_\nu} \tag{3}$$

соответствовали решениям исходных канонических дифференциальных уравнений (1). Такое преобразование переменных, или преобразование канонической системы дифференциальных уравнений, называется *каноническим преобразованием*.

Канонические преобразования легко получить, переходя к вариационной задаче. Действительно, наши требования выполняются, если при преобразовании (2) подинтегральная функция одной канонической вариационной задачи переходит в подинтегральную функцию другой такой задачи с точностью до слагаемого вида дивергенции (см. т. I, гл. IV, § 3, п. 5), которое не влияет на дифференциальные уравнения Эйлера. Этого можно добиться, если, например, выбрать преобразование (2) так, чтобы тождественно по переменным u_i, ω_i, $\dot{u}_i$, $\dot{\omega}_i$ выполнялось соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_i, u_i, s) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \dot{\omega}_\nu \eta_\nu - \Lambda(\eta_i, \omega_i, s) + \frac{dW}{ds}; \tag{4}$$

здесь

$$W = W(\omega_i, u_i, s)$$

— произвольная дифференцируемая функция и

$$\frac{dW}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n} W_{\omega_\nu}\dot{\omega}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} W_{u_\nu}\dot{u}_\nu + W_s.$$

Наше уравнение (4) перейдет в уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu (v_\nu - W_{u_\nu}) - \sum_{\nu=1}^{n} \dot{\omega}_\nu (\eta_\nu + W_{\omega_\nu}) - L + \Lambda - W_s = 0,$$

и так как оно должно выполняться тождественно по $\dot{u}_\nu$, $\dot{\omega}_\nu$, u_ν, ω_ν, мы сразу получаем следующую *теорему*: уравнения (1) переводятся в уравнения (3) посредством канонического преобразования, которое зависит от произвольной функции $W(\omega_\nu, u_\nu, s)$ и получается из соотношений

$$\begin{gathered} v_\nu = W_{u_\nu}, \quad \eta_\nu = -W_{\omega_\nu}, \\ \Lambda = L + W_s. \end{gathered} \tag{5}$$

Функция Λ должна быть затем выражена через переменные ω_ν и η_ν вместо u_ν и v_ν.

Совершенно аналогичным способом можно получить другие выражения, определяющие канонические преобразования, выбирая другие переменные и в соответствии с этим, исходя из второй формы канонической вариационной задачи, данной в § 9, п. 1, стр. 122. Например, пусть W — произвольная функция v_ν, ω_ν, s. Тогда уравнения

$$\begin{gathered} u_\nu = W_{v_\nu}, \quad \eta_\nu = -W_{\omega_\nu}, \\ \Lambda = L - W_s \end{gathered} \tag{6}$$

дают каноническое преобразование, если мы затем введем в Λ в качестве переменных величины ω_ν, η_ν. Точно так же получаются еще два вида канонических преобразований с помощью произвольных функций

$$W(u_\nu, \eta_\nu, s) \quad \text{и} \quad W(v_\nu, \omega_\nu, s).$$

Эти произвольные функции всегда характеризуются тем, что они зависят от одной серии старых и одной серии новых переменных.

2. Новое доказательство теоремы Гамильтона—Якоби. Наши результаты приводят к простому новому доказательству теоремы Гамильтона — Якоби. Мы попытаемся решить заданные канонические дифференциальные уравнения (1), построив каноническое преобразование с функцией Λ таким образом, чтобы эта функция обратилась в тождественный нуль, так что две новые канонически сопряженные переменные будут постоянны вдоль каждой траектории.

Мы находим эту функцию Λ, предполагая, что нам известно решение $J(u_1, u_2, \ldots, u_n, t, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби $J_t + L(J_{u_\nu}, u_\nu, s) = 0$, зависящее не только от независимых переменных, но и от n параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которого определитель $|J_{u_\nu a_\mu}|$ отличен от нуля в рассматриваемой области. При построении канонического преобразования мы выбираем

функцию $J(u_\nu, \omega_\nu, s)$ за $W(u_\nu, \omega_\nu, s)$ и сразу из формул (5) получаем каноническое преобразование

$$v_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu}, \quad \eta_\nu = -\frac{\partial J}{\partial \omega_\nu}, \quad \Lambda = L(v_\nu, u_\nu, t) + \frac{\partial J}{\partial s}.$$

Так как наше дифференциальное уравнение выполняется тождественно по $v_\nu = \partial J/\partial u_\nu$, u_ν и s, то мы действительно имеем $\Lambda \equiv 0$. Новые канонические дифференциальные уравнения имеют вид

$$\dot{\omega}_\nu = 0, \quad \dot{\eta}_\nu = 0,$$

а их решениями являются

$$\omega_\nu = a_\nu = \text{const},$$
$$\eta_\nu = J_{a_\nu} = b_\nu = \text{const};$$

это и есть утверждение теоремы Гамильтона — Якоби.

3. Вариация постоянных. (Теория канонических возмущений.) Другим приложением теории канонических преобразований является *теория канонических возмущений*, применяемая в физике и астрономии.

Предположим, что функция L имеет вид суммы

$$L = L_1(v_\nu, u_\nu, s) + L_2(v_\nu, u_\nu, s) \tag{7}$$

и что уже проинтегрированы канонические дифференциальные уравнения с функцией L_1, т. е. мы уже имеем полный интеграл $J(u_\nu, a_\nu, s)$ дифференциального уравнения с частными производными

$$J_t + L_1\left(\frac{\partial J}{\partial u_\nu}, u_\nu, s\right) = 0.$$

Тогда мы преобразуем канонические дифференциальные уравнения, соответствующие функции L, взяв $J(u_\nu, \omega_\nu, s)$ в качестве функции W, порождающей каноническое преобразование. Другими словами, мы вводим канонически сопряженные переменные с помощью формул

$$v_\nu = J_{u_\nu}, \quad \eta_\nu = -J_{\omega_\nu}$$

и новую функцию Лежандра

$$\Lambda = L + J_s = L - L_1 = L_2.$$

Если бы не было „возмущающего члена“ L_2, т. е. если бы он равнялся нулю, то, согласно п. 2, новые канонически сопряженные переменные для каждой траектории системы дифференциальных уравнений были бы постоянными. Из-за возмущающего члена L_2 они

переходят в новые переменные, удовлетворяющие каноническим „уравнениям возмущений“

$$\dot{\omega}_\nu = \frac{\partial L_2}{\partial \eta_\nu}, \quad \dot{\eta}_\nu = -\frac{\partial L_2}{\partial \omega_\nu}. \qquad (8)$$

В некоторых случаях удается существенно упростить задачу путем такого разложения задачи интегрирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 К ГЛАВЕ II

§ 1. Дальнейшее изучение характеристических многообразий

В этом параграфе будет применен несколько другой подход; характеристики будут введены таким способом, который можно обобщить на дифференциальные уравнения высших порядков.

1. Замечания о дифференцировании в пространстве n измерений. В некоторой области изменения независимых переменных x_1, x_2, ..., x_n рассмотрим функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с непрерывными производными. В точке P с координатами x_1, x_2, ..., x_n числа a_1, a_2, ..., a_n, составляющие вектор a, можно задать так, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0.$$

Через точку P проведем прямую, точки которой выражаются через параметр s следующим образом:

$$x_1 + a_1 s, \; x_2 + a_2 s, \; \ldots, \; x_n + a_n s.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}$$

называется производной функции u по s или производной u „в направлении“, заданном вектором a. Следовательно, в каждой точке символ

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

обозначает дифференцирование в направлении вектора a [1]).

---

[1]) Если величины a_i являются непрерывно дифференцируемыми функциями положения

$$a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то направления, заданные функциями a_i в каждой точке пространства, образуют поле направлений, траектории которого однозначно определяются систе-

Рассмотрим в n-мерном пространстве $(n-1)$-мерную поверхность B: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ и функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, производные которой непрерывны в некоторой окрестности поверхности B. Далее, пусть P есть точка поверхности B, в которой

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^2 \neq 0,$$

и пусть $a \neq 0$ — произвольный вектор.

Мы будем рассматривать производную u на B в направлении, заданном вектором a:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}, \tag{1}$$

Если выполняются равенства

$$a_i = \lambda \varphi_{x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то выражение (1) называется *производной „по направлению нормали“*; в частности, если $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, так что

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{x_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \varphi_{x_j}^2}} u_{x_i},$$

то мы будем говорить о *„нормальной“ производной* функции u в точке P.

Если вектор a касается B в точке P и, следовательно, перпендикулярен нормали в P, т. е. если

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{x_i} = 0,$$

мой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, $\partial/\partial s$ обозначает дифференцирование по этому параметру s. Здесь s не обязательно должно быть длиной дуги траектории; однако, если длину дуги обозначить через σ, то σ связано с s уравнением $(\partial\sigma/\partial s)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Производная функции u вдоль кривой по длине дуги σ в соответствии с этим определяется формулой

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

то $\partial u/\partial s = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}$ называется *„тангенциальной“ производной*, или *„внутренней“ производной на поверхности* B; при этом говорят, что она „лежит на поверхности B“; с другой стороны, если $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{x_i} \neq 0$, то $\partial u/\partial s$ называется *„выводящей“ производной, выводящей из поверхности* B.

Например, выражения

$$\varphi_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \varphi_{x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2}$$

для любой пары индексов $i \neq k$ представляют собой внутренние производные на поверхности; мы можем считать, что формула (2) дает производную в направлении, полученном при пересечении поверхности $\varphi = 0$ двумерной плоскостью, проходящей через P в направлении осей x_i и x_k.

Внутренние производные функции u на поверхности зависят только от значений u на самой поверхности; следовательно, они известны, если известны значения u на поверхности B. В самом деле, если в некоторой окрестности B мы введем вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ новые независимые переменные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, такие, что $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ являются $n-1$ независимыми параметрами на B, а $\xi_1 = \varphi$, то $u_{x_i} = u_\varphi \varphi_{x_i} + \ldots$, где точки заменяют выражения, содержащие только производные u по внутренним параметрам $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$. Поэтому выражение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = u_\varphi \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{x_i} + \sum_{k=2}^{n} u_{\xi_k} \sum_{i=1}^{n} a_i (\xi_k)_{x_i}$$

при условии, что $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{x_i} = 0$, известно, если заданы значения $u(0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ функции u на B.

Очевидно, что из $n-1$ взаимно независимых внутренних производных функции u, лежащих на B (например, $\varphi_{x_i} \partial u/\partial x_n - \varphi_{x_n} \partial u/\partial x_i$, если $\varphi_{x_n} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$), и одной выводящей производной (например, u_φ), образуя их линейные комбинации, мы можем получить все производные функции u. Таким образом, все производные u_{x_i} известны, если на B заданы функция u и одна ее выводящая производная.

В частности, если $n = 2$ и $x_1 = x$, $x_2 = y$, то B — кривая на плоскости x, y, которую можно задать с помощью двух функций $x(\tau)$, $y(\tau)$ параметра τ. В этом случае условие внутреннего дифференциро-

вания по B имеет простой вид $a_1 dy/d\tau - a_2\,dx/d\tau = 0$, или, если выбрать соответствующий параметр t вместо τ,

$$a_1 = \frac{dx}{dt}, \quad a_2 = \frac{dy}{dt}.$$

2. Задача Коши. Характеристические многообразия. Теперь мы изменим данную выше (см. § 7) формулировку задачи Коши, отнеся все наши утверждения к n-мерному пространству x. Пусть в этом пространстве основное $(n-1)$-мерное многообразие B задано соотношением

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \tag{3}$$

ранее (см. § 7) такое многообразие определялось n координатами x_i как функциями $n-1$ независимых параметров $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Задавая значения функции $u = u(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ в точках этого многообразия B, мы расширим B до многообразия C в пространстве x, u. Точно так же, добавляя еще n функций $p_1, p_2, \ldots, p_n$ переменных $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, удовлетворяющих на B условию полосы

$$du = \sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i, \tag{3'}$$

или, в параметрическом представлении,

$$\frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu},$$

мы можем расширить B до *многообразия полос* C_1.

Опять, не решая фактически задачу Коши, мы поставим следующий вопрос. Рассмотрим начальное многообразие B с заданными значениями u или соответственно u и p_i. Предположим, что функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с заданными начальными значениями в некоторой произвольно малой окрестности многообразия B удовлетворяет уравнению $F(x_i, u, u_{x_i}) = 0$. Что следует из дифференциального уравнения для функции u и ее производных на начальном многообразии B?

Сначала мы рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a. \tag{4}$$

В точке многообразия B, где задана начальная функция u, соотношениями $dx_i/ds = a_i$ определяется некоторое особое направление дифференцирования $\partial/\partial s = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\partial/\partial x_i$ в n-мерном пространстве x. Такое дифференцирование и направление дифференцирования в этой точке

называются *характеристическим дифференцированием* и *характеристическим направлением.* Теперь дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{du}{ds} = a, \tag{5}$$

т. е. оно определяет величину *характеристической производной* функции u на B, так как правая часть известна на B.

Имеет место следующая *альтернатива.* В рассматриваемой точке B выполняется либо соотношение

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{x_i} \neq 0, \tag{6}$$

либо соотношение

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{x_i} = 0. \tag{7}$$

Если выполняется соотношение (6), то характеристическое направление в этой точке выводит из многообразия B. Уравнение (5), а следовательно, и дифференциальное уравнение (4), дает выводящую производную u; таким образом, все первые производные функции u на B или в рассматриваемой точке B определены значением u на одном только многообразии B и дифференциальным уравнением. Если мы применим этот результат к дифференциальному уравнению, предварительно продифференцировав его по независимым переменным, например, по x_k, то мы увидим, что старшие производные u на B также однозначно определены.

Если выполняется уравнение (7), называемое *характеристическим соотношением*, то du/ds есть внутренняя производная на B и, следовательно, уже известна, так как на B задана функция u. Таким образом, соотношение (5) является ограничением на способ задания функции u на B; это условие должно выполняться, если мы хотим, чтобы решение u нашего дифференциального уравнения существовало в окрестности B и принимало заданные начальные значения на B. Если оба соотношения (5) и (7) удовлетворяются в каждой точке P многообразия B, то B вместе с заданной функцией u называется *характеристическим многообразием*[1]).

Другими словами, *в точке P заданного многообразия $\varphi = 0$, на котором произвольным образом заданы значения u, дифференциальное уравнение либо однозначным образом определяет*

---

[1]) Легко видеть, что величина γ совпадает с определителем, рассмотренным в § 7, с точностью до множителя, отличного от нуля; следовательно, данное только что определение характеристического многообразия эквивалентно прежнему определению.

производные u, *либо налагает ограничения на заданные начальные значения* u[1]).

Аналогичные рассуждения справедливы для общего дифференциального уравнения (1) из § 7:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.$$

Дифференцируя по независимым переменным и применяя соотношение $\partial p_\nu/\partial x_i = \partial p_i/\partial x_\nu$, мы заменяем это уравнение системой (квазилинейных) дифференциальных уравнений, линейных[2]) относительно производных $\partial p_\nu/\partial x_i$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial p_i}{\partial x_\nu} + F_u p_i + F_{x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

В качестве начального многообразия мы снова берем многообразие B: $\varphi = 0$. Мы предполагаем, что функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданные на B, удовлетворяют соотношению $F = 0$ и соотношению полосы (3′)

$$du = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \, dx_\nu.$$

В точках многообразия B мы снова определяем характеристическое дифференцирование формулой

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \tag{9}$$

Соотношения (8) на многообразии B переходят в равенства

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = -F_{x_i} - p_i F_u. \tag{10}$$

В некоторой точке B они приводят к следующей альтернативе выполняется либо соотношение

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} F_{p_i} \neq 0, \tag{11}$$

либо соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} F_{p_i} = 0. \tag{12}$$

---

[1]) Эта альтернатива напоминает соответствующую альтернативу для систем линейных уравнений (см. т. I, гл. I).

[2]) Такие процессы линеаризации часто будут играть важную роль.

Если выполняется соотношение (11), то дифференцирование $\partial/\partial s$ выводит из B и формулы (10) дают производные функций p_i, выводящие из B, так как правые части известны в силу начальных условий. Таким образом, все вторые производные функции u однозначно определены на B начальными условиями и дифференциальным уравнением.

Если в точках многообразия B выполняется *характеристическое соотношение* (12), то $\partial/\partial s$ есть внутреннее дифференцирование. Так как в этом случае левые части соотношений (10) также известны из начальных условий, то из формул (10) следует, что начальные данные на B, кроме уравнения (3′), удовлетворяют еще дополнительным условиям

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = -F_{x_i} - p_i F_u.$$

Если $\gamma = 0$ *всюду на* B *и если выполнены дополнительные характеристические условия* (10) *и условие полосы* (3′), *то многообразие* B *называется характеристическим многообразием для многообразия полос, возникающего, когда на* B *заданы величины* u, p_1, p_2, ..., p_n. Легко видеть, что это новое определение эквивалентно определению, данному в § 7.

Заметим, что характеристическое соотношение можно было бы формально получить и другим способом. Например, мы можем исходить из того, что выражения

$$p_i \varphi_{x_n} - p_n \varphi_{x_i} = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{13}$$

дают внутренние производные функции u, если $\varphi_{x_n} \neq 0$ всюду на B, и поэтому они известны, если только известны значения u. Таким образом, можно попытаться вычислить значения p_i на B из $n-1$ выражений (13) и уравнения

$$F(x_i, u, p_i) = 0.$$

Условием, при котором это возможно не единственным способом, является обращение в нуль якобиана этих n уравнений по переменным p_1, p_2, ..., p_n:

$$\begin{vmatrix} F_{p_1} & F_{p_2} & \ldots & F_{p_{n-1}} & F_{p_n} \\ \varphi_{x_n} & 0 & \ldots & 0 & -\varphi_{x_1} \\ 0 & \varphi_{x_n} & \ldots & 0 & -\varphi_{x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi_{x_n} & -\varphi_{x_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \varphi_{x_i} \right) \varphi_{x_n}^{n-2}. \tag{14}$$

Таким образом, требование, чтобы величины p_i не определялись однозначно, эквивалентно характеристическому соотношению (12).

Сделаем последнее замечание, касающееся характеристического соотношения. В нелинейном случае это уравнение приобретает смысл только после того, как мы подставим соответствующие функции вместо u и p_i, например, если мы рассматриваем характеристические многообразия на заданной интегральной поверхности $J: u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если мы выразим u и величины $p_i = \partial u/\partial x_i$ как функции независимых переменных x_i, то соотношение (12)

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\varphi_{x_i} = 0,$$

если оно выполняется (не обязательно тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а только при условии $\varphi = 0$), показывает, что заданное на J многообразие является характеристическим. Если это соотношение выполняется не только для $\varphi = 0$, а тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то оно является линейным однородным дифференциальным уравнением относительно функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда оно определяет однопараметрическое семейство характеристических многообразий $\varphi = c = \mathrm{const}$, порождающее J (см. гл. I, § 5). Если мы хотим записать соотношение (12) как дифференциальное уравнение в частных производных, считая, что оно выполняется только на одном многообразии $\varphi = 0$, то мы будем рассматривать следующее выражение для этого многообразия:

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) - x_n = 0,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — независимые переменные. Если в формулу (12) мы подставим ψ вместо x_n и запишем, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \psi_{x_1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \psi_{x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}} = \psi_{x_{n-1}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = -1,$$

то мы получим дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{p_i}\psi_{x_i} - F_{p_n} = 0 \tag{15}$$

для функции ψ только $n - 1$ независимых переменных. Заметим, наконец, что характеристические кривые дифференциальных уравнений (12), (15) и (7) совпадают с характеристическими кривыми исходного уравнения.

§ 2. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Новое построение теории

Исследование системы квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\varkappa} = b_\mu \qquad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{1}$$

подсказывает новый подход к теории характеристик, несколько отличающийся от использованного в гл. II, § 7. Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые так же, как и b_μ, могут зависеть от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m$, одинаковы во всех уравнениях (1). Мы будем говорить, что дифференциальные уравнения такой системы имеют одинаковые главные части.

Сначала мы докажем следующую теорему (см. гл. I, § 5, п. 2).

Система (вида (1)) m квазилинейных дифференциальных уравнений с n независимыми переменными и с одинаковыми главными частями эквивалентна однородному линейному дифференциальному уравнению для функции $m+n$ переменных.

Пусть некоторая система решений $u_1, u_2, \ldots, u_m$ уравнений (1), зависящая от параметров $c_1, c_2, \ldots, c_m$, неявно задана в виде

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m) = c_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m) = c_m. \end{gathered} \tag{2}$$

Чтобы обеспечить возможность определения функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$, предположим, что якобиан

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$$

всюду отличен от нуля. Дифференцируя уравнения (2), мы получаем

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \\ \varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}.$$

Умножая на $a_\varkappa$ и суммируя по $\varkappa$, получаем

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \left(\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} \right) = 0.$$

Следовательно, в силу (1)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} = 0. \tag{3}$$

Мы видим, что функции $\varphi = \varphi_\mu$ системы (2) удовлетворяют уравнению (3) тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_m$, т. е. все они тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m$ удовлетворяют одному линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_\lambda} = 0. \tag{3'}$$

Если мы введем обозначения

$$b_\lambda = a_{n+\lambda}, \quad u_\lambda = x_{n+\lambda}, \quad r = m + n,$$

то уравнение (3′) перейдет, наконец, в дифференциальное уравнение

$$\sum_{\varkappa=1}^{r} a_\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x_\varkappa} = 0 \tag{3''}$$

для функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$; таким образом, первая часть нашей теоремы доказана.

Обратно, пусть даны m решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ дифференциального уравнения (3″), и пусть якобиан

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_r)}$$

нигде не обращается в нуль. Сейчас мы покажем, что функции $u_1, u_2, \ldots, u_m$, найденные из уравнений

$$\varphi_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m) = c_\mu,$$

удовлетворяют системе (1). Сначала с помощью дифференцирования мы получим уравнения

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} = 0.$$

Снова умножаем на $a_\varkappa$ и суммируем по $\varkappa$; применяя (3), получаем

$$\sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{m} a \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa},$$

или

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \left(b_\lambda - \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} \right) = 0.$$

Так как определитель, состоящий из величин $\partial\varphi_\mu/\partial u_\lambda$, не обращается в нуль, справедливы уравнения

$$b_\lambda - \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} = 0,$$

т. е. u_λ удовлетворяют системе (1).

Согласно гл. II, § 2, интегрирование линейного дифференциального уравнения (3″) эквивалентно интегрированию характеристической системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_\varkappa}{ds} = a_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, r).$$

Таким образом, мы видим, что *система* (1) *дифференциальных уравнений с частными производными с одинаковыми главными частями эквивалентна системе $m+n$ обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно системе*

$$\begin{aligned} \frac{dx_\varkappa}{ds} &= a_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \\ \frac{du_\lambda}{ds} &= b_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned} \tag{4}$$

Мы воспользуемся этими результатами, чтобы *снова построить теорию характеристик для общих дифференциальных уравнений первого порядка*. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}) = 0 \tag{5}$$

и заменим его следующей системой $n+1$ квазилинейных уравнений с одинаковыми главными частями относительно $u, p_1, \ldots, p_n$, полученных с помощью функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n)$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial p_i}{\partial x_\nu} + F_u p_i + F_{x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ &\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} p_\nu = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Первые n из этих уравнений формально следуют из уравнения (5), если его продифференцировать по x_i и заменить u_{x_i} на p_i, а $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_\nu$ на $\partial p_i/\partial x_\nu$. Если сделать такую замену, то последнее уравнение становится тривиальным.

Исходя из системы квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковыми главными частями (6), мы можем теперь построить теорию дифференциального уравнения (5) с $n+1$ неизвестными

функциями u, p_i. Сначала из сделанных ранее замечаний мы выводим, что интегрирование системы (6) эквивалентно интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds}=F_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds}=-F_{x_i}-p_iF_u, \quad \frac{du}{ds}=\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu F_{p_\nu}, \tag{7}$$

т. е. интегрированию характеристических дифференциальных уравнений, другим путем выведенных для F в гл. II, § 7. Далее, мы покажем, что некоторая специальная задача Коши для системы (6) эквивалентна задаче Коши для дифференциального уравнения (5); это даст новую основу для решения задачи Коши, которая в гл. II, § 7 была решена с помощью характеристических дифференциальных уравнений (7).

Прежде всего, ясно, что для любого решения дифференциального уравнения (5) функции u и $p_i=\partial u/\partial x_i$ являются решением системы (6).

Обратно, рассмотрим теперь систему u, p_i решений дифференциальных уравнений (6), удовлетворяющую следующим начальным условиям. Пусть C представляет собой $(n-1)$-мерное начальное многообразие в пространстве x, u, которое нигде не является характеристическим. Пусть на C заданы такие начальные значения p_i, что $F=0$ всюду на C и, кроме того, на C выполняется равенство

$$du-\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\, dx_\nu=0. \tag{7a}$$

Далее, пусть решения системы дифференциальных уравнений (7), проходящие через каждую точку C, с соответствующими начальными значениями для p_i, образуют n-мерную поверхность S, заданную уравнением

$$u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и содержащую C. Эта функция u вместе с соответствующими функциями p_i является тогда решением соответствующей задачи Коши для системы (6).

Теперь мы должны показать, что она является также решением задачи Коши для уравнения $F=0$. Для этого нам нужно только доказать, что соотношения

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n)=R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$
$$p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)-u_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$$

выполняются всюду на поверхности S. Мы принимаем во внимание, что для функций $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_k}-\frac{\partial P_k}{\partial x_i}=\frac{\partial p_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p_k}{\partial x_i}. \tag{8}$$

Кроме того, мы имеем

$$R_{x_i} = \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} + F_{x_i} + F_u u_{x_i}$$

и, следовательно, на основании первых n уравнений системы (6) и уравнения (8) получаем

$$R_{x_i} = \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu} \right) - F_u P_i. \tag{9}$$

С другой стороны, последнее уравнение системы (6) можно записать в виде

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} P_\nu. \tag{10}$$

Таким образом, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n} R_{x_i} F_{p_i} = 0,$$

или, применяя сокращенные обозначения

$$F_{p_i} = a_i,$$

где функции $a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ надо рассматривать как известные коэффициенты,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i R_{x_i} = 0. \tag{10'}$$

На интегральной поверхности S мы теперь рассмотрим кривые, определенные уравнениями (7), порождающие эту поверхность. Уравнение (10′) показывает, что на каждой из этих кривых

$$\frac{dR}{ds} = 0;$$

так как R обращается в нуль в начальной точке на C, мы имеем

$$R \equiv 0 \tag{11}$$

на S. Кроме того, из уравнения (9) получаем

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} + P_i F_u = 0; \tag{12}$$

в то же время уравнение (10) $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu P_\nu = 0$ после дифференцирования по x_i дает соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} P_\nu = 0. \tag{13}$$

Здесь $b_{i\nu} = \partial a_\nu / \partial x_i$ — снова известная функция переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Сложив равенства (12) и (13), получим уравнения вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} P_\nu = 0,$$

где величины $c_{i\nu}$ — также известные функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$. На каждой характеристической кривой $dx_i/ds = a_i$ эти уравнения переходят в уравнения

$$\frac{dP_i}{ds} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} P_\nu = 0,$$

т. е. в систему обыкновенных линейных однородных уравнений относительно функций P_i. Однако, из формулы (10) и из начальных условий для системы (7) мы получаем следующий результат. Так как многообразие C не характеристическое, то определитель Δ, введенный на стр. 106, не обращается в нуль. Начальные значения для P_i равны нулю на C, и, следовательно, эти функции обращаются в нуль тождественно. Таким образом, доказательство эквивалентности поставленной задачи Коши для системы (6) и уравнения (5) закончено.

§ 3. Доказательство теоремы единственности Хаара

Решение одного нелинейного уравнения первого порядка, рассмотренное в § 7 этой главы, основано на понятии характеристических полос; при этом необходимо было предполагать, что первые производные решения p и q дифференцируемы. Однако определение решения дифференциального уравнения предполагает только непрерывность первых производных. Данное ранее доказательство существования решения не проходит при этих более слабых, но естественных предположениях. Поэтому представляет интерес результат Хаара [1], установившего, что для двух независимых переменных имеет место по крайней мере единственность: *задача Коши имеет*

не более одного решения, если предполагается только непрерывность его первых производных.

В частности, рассмотрим уравнение $u_y = G(x, y, u, u_x)$ и предположим, что функция G удовлетворяет условию Липшица по u и p. Пусть u и v — два решения, принимающие одинаковые значения на отрезке $y=0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$; тогда они совпадают во всем треугольнике $T: y \geqslant 0$, $y \leqslant (x - x_1)/k$, $y \leqslant (x_2 - x)/k$, где k — постоянная Липшица функции G по переменной p.

Доказательство. Обозначим разность между u и v через w; u и v — решения заданного дифференциального уравнения. Вычитая друг из друга уравнения, записанные для u и v, и учитывая, что G удовлетворяет условию Липшица, мы получаем следующее дифференциальное неравенство для w:

$$|w_y| \leqslant \alpha |w| + k |w_x|,$$

где α и k — постоянные Липшица функции G. Заметим, что в тех точках, где функция w *положительна*, это неравенство можно записать в виде

$$|w_y| \leqslant \alpha w + k |w_x|.$$

Если мы заменим постоянную α несколько большей постоянной β, то получим *строгое* неравенство

$$|w_y| < \beta w + k |w_x|. \qquad (1)$$

Положим $W = e^{-\beta y} w$; мы утверждаем, что W, а следовательно, и w тождественно обращаются в нуль в T. Действительно, если бы функция W не была тождественно равна нулю, то она принимала бы положительные или отрицательные значения. Предположим, что она принимает положительные значения. Пусть она достигает максимума в точке P треугольника T. Эта точка не может находиться на основании T, так как там W равно нулю. Следовательно, направления $(-k, -1)$ и $(k, -1)$ в точке P ведут *внутрь* T, и производные по этим направлениям неположительны:

$$-kW_x - W_y \leqslant 0, \qquad kW_x - W_y \leqslant 0;$$

отсюда

$$W_y \geqslant k |W_x|$$

в точке P.

Если мы перепишем неравенство для исходной переменной w, мы получим

$$w_y \geqslant \beta w + k |w_x|,$$

что противоречит неравенству (1).

Предполагая, что функция W принимает в T отрицательные значения, мы аналогичным образом приходим к противоречию. Следовательно, доказано, что $u = v$ в T.

Кроме того, Плись показал, что для двух независимых переменных любое решение, имеющее только непрерывные первые производные, порождается характеристическими полосами[1]).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 К ГЛАВЕ II

ТЕОРИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ[2])

В гл. II мы решали нехарактеристическую задачу Коши для одного квазилинейного уравнения первого порядка. Полученная теорема существования является локальной; было показано только, что решение существует в некоторой окрестности начальной кривой. Далее, в § 1, мы строили интегральные поверхности с ребром возврата; это показывает, что гладкие решения не обязательно существуют в целом.

В этом приложении мы проведем дальнейшее исследование встречающихся разрывов, ограничивающих области существования. Затем мы покажем, каким образом решения можно все-таки продолжить за эти особенности, интерпретируя дифференциальное уравнение как „закон сохранения".

Рассмотрим квазилинейные уравнения вида

$$u_t = a u_x, \tag{1}$$

где $a = a(u)$ есть функция u. Особенности решений таких уравнений могут возникать из начальных данных, заданных на прямой $t = 0$, следующим образом.

Согласно теории характеристик, всякое решение u постоянно на каждой характеристической кривой. Наклон характеристической кривой равен $-1/a(u)$, и так как u постоянно на характеристической кривой, то этот наклон также постоянен, и все характеристические кривые являются прямыми линиями.

Из каждой точки x_1 на начальной прямой $t = 0$ выходит характеристическая кривая, наклон которой определяется значением u в точке x_1. Предположим, что на начальной прямой имеется пара точек x_1 и x_2, скажем $x_1 < x_2$, где заданные значения u_1 и u_2 функции u удовлетворяют неравенству

$$a(u_1) < a(u_2).$$

Тогда характеристические кривые, выходящие из точек x_1 и x_2, пересекутся в момент времени

$$t = (x_1 - x_2)/[a(u_1) - a(u_2)].$$

---

[1]) См. Плись [2].

[2]) Более общие рассмотрения по этому важному вопросу см. в гл. V, § 9 и гл. VI, § 4, п. 9.

Так как u имеет различные значения на этих характеристических кривых, то это показывает, что решение u не может быть непрерывно продолжено для бо́льших значений времени.

Наличие особенностей можно также увидеть из следующей неявной формулы для решения уравнения (1) с начальным значением $u(x, 0) = \varphi(x)$:

$$u - \varphi(x + ta(u)) = 0.$$

Согласно теореме о неявной функции, u является гладкой функцией x и t до тех пор, пока производная выражения

$$u - \varphi(x + ta(u))$$

по u не обращается в нуль, т. е.

$$ta'\varphi' \neq 1.$$

Это условие выполняется для достаточно малых t, но нарушается, если t становится больше (если a' и φ' имеют одинаковый знак, такое значение t положительно, в противном случае t отрицательно). Можно ожидать, что в той точке, где нарушается это условие, u имеет особенности.

Приведенные выше примеры показывают, что решения квазилинейных уравнений, вообще говоря, не существуют в целом. Но существует теория решений в целом для законов сохранения.

Закон сохранения для одной функции u есть уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\,dx = f(u(x_2), x_2, t) - f(u(x_1), x_1, t), \tag{2}$$

где f — заданная функция u, x и t. Это уравнение выражает тот факт, что величина, описываемая функцией u и содержащаяся в отрезке (x_1, x_2), изменяется со скоростью, равной „потоку" функции f от u через концы этого интервала. Такую форму имеют те законы физики, которые не принимают во внимание диссипативных процессов и таким образом выражают „свойство сохранения".

Если u есть дифференцируемое решение закона сохранения (2), то этот закон сохранения выражается квазилинейным дифференциальным уравнением

$$u_t = f_u u_x + f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(u, x, t), \tag{2'}$$

которое получается из (2) дифференцированием по x_1, если положить затем $x_1 = x_2 = x$. Однако, как мы увидим, уравнение (2) имеет также и разрывные решения. Допустив разрывные решения, мы покажем, что в классе разрывных решений закон сохранения (2) имеет решение в целом, тогда как мы видели, что дифференциальное уравнение (2′) его не имеет.

Далее, в гл. V и VI, мы будем изучать „ударные“ разрывы для систем законов сохранения в пространстве любого числа измерений. Мы увидим, что качественные свойства разрывных решений одного закона сохранения такие же, как свойства решений систем, физически более интересных.

Предположим, что функция f не зависит явно от x и t, и обозначим сокращенно f_u через $a = a(u)$. Пусть $u(x, t)$ — кусочно-дифференцируемая функция, которая удовлетворяет интегральному уравнению (2). Тогда функция u должна быть решением дифференциального уравнения

$$u_t = a u_x$$

всюду, где она дифференцируема. Заставляя точки x_1 и x_2 стремиться к точке разрыва с противоположных сторон, мы выводим (см. подробности в гл. V, § 9) «условие скачка»

$$[f] = -U\,[u], \tag{3}$$

где U — скорость распространения разрыва, а символ $[g]$ обозначает скачок на разрыве функции g. В случае малых разрывов мы имеем

$$U = -\frac{[f]}{[u]} \approx -\frac{df}{du} = -a.$$

Так как $-a$ есть скорость, соответствующая наклону характеристической кривой, то мы заключаем, что малые разрывы распространяются почти с характеристической скоростью.

Рассмотрим пример

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\,dx = \frac{1}{2}u^2(x_2) - \frac{1}{2}u^2(x_1). \tag{4}$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$u_t = u u_x.$$

Разделив на u, находим

$$\frac{u_t}{u} = (\log u)_t = u_x. \tag{5}$$

Обозначив $\log u$ через v, мы можем переписать (5) как закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} v\,dx = \exp v(x_2) - \exp v(x_1). \tag{5'}$$

Условием скачка (3) для закона сохранения (4) является соотношение

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = -U, \tag{6}$$

где u_1 и u_2 — значения u с разных сторон линии разрыва. Для (5′) условие скачка имеет вид

$$\frac{e^{v_1}-e^{v_2}}{v_1-v_2}=-U.$$

Из этих условий мы заключаем, что если u есть разрывное решение уравнения (4), то $v=\log u$ *не является* решением уравнения (5′). Можно сказать, что условия скачка не инвариантны относительно замены зависимой переменной; два закона сохранения, такие, как (4) и (5), могут соответствовать одному и тому же дифференциальному уравнению для гладких решений, но как законы сохранения для разрывных решений они не обязательно эквивалентны.

Далее мы покажем на примере, что *решения законов сохранения не определяются однозначно своими начальными значениями*. Мы снова возьмем закон сохранения (4). Функция

$$u(x,\ t)=\begin{cases}1 & \text{для} \quad 2x<-t,\\ 0 & \text{для} \quad -t<2x\end{cases}$$

есть разрывное решение уравнения (4), так как по обе стороны прямой $2x=-t$ функция u постоянна и, следовательно, является гладким решением уравнения (4), а на линии разрыва $2x=t$ выполняется условие скачка (6). С другой стороны, функция

$$u'(x,\ t)=\begin{cases}1 & \text{для} \quad x<-t,\\ -\frac{x}{t} & \text{для} \quad -t<x<0,\\ 0 & \text{для} \quad 0<x\end{cases}$$

непрерывна при положительных t и удовлетворяет дифференциальному уравнению всюду, за исключением линий $x=0$ и $x=-t$. Отсюда с помощью интегрирования легко заключить, что u' есть непрерывное решение уравнения (4). Решения u и u' принимают одинаковые значения при $t=0$. Можно доказать более общий факт, а именно, что для произвольных начальных значений существует несчетное множество разрывных решений, принимающих эти начальные значения.

Среди всех этих разрывных решений существует только одно решение, имеющее физический смысл. Это решение мы будем называть *допустимым* решением.

Нам необходим математический признак, характеризующий допустимые решения. Рассуждение, которое мы применяли раньше для выяснения возникновения разрывов при пересечении характеристик, подсказывает такой признак. Разрыв является допустимым, если он лишает характеристики возможности пересекаться. Таким образом, мы получаем следующий критерий. Разрывное решение *допустимо*,

если любая линия разрыва пересекается с каждой стороны характеристиками, идущими *вперед*. Аналитически это условие означает, что для допустимого разрыва выполняется соотношение

$$-a(u_L) \geqslant U \geqslant -a(u_R),$$

где u_L и u_R — значения u соответственно слева и справа от линии разрыва, а U — скорость распространения разрыва.

Жермен и Бадер [1] показали, что два допустимых разрывных решения, принимающих при $t=0$ одинаковые значения, совпадают тождественно. Более общее определение допустимого решения и более общая теорема единственности даны Олейник [2,3].

Можно сформулировать аналогичное условие допустимости для разрывов решений систем законов сохранения. Если такое условие применить к уравнениям течения сжимаемой жидкости, то оно окажется аналитически эквивалентным утверждению, что при переходе через разрыв энтропия потока возрастает.

Теперь мы докажем явную формулу для допустимых решений закона сохранения с произвольными начальными условиями. Эта формула выведена Хопфом [3], Олейник [1] и Лаксом [3]. Мы предположим, что $a(u)$ — монотонная функция u; отсюда следует, что функция $f(u)$ выпукла или вогнута.

Пусть $g(s)$ — сопряженная функция для выпуклой (вогнутой) функции $f(u)$, заданная формулой

$$g(s) = \max_u (\min) \{us + f(u)\};$$

мы обозначим через $b(s)$ производную g по s. Пусть $\varphi(x)$ — заданные начальные значения

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Пусть $\Phi(y)$ есть интеграл от φ, т. е.

$$\frac{d\Phi}{dy} = \varphi(y).$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(y) + tg\left(\frac{x-y}{t}\right);$$

при фиксированных x и t это непрерывная функция y. Легко показать, что при фиксированном t и за исключением счетного множества значений x эта функция имеет единственный максимум (или минимум) по y; положение этого максимума мы обозначим через $y_0(x, t)$.

Положим

$$u(x, t) = b\left(\frac{x-y_0}{t}\right); \tag{7}$$

Мы утверждаем, что *функция u, определенная формулой* (7), *есть допустимое решение уравнения* (1), *соответствующее начальному значению φ.*

Доказательство этого утверждения и дальнейшие свойства решений, заданных этой формулой, см., например, в работе Лакса [2][1]. Теорема существования для законов сохранения с меньшими ограничениями на функцию f была доказана Калашниковым [1][2].

---

[1]) См. также Олейник [1, 4]. — *Прим. ред.*

[2]) Возможен другой подход к определению допустимых решений, связанный с рассмотрением „малой вязкости". Так, например, допустимое решение уравнения (1) может быть определено как предел при $\varepsilon \to 0$ решений параболического уравнения $u_t = a(u)\,u_x + \varepsilon u_{xx}$, где $\varepsilon > 0$ (см. Олейник [4] и Гельфанд [1]). — *Прим. ред.*

Глава III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Вопросы, связанные с дифференциальными уравнениями в частных производных порядка выше первого, настолько разнообразны, что построение единой общей теории (как в гл. II) не представляется возможным. Существенное различие имеется между несколькими типами дифференциальных уравнений, называемых „эллиптическими", „гиперболическими" и „параболическими"; уравнения каждого из названных типов обладают совершенно разными чертами в вопросах, касающихся построения решений и их свойств [1]).

В этой главе мы введем классификацию уравнений, руководствуясь примерами, представляющими физический интерес. Кроме того, мы предварительно обсудим методы решения важнейших задач. Следующие главы будут в основном посвящены систематической теории эллиптических и гиперболических задач [2]).

Некоторые классические уравнения второго порядка для функции $u(x, y, z)$ могут служить представителями различных типов:

уравнение Лапласа (эллиптический тип): $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$,

волновое уравнение (гиперболический тип): $u_{xx}+u_{yy}-u_{zz}=0$,

уравнение теплопроводности (параболический тип): $u_z=u_{xx}+u_{yy}$.

§ 1. *Канонический вид линейных и квазилинейных дифференциальных операторов второго порядка с двумя независимыми переменными*

Для линейных, а также квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка (или для соответствующих систем двух уравнений первого порядка) с двумя независимыми переменными классификацию можно произвести с помощью явных элементарных

---

[1]) Более общий и абстрактный подход см. в работах Хёрмандера [4], Мальгранжа [1] и Эренпрейса [1]. Обзор современных проблем см. в статье Петровского [2]. [См. книгу Hörmander L., Linear partial differential operators, Springer — Verlag, Berlin, 1963. Готовится русский перевод. См. также книгу: Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, М., 1958. — *Прим. ред.*]

[2]) См. также изложение Хельвига [1].

операций, не обращаясь к общей теории. Такая классификация возникает из попытки найти простые канонические формы.

1. Эллиптический, гиперболический и параболический канонические виды. Смешанные типы. Линейный дифференциальный оператор второго порядка для функции $u(x, y)$ задается формулой

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}; \tag{1}$$

предполагается, что коэффициенты a, b, c — непрерывно дифференцируемые функции x и y, не обращающиеся одновременно в нуль в некоторой области G.

Рассмотрим оператор

$$L[u] + g(x, y, u, u_x, u_y) = L[u] + \ldots, \tag{2}$$

где дифференциальное выражение $g(x, y, u, u_x, u_y)$, не обязательно линейное, не содержит вторых производных.

Наша цель — привести дифференциальный оператор (2) или соответствующее дифференциальное уравнение

$$L[u] + \ \ldots \ = 0 \tag{3}$$

к простому каноническому виду, вводя новые независимые переменные

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \tag{4}$$

Обозначив через $u(\xi, \eta)$ функцию, в которую перейдет при этом $u(x, y)$, мы получим соотношения

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x, \quad u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + u_{\eta\eta}\psi_x^2 + \ldots,\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y + u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + \ \ldots,\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y + u_{\eta\eta}\psi_y^2 + \ \ldots .
\end{aligned}$$

(Здесь опять точки заменяют члены, не содержащие вторых производных функции u.) Таким образом, дифференциальный оператор (1) принимает вид

$$\Lambda[u] = \alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta}, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2,\\
\beta &= a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y,\\
\gamma &= a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Кроме того, a, b, c и α, β, γ связаны соотношением

$$\alpha\gamma - \beta^2 = (ac - b^2)(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)^2 \tag{7}$$

и тождеством для „характеристической квадратичной формы“

$$Q(l, m) = al^2 + 2blm + cm^2 = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2,$$

где переменные l, m и λ, μ в фиксированной точке x, y получаются друг из друга с помощью линейного преобразования

$$l = \lambda\varphi_x + \mu\varphi_y, \quad m = \lambda\psi_x + \mu\psi_y.$$

Функции φ, ψ, определяющие преобразование (4), находятся в нашем распоряжении, так что мы можем наложить два условия на преобразованные коэффициенты α, β, γ, стремясь к тому, чтобы преобразованное уравнение (5) имело простой канонический вид.

Мы рассмотрим следующие системы условий:

$$\text{(I)}\ \alpha = \gamma,\ \beta = 0,$$
$$\text{(II)}\ \alpha = -\gamma,\ \beta = 0 \qquad (\text{или}\ \alpha = \gamma = 0),$$
$$\text{(III)}\ \beta = \gamma = 0.$$

Какие из этих условий могут выполняться (конечно, всегда предполагается, что преобразования действительны), зависит от алгебраического характера формы $Q(l, m)$, или, говоря геометрически, от характера кривой второго порядка $Q(l, m) = 1$ на плоскости l, m при фиксированных x, y. Эта кривая может быть эллипсом, гиперболой или параболой. Соответственно этому в точке x, y мы называем оператор L

(I) эллиптическим, если $ac - b^2 > 0$,

(II) гиперболическим, если $ac - b^2 < 0$,

(III) параболическим, если $ac - b^2 = 0$.

Соответствующие канонические формы для дифференциального оператора имеют вид

$$\text{(I)} \quad \Lambda[u] = \alpha(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + \ldots,$$

$$\text{(II)} \begin{cases} \Lambda[u] = \alpha(u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}) + \ldots \\ \text{или} \\ \Lambda[u] = 2\beta u_{\xi\eta} + \ldots, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \Lambda[u] = \alpha u_{\xi\xi} + \ldots,$$

а канонические формы дифференциальных уравнений таковы:

$$\text{(I)} \qquad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \ldots = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \ldots = 0 \\ \text{или} \\ u_{\xi\eta} + \ldots \qquad = 0, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad u_{\xi\xi} + \ldots \qquad = 0.$$

При фиксированных x, y такой канонический вид всегда может быть получен просто с помощью линейного преобразования, которое приводит Q к соответствующей канонической форме. Однако, предполагая, что оператор L имеет один и тот же тип во всех точках *некоторой области* G, *мы хотим найти функции* φ *и* ψ, которые приводили бы $L[u]$ *к каноническому виду в каждой точке* G. Возможность такого приведения зависит от того, разрешимы ли некоторые системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Без ограничения общности мы можем предполагать, что $a \neq 0$ всюду в области[1]) G; в противном случае либо выполняется эквивалентное предположение, что $c \neq 0$, либо этого можно добиться заменой переменных $x = x' + y'$, $y = x' - y'$.

Чтобы определить функции φ и ψ, задающие преобразование, во всей области G, мы предположим сначала, что $L[u]$ — оператор гиперболического типа в G, и будем считать, что новые коэффициенты должны удовлетворять условию $\alpha = \gamma = 0$. Тогда уравнения (6) приводят к квадратному уравнению

$$Q = a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0 \tag{8}$$

для отношения λ/μ производных φ_x/φ_y и ψ_x/ψ_y.

Если оператор $L[u]$ — гиперболический в G, то $ac - b^2 < 0$, и тогда уравнение (8) имеет два различных действительных корня λ_1/μ_1 и λ_2/μ_2. Так как $a \neq 0$, мы можем предположить, что

$$\mu_1 = \mu_2 = 1;$$

тогда уравнение (8) определяет величины λ_1 и λ_2 в области G как непрерывно дифференцируемые функции x и y. Таким образом, в гиперболическом случае мы получаем канонический вид

$$\beta u_{\xi\eta} + \ldots = 0, \tag{9}$$

причем функции φ и ψ определяются из дифференциальных уравнений

$$\varphi_x - \lambda_1\varphi_y = 0, \qquad \psi_x - \lambda_2\psi_y = 0. \tag{10}$$

Действительно, эти два линейных однородных дифференциальных уравнения с частными производными первого порядка дают два семейства кривых $\varphi = \mathrm{const}$ и $\psi = \mathrm{const}$, которые можно также

---

[1]) Здесь предполагается, что G — достаточно малая окрестность некоторой фиксированной точки. — *Прим. ред.*

определить как семейства решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' + \lambda_1 = 0, \qquad y' + \lambda_2 = 0,$$

или

$$ay'^2 - 2by' + c = 0,$$

где y рассматривается как функция x на кривой этого семейства.

Соотношение

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

показывает, что кривые этих двух семейств не могут касаться друг друга ни в какой точке области G и что $\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x \neq 0$. Если $\alpha = \gamma = 0$, то из уравнения (7) следует, что $\beta \neq 0$.

Кривые $\xi = \varphi(x, y) = \text{const}$ и $\eta = \psi(x, y) = \text{const}$ называются *характеристическими кривыми линейного гиперболического дифференциального оператора* $L[u]$.

Так как можно разделить уравнение (9) на β, справедливо следующее утверждение. *Если оператор* $L[u]$ *гиперболический, т. е.* $ac - b^2 < 0$, *то дифференциальное уравнение второго порядка* (3) *можно привести к каноническому виду*

$$u_{\xi\eta} + \ldots = 0, \tag{11}$$

вводя в качестве координатных кривых два семейства характеристических кривых $\xi = \text{const}$ *и* $\eta = \text{const}$.

Если $ac - b^2 > 0$, то оператор (2) — *эллиптический* в G. В этом случае квадратное уравнение (8) не имеет действительных корней, но оно имеет два комплексно сопряженных корня λ_1 и λ_2, которые являются непрерывными комплекснозначными функциями действительных переменных x и y. Никакое семейство действительных кривых не удовлетворяет уравнениям $\alpha = \gamma = 0$, т. е. не существует характеристических кривых. Однако, если a, b, c — аналитические функции x, y и если мы предположим, что φ и ψ — аналитические функции, то мы можем рассмотреть дифференциальные уравнения (10) для комплексных x и y и, так же как и раньше, привести их к новым переменным ξ и η, которые становятся тогда комплексно сопряженными. Вводя действительные независимые переменные ρ и σ с помощью уравнений

$$\frac{\xi + \eta}{2} = \rho, \qquad \frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma, \tag{12}$$

мы получим

$$4u_{\xi\eta} = u_{\sigma\sigma} + u_{\rho\rho}.$$

Таким образом, *в эллиптическом случае уравнение приводится к каноническому виду*

$$\Delta u + \ldots = u_{\sigma\sigma} + u_{\rho\rho} + \ldots = 0. \tag{13}$$

Чтобы произвести описанные выше преобразования, включающие комплексные величины, мы должны были наложить условие аналитичности коэффициентов — очень сильное условие, по существу чуждое задаче. Чтобы избавиться от этого ограничения, мы можем воспользоваться следующим методом приведения эллиптического уравнения к каноническому виду (при котором не используются комплексные величины). Написав ρ и σ вместо ξ и η в уравнениях (3) и (4), мы потребуем выполнения условий

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = 0,$$

или, в явном виде,

$$a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2 = a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2,$$
$$a\rho_x\sigma_x + b(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + c\rho_y\sigma_y = 0.$$

Эти дифференциальные уравнения с помощью элементарных алгебраических преобразований можно свести к следующей системе линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$\sigma_x = \frac{b\rho_x + c\rho_y}{W}, \qquad \sigma_y = -\frac{a\rho_x + b\rho_y}{W}, \tag{14}$$

где

$$W^2 = ac - b^2,$$

причем W можно взять с любым знаком. Из этих так называемых *дифференциальных уравнений Бельтрами* мы сразу получаем с помощью исключения одной из неизвестных функций (например, σ) следующее дифференциальное уравнение второго порядка для второй неизвестной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a\rho_x + b\rho_y}{W} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{b\rho_x + c\rho_y}{W} = 0. \tag{15}$$

Приведение этого дифференциального уравнения к каноническому виду (13) в окрестности некоторой точки осуществляется парой функций ρ, σ, удовлетворяющих системе (14) и имеющих отличный от нуля якобиан

$$\sigma_x\rho_y - \sigma_y\rho_x = \frac{1}{W}(a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2).$$

Такие функции можно найти, если только нам известно решение уравнения (15) с отличным от нуля градиентом. Мы увидим в гл. IV, § 7, что при некоторых предположениях относительно гладкости коэффициентов (например, когда a, b, c имеют непрерывные производные до второго порядка) такое решение всегда существует — по крайней мере *в малом* — и, следовательно, в окрестности любой

точки можно ввести параметры ρ, σ, приводящие к каноническому виду [1]).

Третий случай — *параболический*: $ac - b^2 = 0$. Квадратное уравнение (8) имеет тогда один действительный корень, и мы можем соответственно ввести одно семейство кривых $\xi = \varphi(x, y)$ так, чтобы выполнялось равенство $\alpha = 0$; тогда, в силу соотношения (7), мы получим также $\beta = 0$, тогда как, например, для $\psi = x$ в G имеем $\gamma = a \neq 0$. В *параболическом случае* мы получаем *канонический вид*

$$u_{\eta\eta} + \ldots = 0.$$

Таким образом, теорема, сформулированная в начале, доказана.

Заметим, что преобразование к каноническому виду никоим образом не определено однозначно. Например, в эллиптическом случае канонический вид не меняется при любом конформном преобразовании параметров ρ, σ.

2. Примеры. Несколько примеров различных типов дифференциальных уравнений мы уже рассматривали в гл. I, § 1. Простейшее гиперболическое уравнение (уравнение колебаний струны) $u_{xx} - u_{tt} = 0$ было решено полностью. Представителем эллиптических дифференциальных уравнений является уравнение Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ (см., например, гл. I, § 1). Параболическое уравнение теплопроводности $u_t - u_{xx} = 0$ было рассмотрено в гл. I, § 3.

---

[1]) Как следствие свойств ρ, σ мы можем теперь вывести *существование единой системы параметров* $\rho(x, y)$, $\sigma(x, y)$, *приводящей к каноническому виду в целом*, т. е. во всей области G. Мы будем пользоваться следующим свойством. Если два решения системы (14) ρ, σ и ρ_1, σ_1 определены в достаточно малой окрестности и если $W < 0$, то $\rho_1 + i\sigma_1$ является комплексной аналитической функцией $\rho + i\sigma$; действительно, простые выкладки показывают, что удовлетворяются условия Коши — Римана. Поэтому преобразование, определяемое локальными параметрами, приводящими к каноническому виду в любых двух окрестностях, конформно в пересечении этих окрестностей. Следовательно, область G вместе с параметрами, приводящими к каноническому виду в системе окрестностей, покрывающих G, образует риманову поверхность (понятие римановой поверхности дано в работе Вейля [2], см. также Курант [2]), на которой аналитические функции определяются как функции, аналитические по параметрам, приводящим к каноническому виду. Задача нахождения единой системы параметров ρ, σ, приводящей к каноническому виду во всей области G, таким образом, эквивалентна задаче отыскания комплексной функции $\rho + i\sigma$, однозначно отображающей G в некоторую область плоскости ρ, σ и аналитической в только что описанном смысле. Это как раз та задача, которую решает общая теорема об униформизации для плоских областей (см. данные выше ссылки), и, следовательно, существование такого отображения обеспечено. [Глобальное приведение к каноническому виду уравнения второго порядка эллиптического типа с двумя независимыми переменными имеется в книге Векуа [1], гл. II, § 7. — *Прим. ред.*]

Из принадлежности уравнения к определенному типу мы выведем важные свойства, которые не только подсказывают методы решения, но и дают критерии, позволяющие судить, разумно ли поставлены те или иные задачи.

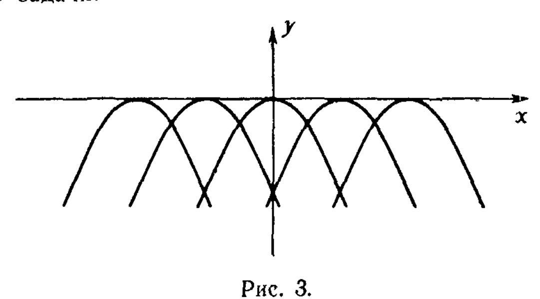


Рис. 3.

Иногда заданное дифференциальное уравнение может быть различного типа в различных областях (смешанный тип); например, уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \tag{16}$$

является эллиптическим при $y > 0$ и гиперболическим при $y < 0$, так как $ac - b^2 = y$.

В области $y < 0$ уравнение (8), т. е. уравнение

$$\lambda^2 + y\mu^2 = 0$$

имеет два действительных корня $\lambda/\mu = \pm\sqrt{-y}$; таким образом, функции φ и ψ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\varphi_x + \sqrt{-y}\,\varphi_y = 0, \qquad \psi_x - \sqrt{-y}\,\psi_y = 0. \tag{17}$$

Они имеют решения

$$\varphi = x + 2\sqrt{-y}, \qquad \psi = x - 2\sqrt{-y}.$$

С помощью преобразования

$$\begin{aligned} \xi &= x + 2\sqrt{-y}, \\ \eta &= x - 2\sqrt{-y} \end{aligned} \tag{18}$$

уравнение (16) приводится к гиперболическому каноническому виду

$$u_{xx} + yu_{yy} = 4u_{\xi\eta} + \frac{2}{\xi - \eta}(u_\xi - u_\eta) = 0 \tag{19}$$

для $y < 0$. Характеристическими кривыми являются параболы

$$y = -\frac{1}{4}(x - c)^2;$$

в частности, кривые $\varphi = \text{const}$ — это ветви парабол, имеющие положительный наклон, кривые $\psi = \text{const}$ — ветви, имеющие отрицательный наклон (см. рис. 3). Для $y > 0$ мы берем

$$\xi = x, \quad \eta = 2\sqrt{y}; \tag{20}$$

с помощью этого преобразования уравнение (16) приводится к эллиптическому каноническому виду

$$u_{xx} + yu_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} u_\eta = 0. \tag{21}$$

Аналогично, дифференциальное уравнение

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0, \tag{22}$$

Рис. 4.

известное как „уравнение Трикоми" [1]), является эллиптическим при $x > 0$ и гиперболическим при $x < 0$, так как $ac - b^2 = x$.

В полуплоскости $x < 0$ преобразование

$$\xi = \varphi(x, y) = \frac{3}{2} y + (\sqrt{-x})^3, \quad \eta = \psi(x, y) = \frac{3}{2} y - (\sqrt{-x})^3 \tag{23}$$

приводит уравнение (22) к каноническому виду

$$u_{xx} + xu_{yy} = 9x \left[u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} (u_\xi - u_\eta) \right] \quad (\xi > \eta). \tag{24}$$

Характеристическими кривыми являются полукубические параболы

$$y - c = \pm \frac{2}{3} (\sqrt{-x})^3;$$

ветви, направленные вниз, дают кривые $\varphi = \text{const}$, ветви, направленные вверх, — кривые $\psi = \text{const}$ (см. рис. 4). Для $x > 0$ мы берем

$$\xi = \frac{3}{2} y - i \sqrt{x^3}, \quad \eta = \frac{3}{2} y + i \sqrt{x^3}$$

---

[1]) Это уравнение представляет особый интерес для газовой динамики. Важная работа Трикоми [1] в настоящее время привела к обширной литературе. См., например, Берс [5] и Жермен [1]. [См. также книгу Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, М., 1959, где имеется подробная библиография. — *Прим. ред.*]

и полагаем

$$\rho=\frac{\xi+\eta}{2}=\frac{3}{2}y,$$
$$\sigma=\frac{\xi-\eta}{2i}=-\sqrt{x^3}; \qquad (25)$$

с помощью этого преобразования мы получаем канонический вид

$$u_{xx}+xu_{yy}=\frac{9}{4}x\left[(u_{\rho\rho}+u_{\sigma\sigma})+\frac{1}{3\sigma}u_\sigma\right]. \qquad (26)$$

Функции (25) удовлетворяют дифференциальным уравнениям Бельтрами

$$\sigma_x=-\sqrt{x}\rho_y,$$
$$\sigma_y=\frac{1}{\sqrt{x}}\rho_x. \qquad (27)$$

3. Канонический вид квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Обобщим приведение к каноническому виду таким образом, чтобы охватить нелинейные, в частности, квазилинейные, дифференциальные уравнения. Если ввести сокращенные обозначения

$$p=u_x,\quad q=u_y,\quad r=u_{xx},\quad s=u_{xy},\quad t=u_{yy},$$

то квазилинейные дифференциальные операторы будут иметь вид

$$L[u]=ar+2bs+ct+d, \qquad (28)$$

где a, b, c, d — заданные функции величин x, y, u, p, q. Такой оператор снова называется *эллиптическим*, если $ac-b^2>0$, *гиперболическим*, если $ac-b^2<0$, и *параболическим*, если $ac-b^2=0$. Однако, так как a, b, c зависят от функции $u(x, y)$, то тип оператора L в некоторой точке (x, y) также зависит от u и ее производных p и q как функций x и y. Например, дифференциальный оператор $uu_{xx}+u_{yy}$ является эллиптическим в области, где $u(x, y)>0$, и гиперболическим там, где $u(x, y)<0$. Аналогично, дифференциальные уравнения для двух семейств характеристик также зависят от u, и, следовательно, невозможно a priori ввести два семейства характеристик в качестве координатных кривых для всех функций u одновременно. После подстановки в L конкретной функции $u(x, y)$ и ее производных p и q мы можем обращаться с L как с *линейным* оператором второго порядка. Если оператор L гиперболический для этой функции u, то можно ввести характеристические переменные $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям (10):

$$\varphi_x-\lambda_1\varphi_y=0,\quad \psi_x-\lambda_2\psi_y=0.$$

Аналогично, в эллиптическом случае условие, заключающееся в том, что переменные ρ и σ — характеристические параметры, выражается уравнениями

$$\begin{aligned} a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2 &= a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2, \\ a\rho_x\sigma_x + b(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + c\rho_y\sigma_y &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Важнейшим шагом, позволяющим исключить зависимость от конкретной функции u в уравнениях (10) и (29), является одновременное рассмотрение u, x, y как функций ξ и η, вместо u как функции x и y. Если мы введем в качестве новых независимых переменных ξ и η, то уравнение $L[u]=0$ и уравнения (10) или (29) перейдут в дифференциальные уравнения относительно u, x, y как функций ξ и η. Чтобы получить эти уравнения, мы применим формулы дифференцирования обратных функций, выражая производные по x, y через производные по ξ, η:

$$\begin{aligned} Dx_\xi &= \eta_y, & Dx_\eta &= -\xi_y, & p &= u_x = D(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi), \\ Dy_\xi &= -\eta_x, & Dy_\eta &= \xi_x, & q &= u_y = D(u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta), \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$D = \varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}$$

есть якобиан нашего преобразования. Уравнения (10) и (29) тогда преобразуются в уравнения

$$y_\eta + \lambda_1 x_\eta = 0, \quad y_\xi + \lambda_2 x_\xi = 0 \tag{10'}$$

и

$$\begin{aligned} ay_\rho^2 - 2by_\rho x_\rho + cx_\rho^2 &= ay_\sigma^2 - 2by_\sigma x_\sigma + cx_\sigma^2, \\ ay_\rho y_\sigma - b(x_\rho y_\sigma + y_\rho x_\sigma) + cx_\rho x_\sigma &= 0. \end{aligned} \tag{29'}$$

В гиперболическом случае, когда надо рассматривать уравнения (10′), функции λ_1 и λ_2 зависят от u, p, q и от x и y. Если с помощью формул (30) заменить p и q их выражениями через производные по ξ и η, то уравнения (10′) дадут два соотношения между величинами x, y, u и их частными производными первого порядка по ξ и η. Как было сказано раньше, в отличие от линейного случая, этих двух уравнений недостаточно, чтобы независимо от $u(x, y)$ определить кривые $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$. Они образуют теперь систему двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех функций $u(\xi, \eta)$, $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, т. е. недоопределенную систему.

Это соображение подсказывает, что мы должны присоединить исходное дифференциальное уравнение второго порядка $L[u]=0$ к нашим двум „характеристическим" уравнениям и получить таким образом систему трех дифференциальных уравнений для трех функций u, x, y переменных ξ, η. Геометрически это означает, что мы

ищем интегральную поверхность не в асимметрической форме $u(x, y)$, а в параметрическом виде, через характеристические параметры ξ, η.

С помощью преобразования дифференциального выражения (28) в гиперболическом случае легко получить из уравнения $L[u]=0$ следующие уравнения, в которых присутствуют только смешанные вторые производные по ξ и η:

$$x_{\xi\eta}(y_\xi u_\eta - u_\xi y_\eta) + y_{\xi\eta}(u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi) + \\ + u_{\xi\eta}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}}, \qquad (31)$$

или

$$\begin{vmatrix} x_{\xi\eta} & y_{\xi\eta} & u_{\xi\eta} \\ x_\xi & y_\xi & u_\xi \\ x_\eta & y_\eta & u_\eta \end{vmatrix} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}}, \qquad (32)$$

или, если мы будем считать числа x, y, u компонентами радиус-вектора $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{x}_{\xi\eta}(\mathbf{x}_\xi \times \mathbf{x}_\eta) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}}. \qquad (33)$$

В частности, если $d=0$, то мы получаем следующий замечательный результат.

Канонический вид (31) *гиперболического уравнения второго порядка не зависит от* a, b, c.

Мы должны снова заметить, что всюду в наше дифференциальное уравнение надо вместо p и q подставить выражения (30). Система (10′), (31) трех дифференциальных уравнений с частными производными для компонент радиус-вектора $\mathbf{x}$ и дает искомый общий канонический вид для гиперболического случая.

Если на поверхности u (а следовательно, и в некоторой ее окрестности) уравнение является эллиптическим, т. е. $b^2 - ac < 0$, то получается другой канонический вид. Мы находим соответствующее преобразование или непосредственно из уравнений (29′), или применяя формально только что полученный результат и вводя переменные

$$\frac{\xi + \eta}{2} = \rho, \quad \frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma.$$

Мы делаем следующий вывод.

В эллиптическом случае дифференциальное уравнение (28) $L(u)=0$ *эквивалентно следующей системе трех дифференциальных уравнений для величин* x, y, u (*или для радиус-вектора* $\mathbf{x}$ *как функции параметров* ρ *и* σ):

$$\begin{gathered} ay_\rho^2 - 2by_\rho x_\rho + cx_\rho^2 = ay_\sigma^2 - 2by_\sigma x_\sigma + cx_\sigma^2, \\ ay_\rho y_\sigma - b(y_\rho x_\sigma + y_\sigma x_\rho) + cx_\rho x_\sigma = 0, \end{gathered} \qquad (34)$$

которая в векторных обозначениях может быть записана в виде

$$\Delta \mathbf{x}(\mathbf{x}_\rho \times \mathbf{x}_\sigma) = \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta u \\ x_\rho & y_\rho & u_\rho \\ x_\sigma & y_\sigma & u_\sigma \end{vmatrix} = (x_\rho y_\sigma - x_\sigma y_\rho)^2 \frac{d}{\sqrt{ac - b^2}}, \tag{34a}$$

где вектор $\Delta \mathbf{x}$ обозначает оператор Лапласа от вектора $\mathbf{x}$.

В частности, если $d = 0$, то дифференциальное уравнение второго порядка не зависит от a, b, c; оно имеет вид

$$\Delta \mathbf{x}(\mathbf{x}_\rho \times \mathbf{x}_\sigma) = 0,$$

где знак $\times$ обозначает векторное произведение.

4. Пример. Минимальные поверхности[1]**.** Рассмотрим дифференциальное уравнение минимальных поверхностей

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0; \tag{35}$$

так как $ac - b^2 = 1 + p^2 + q^2 > 0$, это дифференциальное уравнение всюду эллиптическое и его можно привести к каноническому виду (34). Действительно, простой подсчет дает следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x_\rho^2 + y_\rho^2 + u_\rho^2 = x_\sigma^2 + y_\sigma^2 + u_\sigma^2, \quad &\text{или} \quad \mathbf{x}_\rho^2 = \mathbf{x}_\sigma^2, \\ x_\rho x_\sigma + y_\rho y_\sigma + u_\rho u_\sigma = 0, \quad &\text{или} \quad \mathbf{x}_\rho \mathbf{x}_\sigma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\Delta \mathbf{x}(\mathbf{x}_\rho \times \mathbf{x}_\sigma) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\rho\rho} + \mathbf{x}_{\sigma\sigma}. \tag{37}$$

Эту систему можно упростить: дифференцируя уравнения (36), мы получаем

$$\mathbf{x}_{\rho\rho}\mathbf{x}_\rho = \mathbf{x}_{\rho\sigma}\mathbf{x}_\sigma \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_{\sigma\sigma}\mathbf{x}_\rho = -\mathbf{x}_{\rho\sigma}\mathbf{x}_\sigma;$$

следовательно,

$$\mathbf{x}_\rho \Delta \mathbf{x} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_\sigma \Delta \mathbf{x} = 0.$$

С другой стороны, из уравнения (37) следует, что $\Delta \mathbf{x}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{x}_\rho$ и $\mathbf{x}_\sigma$, $\Delta \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_\rho + \beta \mathbf{x}_\sigma$. Поэтому $\alpha = \beta = 0$ и, следовательно, $\Delta \mathbf{x} = 0$. Таким образом, *минимальная поверхность в параметрическом представлении с соответствующими параметрами ρ и σ характеризуется следующими условиями: каждая из трех координат x, y, u удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е.*

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta u = 0. \tag{38}$$

Кроме того, они удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} A = \mathbf{x}_\sigma^2 - \mathbf{x}_\rho^2 = 0, \\ B = 2\mathbf{x}_\rho \mathbf{x}_\sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

---

[1]) Ср. Курант [2].

В обычных обозначениях дифференциальной геометрии

$$E=\mathbf{x}_\rho^2,\quad F=\mathbf{x}_\rho\mathbf{x}_\sigma,\quad G=\mathbf{x}_\sigma^2$$

формулы (39) дают условия на первую квадратичную форму минимальной поверхности:

$$E-G=0,\quad F=0.$$

Казалось бы эти дополнительные условия добавляют еще два дифференциальных уравнения к трем уравнениям (38); однако они представляют собой просто граничное условие. Нам нет необходимости налагать дополнительные условия (39) во всей двумерной области ρ, σ, достаточно наложить их на некоторой замкнутой кривой в плоскости ρ, σ. Из уравнений (38) немедленно следуют соотношения

$$A_\rho=B_\sigma,\quad A_\sigma=-B_\rho.$$

Из этих соотношений видно, что функция $A+iB$ является аналитической функцией комплексной переменной $\rho+i\sigma$; следовательно, $A+iB$ тождественно обращается в нуль, если действительная часть A обращается в нуль на некоторой замкнутой кривой (например, на границе) и если B равно нулю в некоторой точке.

Для теории минимальных поверхностей важны следующие два вывода.

(1) Отображение плоскости ρ, σ на минимальную поверхность конформно.

(2) Представление минимальной поверхности с помощью гармонических функций эквивалентно классическому представлению Вейерштрасса с помощью аналитических функций комплексного переменного

$$\rho+i\sigma=\omega.$$

Чтобы получить *формулы Вейерштрасса*, рассмотрим гармонические функции x, y, u аргументов ρ, σ как действительные части аналитических функций $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_3(\omega)$. Если $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$ — сопряженные гармонические функции, то мы имеем

$$x+i\tilde{x}=f_1(\omega),\quad y+i\tilde{y}=f_2(\omega),\quad u+i\tilde{u}=f_3(\omega).$$

Так как, согласно дифференциальным уравнениям Коши — Римана,

$$x_\sigma=-\tilde{x}_\rho,\quad y_\sigma=-\tilde{y}_\rho,\quad u_\sigma=-\tilde{u}_\rho,$$

то мы имеем

$$x_\rho-ix_\sigma=f_1'(\omega),\quad y_\rho-iy_\sigma=f_2'(\omega),\quad u_\rho-iu_\sigma=f_3'(\omega),$$

так что условия (39) принимают вид

$$\varphi(\omega)=E-G-2iF=\sum_{\nu=1}^{3}[f_\nu'(\omega)]^2=0.$$

Таким образом, все минимальные поверхности могут быть представлены формулами

$$x = \operatorname{Re} f_1(\omega), \quad y = \operatorname{Re} f_2(\omega), \quad u = \operatorname{Re} f_3(\omega),$$

где аналитические функции $f_\nu(\omega)$, в остальном произвольные, должны удовлетворять условию

$$\sum_{\nu=1}^{3} [f'_\nu(\omega)]^2 = 0.$$

Вместо ω мы можем взять в качестве независимого переменного одну из функций f_ν, например, f_3. Поэтому совокупность минимальных поверхностей существенно зависит только от одной произвольной аналитической функции комплексного переменного.

5. Системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Здесь будет сделано несколько дополнительных замечаний относительно систем двух дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями u и v, так как они встречаются в важных приложениях, в частности, в гидродинамике. (В гл. V будет развита полная теория.)

В линейном случае, по аналогии с изложенным в § 1, п. 2, гиперболическую систему[1]) можно привести к каноническому виду с характеристическими координатами ξ, η в качестве независимых переменных:

$$\begin{aligned} a u_\xi + b v_\xi + \ldots &= 0, \\ a' u_\eta + b' v_\eta + \ldots &= 0, \end{aligned}$$

где a, b, a', b' — заданные функции ξ, η. Вводя новые неизвестные функции

$$\begin{aligned} U &= au + bv, \\ V &= a'u + b'v, \end{aligned}$$

мы получаем, наконец, канонический вид

$$\begin{aligned} U_\xi + \ldots &= 0, \\ V_\eta + \ldots &= 0, \end{aligned}$$

где точки заменяют известные функции от U, V, ξ, η.

В случае, когда два семейства характеристик совпадают, т. е. $\xi = \eta$, приведение к виду

$$\begin{aligned} U_\xi + \ldots &= 0, \\ V_\xi + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

---

[1]) Определение гиперболической системы см. в § 2, п. 2 настоящей главы. — *Прим. ред.*

может оказаться возможным со второй независимой переменной ζ, отличной от ξ. Тогда рассматриваемая система эквивалентна системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром ζ.

С помощью метода, аналогичного данному в п. 1, в эллиптическом случае получается канонический вид

$$P_\rho + Q_\sigma + \ldots = 0,$$
$$Q_\rho - P_\sigma + \ldots = 0,$$

где P, Q — неизвестные функции, ρ, σ — независимые переменные.

§ 2. Общая классификация и характеристики

Теперь мы перейдем к более общему и глубокому изучению затронутых вопросов.

1. Обозначения. Понятие характеристик наиболее ясно для систем уравнений первого порядка. Для краткости мы в основном ограничимся линейными уравнениями, хотя включение квазилинейных или общих систем не влечет за собой существенных трудностей (см. гл. V и гл. VI, § 3).

Иногда, как ниже в уравнении (1), мы будем применять хорошо известное и удобное обозначение $p_\nu q_\nu$ для $\sum\limits_\nu p_\nu q_\nu$, чтобы не писать знак суммы там, где это не приводит к двусмысленности. Кроме того, удобно будет применять векторные и матричные обозначения.

Мы напомним также понятие внутренней производной функции $f(x, y)$ на кривой $\varphi(x, y) = 0$, такой, что $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$ (можно, например, считать, что $\varphi_x \neq 0$). Производная $\alpha f_x + \beta f_y$ внутренняя, если $\alpha\varphi_x + \beta\varphi_y = 0$; в частности,

$$\varphi_y f_x - \varphi_x f_y$$

является внутренней производной функции f. Аналогично, производная функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ (или вектора x), внутренняя на многообразии $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, таком, что $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$, определяется как линейная комбинация

$$\alpha_\nu f_{x_\nu} = \alpha_\nu f_\nu,$$

удовлетворяющая условию

$$\alpha_\nu \varphi_{x_\nu} = \alpha_\nu \varphi_\nu = 0.$$

Здесь и ниже мы пользуемся сокращенными обозначениями f_ν, φ_ν, u_ν вместо f_{x_ν}, φ_{x_ν}, u_{x_ν} (иногда также пишется $D_\nu f$, $D_\nu\varphi$ и т. д.). Такие внутренние производные известны на поверхности $\varphi = 0$, если известны значения самой функции f (см. гл. II, приложение 1).

2. Системы первого порядка с двумя независимыми переменными. Характеристики. В случае двух независимых переменных x и y мы записываем систему k уравнений для вектор-функции u с компонентами $u^1, u^2, \ldots, u^k$ в виде

$$L_j[u] = a^{ij} u^i_x + b^{ij} u^i_y + d^j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

где a^{ij}, b^{ij} — элементы матриц A и B соответственно.

Предположим, что по крайней мере одна из этих матриц, например B, неособая, т. е. что $\|b^{ij}\| \neq 0$. Коэффициенты системы предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Члены d^j могут зависеть от неизвестных функций линейным или нелинейным образом; в этом последнем случае мы назовем нашу систему *почти линейной*.

В матричных обозначениях мы можем написать

$$L[u] = Au_x + Bu_y + d, \tag{1a}$$

где L, d и u — векторы.

Теперь рассмотрим уравнение $L[u] = 0$ и поставим вопрос, имеющий отношение к задаче Коши: по начальным значениям вектора u на некоторой кривой $C: \varphi(x, y) = 0$, $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$, определить первые производные u_{x_i} на C так, чтобы для полученной полосы удовлетворялось уравнение $L[u] = 0$.

Прежде всего мы замечаем, что на C известна внутренняя производная $u_y\varphi_x - u_x\varphi_y$. Как следствие этого, мы получаем на C соотношение между u_x и u_y вида

$$u_y = -\tau u_x + \ldots,$$

где $\tau = -\varphi_y/\varphi_x$ [1]), а точки здесь и ниже заменяют известные на C величины. Подставляя u_y в дифференциальное уравнение, получаем на C

$$L_j[u] = \left(a^{ij} - \tau b^{ij}\right) u^i_x + \ldots = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k),$$

т. е. систему линейных уравнений относительно k производных u^i_x. Отсюда получается необходимое и достаточное условие для того, чтобы можно было однозначно определить все первые производные на C:

$$Q = \| a^{ij} - \tau b^{ij} \| = | A - \tau B | \neq 0; \tag{2}$$

Q называется *характеристическим определителем системы* (1).

Если $Q \neq 0$ на кривых $\varphi = \text{const}$, то эти кривые называются *свободными*. Любую такую кривую можно дополнить до „полосы“,

[1]) Без ограничения общности мы можем считать, что $\varphi_x \neq 0$ на рассматриваемой части C.

удовлетворяющей системе (1). Начальные данные выбираются произвольно.

Если $\tau(x, y)$ — действительное решение алгебраического уравнения $Q=0$ степени k относительно τ, то кривые C, определенные обыкновенным дифференциальным уравнением

$$dx : dy = \tau \quad \text{или} \quad Q\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right) = 0, \tag{3}$$

называются *характеристическими кривыми*. Как мы сейчас увидим, для характеристических кривых, вообще говоря, невозможно продолжить начальные данные так, чтобы получилась интегральная полоса.

Если уравнение $Q=0$ не имеет действительных корней τ, то *все* кривые — свободные; продолжение начальных данных до полосы всегда возможно, причем единственным способом. Система тогда называется *эллиптической*. В случае, когда уравнение $Q=0$ имеет k действительных корней, причем все эти корни различны, система называется *вполне гиперболической*. Такие системы будут подробно изучены в гл. V.

Если τ — действительный корень уравнения (2) (может быть, единственный), то мы можем на C решить следующую систему линейных однородных уравнений относительно вектора l с компонентами $l^1, \ldots, l^k$:

$$l^j\left(a^{ij} - \tau b^{ij}\right) = 0, \quad \text{или} \quad l(A - \tau B) = 0.$$

Тогда „характеристическая" линейная комбинация $l^j L_j[u] = lL[u]$ дифференциальных уравнений системы (1) может быть записана в *характеристическом каноническом виде*

$$l^j L_j[u] = l^j b^{ij}\left(u_y^i + \tau u_x^i\right) + \ldots = 0,$$

или

$$lL[u] = lB(u_y + \tau u_x) + \ldots = 0,$$

где все неизвестные функции дифференцируются по одному и тому же направлению, а именно, по направлению характеристической кривой, соответствующей корню τ.

Таким образом, в гиперболическом случае, т. е. когда существует k таких семейств характеристических кривых, мы можем заменить систему (1) эквивалентной системой, в которой каждое уравнение содержит дифференцирование только по одному характеристическому направлению. Мы можем воспользоваться этим свойством гиперболических систем для несколько *более общего определения гиперболичности* (которое не исключает кратных корней τ).

В главе V мы будем пользоваться этими определениями как основой для полного решения задач гиперболического типа в случае двух независимых переменных.

„Характеристическая комбинация“ дифференциальных операторов L_j дает внутреннее дифференцирование по C. Отсюда следует, что между компонентами u на характеристике C существует некоторое соотношение, а именно, они удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению. Поэтому ясно, что нельзя задавать произвольные начальные значения для u на характеристике C. Это оправдывает различие, которое мы делаем между характеристиками и „свободными“ кривыми.

3. Системы первого порядка с n независимыми переменными[1]. В случае систем с произвольным числом n независимых переменных x можно действовать аналогично, как мы сейчас покажем; подробное изложение имеется в гл. VI. Такую систему можно записать в виде

$$L_j[u] = a^{ij,\nu} u^i_{x_\nu} + b^j = 0 \quad (j = 1, \ldots, k), \tag{4}$$

где $a^{ij,\nu}$ зависят от x, а b^j — от x и, может быть, также от u. Индекс ν меняется от 1 до n. Применяя матричные обозначения и сокращение $u_{x_\nu} = u_\nu$, мы можем записать систему (4) в виде

$$L[u] = A^\nu u_\nu + b = 0, \tag{4a}$$

где A^ν — матрицы $k \times k$ с элементами $a^{ij,\nu}$, а оператор и свободный член b — векторы.

Снова рассмотрим поверхность $C: \varphi(x) = 0$, где $\operatorname{grad} \varphi \neq 0$; пусть, например, $\varphi_n \neq 0$. На C мы рассмотрим *характеристическую матрицу*

$$A = A^\nu \varphi_\nu \tag{5}$$

и характеристический определитель, или характеристическую форму,

$$Q(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \|A\|. \tag{5a}$$

Пусть на C заданы начальные значения для вектора u. Тогда мы утверждаем следующее.

Если $Q \neq 0$ на C, то дифференциальное уравнение (4) однозначно определяет на C все производные u_ν через произвольно заданные начальные данные; в этом случае *поверхность* C называется *свободной*.

Если $Q = 0$ на C, то C называется *характеристической поверхностью*. Тогда существует характеристическая линейная комбинация

$$lL[u] = l^j L_j[u] = \Lambda[u] \tag{6}$$

дифференциальных операторов L_j, такая, что Λ дает внутреннее дифференцирование вектора u на C; равенство $\Lambda[u] = 0$ устанавли-

[1]) Подробности см. в гл. VI, § 3.

вает некоторое соотношение между начальными данными, и поэтому их нельзя выбирать произвольно.

Чтобы доказать эти утверждения, мы сначала заметим, что $u_\nu\varphi_n - u_n\varphi_\nu$ есть внутренняя производная вектора u на C. Поэтому величины u_ν известны на C, если заданы начальные значения u и известна только одна (выводящая) производная u_n (предполагалось, что $\varphi_n \neq 0$). Умножая уравнения (4) на φ_n, находим

$$\varphi_n L[u] = A^\nu\varphi_\nu u_n + \mathcal{J} = Au_n + \mathcal{J} = 0, \tag{4б}$$

где $\mathcal{J}$ — внутренний дифференциальный оператор относительно u на C. Следовательно, в предположении, что $\|A\| = Q \neq 0$, из системы линейных уравнений (4б) относительно вектора u_n можно однозначно определить этот вектор.

Если же $Q = \|A\| = 0$, то существует собственный вектор l, такой, что $lA = 0$. Умножение системы (4б) на l дает уравнение

$$l\varphi_n L[u] = l\mathcal{J} = 0 \tag{4в}$$

для внутреннего дифференциального оператора относительно вектора u на C; этот оператор $l\mathcal{J}$ не содержит u_n. Тогда дифференциальное соотношение $l\mathcal{J} = 0$ является ограничением на начальные значения u на C.

Характеристическое уравнение $Q = 0$ есть дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции $\varphi(x)$. Если оно удовлетворяется тождественно по x, а не только при условии $\varphi = 0$, то все семейство поверхностей $\varphi = \text{const}$ состоит из характеристических поверхностей. В случае $n > 2$ многообразие характеристик значительно шире, чем k семейств кривых в случае $n = 2$. Поэтому естественно, что теория систем для $n > 2$ значительно сложнее, чем при $n = 2$.

Введем *классификацию*. Если однородное алгебраическое уравнение $Q = 0$ относительно величин $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ не имеет никаких действительных решений (кроме $\varphi_\nu = 0$), то характеристик нет, и система называется *эллиптической*.

Если, в противоположность эллиптическому случаю, уравнение $Q = 0$ имеет k действительных различных корней φ_n при произвольных значениях $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ (или если такое утверждение справедливо после некоторого преобразования координат), то система называется *вполне гиперболической*. Мы будем изучать понятие гиперболичности и его смысл в § 6 и более полно в гл. VI. Главной целью этого изучения будет получение следующей теоремы: для гиперболических систем задача Коши всегда разрешима.

4. Дифференциальные уравнения высших порядков. Гиперболичность. Для одного уравнения высшего порядка и для систем таких уравнений имеет место аналогичная ситуация.

Подробное изложение имеется в гл. VI, § 3; мы ограничимся здесь краткими замечаниями, относящимися к одному дифференциальному уравнению порядка m. Применяя обозначение D_ν для оператора дифференцирования $\partial/\partial x_\nu$, мы можем записать дифференциальное уравнение в следующем символическом виде:

$$L[u] = H(D_1, \ldots, D_n)u + K(D_1, \ldots, D_n)u + f(x) = 0, \tag{7}$$

где H — однородный многочлен степени m относительно D, а K — многочлен степени меньшей, чем m; все коэффициенты — непрерывные функции x.

Данные Коши, т. е. заданные начальные значения, включают значения функции u и ее первых $m-1$ производных на поверхности $C: \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, причем мы снова предполагаем, что $\varphi_n \neq 0$. Как и раньше, основной вопрос состоит в следующем: при каких условиях произвольные начальные данные на C однозначно определяют производные порядка m от u на C? Ответ таков: необходимо и достаточно, чтобы *характеристическая форма*

$$Q(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = H(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

не обращалась в нуль на C. Если поверхность C характеристическая, т. е. удовлетворяет уравнению $Q = 0$, то $Hu + Ku$ есть внутренний дифференциальный оператор порядка m на C. Это значит, что он содержит производные порядка m только таким образом, что они выражаются через внутренние первые производные от операторов порядка $m-1$ и, следовательно, могут быть определены на C через начальные данные.

Чтобы доказать это, можно ввести новые независимые переменные. В качестве таких переменных выбираются φ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ — внутренние координаты на поверхностях $\varphi = \text{const}$. Тогда все производные функции u порядка m легко выражаются как комбинации m-й „выводящей“ производной $(\partial^m/\partial\varphi^m)u$ и членов, содержащих не более $m-1$ дифференцирований по φ, которые поэтому могут быть определены из начальных данных. Легко видеть, что тогда уравнение принимает вид

$$Q(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial^m u}{\partial\varphi^m} + \ldots = 0,$$

где точками заменены члены, которые на C выражаются через начальные данные. Это уравнение относительно u_{φ^m} имеет единственное решение тогда и только тогда, когда Q не обращается в нуль. Если $Q = 0$ на C, то уравнение дает некоторое условие на начальные данные. Что же касается определения гиперболичности, то оно использует характеристическую форму Q и остается таким же, как в п. 3.

5. Дополнительные замечания. Чтобы получить правильное обобщение на случай многих независимых переменных, мы не можем просто повторить определение гиперболичности из п. 2. Однако достаточно потребовать, чтобы существовало k линейно независимых комбинаций уравнений системы, таких, что каждая из этих комбинаций содержит только внутренние производные неизвестных функций u на $(n-1)$-мерной поверхности C. Эта важная форма определения будет подробно рассмотрена позже, в гл. VI, § 3.

Второе замечание касается ***квазилинейных систем уравнений.*** Все основные утверждения настоящего параграфа остаются справедливыми для квазилинейных уравнений. Условие на характеристики зависит тогда от значений самого вектора u на C, и поэтому нельзя определить характеристики независимо от значений рассматриваемого вектора u. Возникающее отсюда усложнение не существенно для определения характеристик, но оно становится существенным дальше, в гл. V и VI, где строится решение задачи Коши.

Наконец, надо подчеркнуть, что между указанными выше эллиптическим и гиперболическим типами возможны промежуточные типы. Например, для двух независимых переменных мы можем иметь q действительных характеристик и p пар сопряженных комплексных характеристик, так что $q+2p=k$. До сих пор не много сделано для исследования этих промежуточных типов; по-видимому, они не встречаются в задачах математической физики. Для многих независимых переменных примером такого промежуточного типа является „ультрагиперболическое" уравнение

$$u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_nx_n}=u_{y_1y_1}+\ldots+u_{y_ny_n}$$

относительно функции $2n$ переменных x и y (см. гл. VI, § 16).

6. Примеры. Уравнения Максвелла и Дирака. Читатель легко может убедиться, что волновое уравнение — гиперболическое, уравнение Лапласа — эллиптическое, уравнения Коши — Римана $u_x-v_y=0$, $u_y+v_x=0$ составляют эллиптическую систему, уравнения $u_x-v_y=0$, $u_y-v_x=0$ дают гиперболическую систему, а система $u_x=v$, $u_y=v_x$ — параболическая.

Мы приведем следующие дополнительные примеры эллиптических уравнений. Во-первых, уравнение

$$\Delta\Delta u=0, \quad \text{или} \quad \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2\,\partial x_k^2}=0,$$

имеющее характеристическую форму

$$Q=\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2\right)^2,$$

и, во-вторых, дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} = 0,$$

имеющее характеристическую форму

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^4.$$

Примером параболического уравнения может служить уравнение

$$u_t = \Delta \Delta u$$

для функции $n+1$ независимых переменных с выделенной временной переменной $x_0 = t$. Здесь характеристическая форма $\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2\right)^2$ вырожденная, так как она не содержит переменной φ_0.

Оператор

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = \Delta \Delta u - 3\,\Delta u_{tt} + 2u_{tttt}$$

является гиперболическим, так как его характеристическая форма, содержащая переменные $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\varphi_0 = \tau$:

$$Q = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 - \tau^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 - 2\tau^2\right),$$

очевидно, удовлетворяет соответствующим требованиям.

С другой стороны, оператор

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = \Delta \Delta u - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$$

представляет собой оператор промежуточного типа; он не эллиптический, не параболический и не гиперболический, так как форма

$$Q = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2\right)^2 - \tau^4$$

имеет два, а не четыре действительных корня τ при фиксированных значениях $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Следующий пример системы первого порядка дает система дифференциальных уравнений Бельтрами:

$$Wu_x - bv_x - cv_y = 0,$$
$$Wu_y + av_x + bv_y = 0,$$

где матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

предполагается положительно определенной. Здесь соответствующая характеристическая форма имеет вид

$$Q(\varphi)=\begin{vmatrix} -W\varphi_1 & b\varphi_1+c\varphi_2 \\ W\varphi_2 & a\varphi_1+b\varphi_2 \end{vmatrix}=-W\left(a\varphi_1^2+2b\varphi_1\varphi_2+c\varphi_2^2\right).$$

В частном случае, когда $W=1$, $a=c=1$, $b=0$ (система Коши — Римана), мы имеем $Q(\varphi)=-\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)$.

Система дифференциальных уравнений Максвелла гиперболическая. В простейшем случае (для вакуума) эти уравнения имеют вид

$$\mathfrak{E}_t-\operatorname{rot}\mathfrak{H}=0,\quad \mathfrak{H}_t+\operatorname{rot}\mathfrak{E}=0,$$

если скорость света принята за единицу; здесь $\mathfrak{E}=(u_1, u_2, u_3)$ — вектор электрического поля, а $\mathfrak{H}=(u_4, u_5, u_6)$ — вектор магнитного поля; вместо четвертой независимой переменной (временной переменной) мы пишем t.

Записанные в координатной форме, уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial u_5}{\partial z}-\frac{\partial u_6}{\partial y}, && \frac{\partial u_4}{\partial t}=\frac{\partial u_2}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial y},\\
&-\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{\partial u_6}{\partial x}-\frac{\partial u_4}{\partial z}, && \frac{\partial u_5}{\partial t}=\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial z},\\
&-\frac{\partial u_3}{\partial t}=\frac{\partial u_4}{\partial y}-\frac{\partial u_5}{\partial x}, && \frac{\partial u_6}{\partial t}=\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial x}.
\end{aligned}\tag{8}$$

Читатель может легко убедиться в том, что характеристическая форма имеет вид

$$Q=\tau^2\left(\tau^2-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2\right)^2.$$

Уравнение $Q=0$ представляет собой, по существу, характеристическое соотношение для волнового уравнения. Это отражает тот факт, что если выделить любую компоненту u, то она будет удовлетворять волновому уравнению, и что справедлива следующая теорема.

Предположим, что из данной системы дифференциальных уравнений с характеристической формой Q с помощью исключения неизвестных получено одно уравнение; тогда характеристическая форма этого одного уравнения есть множитель формы Q[1]).

Доказательство предоставляется читателю. Строго говоря, уравнения Максвелла, имеющие кратные характеристики, не удовлетворяют данному выше узкому определению гиперболичности. Дальнейшее обобщение понятия гиперболичности устранит этот недостаток.

---

[1]) Эта теорема имеет аналог для характеристических форм систем высших порядков.

Характеристическое уравнение, соответствующее *дифференциальным уравнениям Дирака*, аналогично характеристическому уравнению для уравнений Максвелла. Уравнения Дирака относятся к системе четырех комплекснозначных функций

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

четырех переменных x_1, x_2, x_3, x_4 (где $x_4 = t$). Чтобы просто записать их, мы введем следующие матрицы

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения тогда примут вид

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - a_k \right) u - \beta b u = 0;$$

здесь вектор (a_1, a_2, a_3) пропорционален магнитному потенциалу, $-a_4$ — электрическому потенциалу, а b — массе покоя. Очевидно, характеристический определитель имеет вид

$$Q(\varphi) = \left| \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \varphi_k \right| = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - \varphi_4^2)^2,$$

т. е. представляет собой форму четвертой степени относительно переменных φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Таким образом, снова характеристические многообразия те же, что и у волнового уравнения.

Наконец, с помощью простых вычислений мы установим эквивалентность определений характеристик для одного уравнения высшего порядка и для системы первого порядка, полученной из этого урав-

нения. Если мы заменим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \ldots = 0$$

системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial p_l}{\partial x_n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_l} \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \qquad \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \ldots = 0,$$

то для этой системы мы получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \sum a_{1k}\varphi_k & \sum a_{2k}\varphi_k & \ldots & \sum a_{n-1,\, k}\,\varphi_k & \sum a_{nk}\varphi_k \\ \varphi_n & 0 & \ldots & 0 & -\varphi_1 \\ 0 & \varphi_n & \ldots & 0 & -\varphi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi_n & -\varphi_{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$(-1)^{n-1} \varphi_n^{n-2} \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0,$$

которое совпадает с характеристическим уравнением для одного уравнения.

Дальнейшие примеры см. в следующих параграфах и в гл. V и VI.

§ 3. *Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (и другие, которые сводятся к этому классу) допускают более полное исследование, чем в общем случае. Кроме того, так как классификация уравнений в некоторой точке P определяется только локальными значениями коэффициентов, то для того, чтобы выделять различные типы уравнений, достаточно рассмотреть случай постоянных коэффициентов. Действительно, в окрестности точки P линейную или квазилинейную систему можно локально аппроксимировать линейной системой с постоянными коэффициентами, если заменить значения коэффициентов в окрестности точки P их значениями в точке P.

1. Канонический вид и классификация уравнений второго порядка. Рассмотрим оператор второго порядка

$$L[u] = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \ldots \tag{1}$$

или дифференциальное уравнение $L[u]=0$, где коэффициенты $a_{ik}=a_{ki}$ — непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой области G, а точками заменены операторы ниже второго порядка относительно u. Оператор второго порядка снова называется *главной частью дифференциального оператора.*

Классификация дифференциальных операторов вида (1) определяется тем, как действует преобразование переменных

$$\xi_i = t_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

на форму дифференциального оператора в некоторой точке P^0: $(x^0)=\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$. Обозначая $\partial t_i/\partial x_k$ через t_{ik}, получаем

$$u_{x_l} = \sum_{k=1}^{n} t_{kl} u_{\xi_k} \quad \text{и} \quad u_{x_l x_s} = \sum_{i,\, k=1}^{n} t_{kl} t_{is} u_{\xi_i \xi_k} + \ldots,$$

где точки снова заменяют члены, содержащие производные функции u не выше первого порядка. Преобразование (2) приводит оператор (1) к виду

$$\Lambda[u] = \sum_{i,\, k=1}^{n} \alpha_{ik} u_{\xi_i \xi_k} + \ldots, \tag{3}$$

где коэффициенты α_{ik} определяются формулами

$$\alpha_{ik} = \sum_{l,\, s=1}^{n} t_{kl} t_{is} a_{ls}. \tag{4}$$

Таким образом, коэффициенты главной части $L[u]$ в точке (x^0) преобразуются так же, как коэффициенты квадратичной формы $Q = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k$ (*характеристической формы*), если переменные y_i подвергаются аффинному линейному преобразованию

$$y_i = \sum_{l=1}^{n} t_{il} \eta_l. \tag{5}$$

Квадратичную форму такого типа всегда можно с помощью аффинного преобразования привести к *каноническому виду*

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \eta_i^2,$$

где коэффициенты $\varkappa_i$ принимают только значения $+1$, -1 или 0. Число отрицательных коэффициентов, называемое *индексом инерции*, а также число коэффициентов, обращающихся в нуль, являются аффинными инвариантами формы. Поэтому эти числа характеризуют дифференциальный оператор в точке P^0.

Дифференциальный оператор называется *эллиптическим* в точке P^0, если все значения $\varkappa_i$ равны либо только $+1$, либо только -1. Он называется „собственно гиперболическим", или просто *гиперболическим*, если все значения $\varkappa_i$ имеют один знак, например, положительны, за исключением одного, например $\varkappa_n$, которое отрицательно. Если несколько значений $\varkappa_i$ положительны и несколько отрицательны, то оператор называется *ультрагиперболическим*. Если форма Q сингулярная, т. е. один или несколько коэффициентов $\varkappa_i$ обращаются в нуль, то дифференциальное уравнение называется *параболическим*.

Если дифференциальный оператор в точке P^0 эллиптический, то с помощью соответствующего линейного преобразования дифференциальное уравнение в этой точке может быть приведено к виду $u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\ldots+u_{x_nx_n}+\ldots=0$. Аналогично, если уравнение гиперболическое, то его можно преобразовать к виду

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\ldots+u_{x_{n-1}x_{n-1}}-u_{x_nx_n}+\ldots=0.$$

В общем случае, однако, невозможно найти преобразование, приводящее уравнение к одному из этих канонических видов *во всей области* [1]).

Однако, если коэффициенты a_{ik} уравнения (1) постоянны, то канонический вид для всей области можно получить с помощью одного аффинного преобразования, переводящего переменные x_i в ξ_i:

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{n} t_{ik}x_k.$$

Это преобразование, в соответствии с формулой (5), приводит характеристическую форму к каноническому виду. Если мы опять обо-

---

[1]) Если, как в § 1, мы хотим, чтобы в преобразованном операторе

$$\Lambda[u]=\sum_{i,\ k=1}^{n} \alpha_{ik}u_{\xi_i\xi_k}+\ldots$$

отсутствовали внедиагональные элементы матрицы (α_{ik}), то на n функций t_l мы должны наложить $\frac{1}{2}n(n-1)$ условий (см. формулу (4))

$$\sum_{l,\ s=1}^{n} a_{ls}t_{kl}t_{is}=0 \qquad (i\neq k).$$

Если $\frac{1}{2}n(n-1)>n$, т. е. $n>3$, то эта система уравнений — переопределенная, и поэтому, вообще говоря, не разрешима. В случае $n=3$ все еще можно исключить внедиагональные члены, но на элементы главной диагонали нельзя уже наложить условие равенства их между собой.

значим новые независимые переменные через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и если уравнение (1) однородное, то оно примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = 0, \tag{6}$$

где $\varkappa_i$ равны 1, -1 или 0.

В случае постоянных коэффициентов b_i и c также постоянны и уравнение можно привести к еще более простому виду посредством преобразования функции u; при этом исключаются первые производные u по тем переменным x_i, для которых $\varkappa_i \neq 0$. Мы исключим параболический случай и введем функцию v, отличающуюся от u экспоненциальным множителем:

$$u = v \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l\right\}. \tag{7}$$

Тогда дифференциальный оператор примет вид

$$L[u] = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l\right\} \left[\sum_{l=1}^{n} \varkappa_i v_{x_i x_i} + \left(c - \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{n} \frac{b_l^2}{\varkappa_l}\right) v\right]. \tag{8}$$

Следовательно, непараболические линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами можно свести к дифференциальным уравнениям вида

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i v_{x_i x_i} + pv = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{9}$$

где f — заданная функция независимых переменных, а p — некоторая постоянная. Таким образом, *все эллиптические линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами могут быть приведены к виду*

$$\Delta v + pv = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а все гиперболические линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами могут быть приведены к виду

$$\Delta v - v_{tt} + pv = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t).$$

(Мы здесь рассматриваем $n+1$ независимых переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и полагаем $x_0 = t$, а оператор Лапласа Δ строится только по переменным $x : (x_1, \ldots, x_n)$.)

2. Фундаментальные решения уравнений второго порядка. Для всех линейных дифференциальных уравнений, эллиптических

или гиперболических, независимо от их порядка и от того, постоянны ли их коэффициенты, важную роль играют „фундаментальные решения“, имеющие определенные особенности; это будет видно в следующих главах [1]). Здесь мы только коротко остановимся на случае эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$L[u] = \Delta u + \rho u = 0$$

и будем искать фундаментальные решения, зависящие только от расстояния $r = \sqrt{\sum (x_i - \xi_i)^2}$ от точки x до точки-параметра ξ. Приводя оператор Лапласа к полярным координатам, получаем (см. т. I, стр. 200)

$$u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r + \rho u = 0. \qquad (10)$$

Как легко проверить, функция

$$w(r) = \frac{u_r}{r}$$

удовлетворяет такому же уравнению, где $n-1$ заменено на $n+1$:

$$w_{rr} + \frac{n+1}{r} w_r + \rho w = 0. \qquad (11)$$

Таким образом, обозначая неизвестную функцию снова через u, мы получаем фундаментальные решения u для любого n с помощью рекуррентной формулы, если только известны фундаментальные решения u для $n = 2$ и $n = 3$; они определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'' + \frac{1}{r} u' + \rho u = 0$$

и

$$u'' + \frac{2}{r} u' + \rho u = 0$$

соответственно.

Для $\rho = 0$, т. е. для уравнения Лапласа, решения с точностью до произвольного постоянного множителя равны $u = \log 1/r$ и $u = 1/r$. Таким образом, мы получаем для всех $n \geqslant 3$ фундаментальные решения

$$u = \text{const} \cdot r^{2-n}.$$

При $\rho \neq 0$, например при $\rho = \omega^2$, мы получаем для $n = 1$ в комплексных обозначениях

$$u = e^{i\omega r}.$$

---

[1]) См., в частности, гл. VI, § 15.

Отсюда для $n=3$

$$u=i\omega\frac{e^{i\omega r}}{r},$$

для $n=5$

$$u=-\omega^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{i\omega}\frac{1}{r^3}\right)e^{i\omega r},$$

и т. д. Таким образом, все решения для нечетных n выражаются через тригонометрические функции (или гиперболические, если $\omega^2<0$).

Для четных n мы имеем при $n=2$

$$u=\alpha J_0(\omega r)+\beta N_0(\omega r)+\text{регулярная функция},$$

где J_0 и $N_0=(2/\pi)J_0(\omega r)\log r+\ldots$ — соответственно функции Бесселя и Неймана порядка нуль, а α, β — постоянные. Если в качестве α выбран нуль, то для $n=4$ мы находим сингулярное решение

$$u=\frac{J_0(\omega r)}{r^2}+\frac{w}{r}J_0'(\omega r)\log r+\ldots.$$

(Функция $J_0'(\omega r)/r$ регулярна при $r=0$.) Это решение мы называем фундаментальным решением. Легко получить следующее общее утверждение: для нечетных $n>1$ мы имеем сингулярное („фундаментальное") решение

$$u=\frac{U}{r^{n-2}}+\ldots,$$

а для четных —

$$u=\frac{U}{r^{n-2}}+W\log r+\ldots,$$

где точками заменены регулярные члены, а U и W — регулярные решения уравнений $L[U]=L[W]=0$. Соответствующие соотношения справедливы также для $\rho<0$, т. е. для мнимых ω.

В случае гиперболического дифференциального уравнения

$$L[u]=u_{tt}-\Delta u-\rho u=0 \qquad (x=x_1,\ldots,x_n) \tag{12}$$

совершенно аналогичные рассуждения приводят к следующему результату.

Мы отыскиваем „фундаментальные решения" уравнения (12), зависящие только от „гиперболического расстояния"

$$r=\sqrt{(t-\tau)^2-\sum_1^n(x_\nu-\xi_\nu)^2}$$

от точки t, x до точки-параметра τ, ξ в пространстве $m=n+1$ измерений. Для функции $u(r)$ мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''+\frac{n-1}{r}u'-\rho u=0.$$

Как и прежде, фундаментальные решения, обладающие особенностью на конусе $r=0$, имеют вид, описанный выше при изучении эллиптического случая. Главное отличие состоит в том, что особенность теперь сосредоточена на целом конусе и что вне конуса функция u не определена, или может быть доопределена тождественным нулем, тогда как в эллиптическом случае особенность имеется только в точке $x=\xi$. Значение таких фундаментальных решений (которые можно изменять с помощью умножения на константу и добавления любого регулярного решения уравнения $L[u]=0$) станет понятно в гл. VI. В т. I мы уже встречались с такими решениями, а именно, с функцией Грина (см. т. I, гл. V, § 14).

Здесь мы отметим, что эти фундаментальные решения $u(x;\xi)$ как функции точки x и точки-параметра ξ обладают следующим основным свойством.

В эллиптическом случае интеграл

$$v(x)=\int\limits_G\int f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,u(x, \xi)\,d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

взятый по области G, содержащей точку x, удовлетворяет с некоторой константой c уравнению Пуассона

$$L[v]=cf(x).$$

В частности, для $n=3$ интеграл

$$cv=\int\int\limits_G\int f(\xi)\frac{e^{i\omega r}}{i\omega r}\,dx_1 \ldots dx_n$$

удовлетворяет неоднородному „приведенному волновому уравнению“

$$\Delta v+\omega^2 v=f.$$

В гиперболическом случае можно доказать, что функция $v(x)$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению, если область интегрирования G заполняет характеристический конус, исходящий из точки x в пространстве ξ (см. гл. VI, § 15).

3. Плоские волны. Возвращаясь к уравнениям произвольного порядка k, мы снова запишем дифференциальное уравнение с n независимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$ в символическом виде

$$(P_k D_i+P_{k-1}D_i+\ldots+P_0)\,u+f=0, \tag{13}$$

где P_j — однородный полином с постоянными коэффициентами степени j относительно символов $D_i=\partial/\partial x_i$ $(i=1, \ldots, n)$, а f — заданная функция этих независимых переменных. Нам достаточно

рассмотреть однородное уравнение[1]), т. е. считать, что $f=0$. Неоднородное уравнение тогда уже исследуется просто (см., например, § 4).

Имеет место следующее основное свойство. При любом числе независимых переменных однородное уравнение (13) обладает решениями в виде показательных функций $e^{(ax)}$, где

$$(ax)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots$$

с постоянными a_ν. (Иногда мы будем также писать (a, x) или $a\cdot x$.) Необходимое и достаточное условие для того, чтобы u было решением, состоит в том, чтобы $a=(a_1, \ldots)$ удовлетворяло алгебраическому уравнению степени k

$$Q^*(a)=P_k(a)+P_{k-1}(a)+\ldots+P_0=0; \tag{14}$$

оно определяет алгебраическую поверхность степени k в пространстве $a_1, a_2, \ldots$. Классификация по типам, однако, относится к более простому однородному уравнению

$$Q(a)=P_k(a)=0;$$

это „характеристическое уравнение" зависит только от главной части дифференциального уравнения; оно определяет нормали к характеристическим элементам поверхности[2]), в соответствии с определениями из § 2.

Например, в случае трех измерений для уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\Delta u=0$ мы получаем соотношение $a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$. Поэтому хотя бы один из показателей a_ν мнимый; соответствующее решение можно записать, например, в виде

$$e^{xa_1+ya_2}e^{iz\sqrt{a_1^2+a_2^2}}.$$

Волновое уравнение имеет решения вида $e^{i(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-a_4t)}$, где $a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4^2=0$, а для „приведенного" волнового уравнения $\Delta u+\omega^2u=0$ должно выполняться соотношение $a_1^2+a_2^2+a_3^2=-\omega^2$. Для уравнения теплопроводности $u_t=\Delta u$ получается соотношение $a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4=0$.

Если уравнение $Q(a)=0$ не удовлетворяется ни при каких действительных значениях $a_1, \ldots, a_n$, то дифференциальное уравнение называется *эллиптическим*.

---

[1]) Из того, что коэффициенты постоянны, следует такое утверждение: если $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть решение некоторого однородного уравнения, то $u(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, \ldots, x_n-\xi_n)$ с произвольными параметрами ξ_i и производные $\partial u/\partial x_i$ также являются решениями.

[2]) Относительно смысла полного уравнения см. Гординг [2].

4. Плоские волны (продолжение). Бегущие волны. Дисперсия. В следующих параграфах мы прежде всего будем заниматься решениями, описывающими явления *распространения*, в частности, *плоскими волнами*, возникающими в *гиперболическом* случае. Вместе с n пространственными переменными x мы будем рассматривать еще одну переменную $x_0 = t$; мы составим скалярное произведение $(ax) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = A$ с помощью n-мерного вектора $a:(a_1, \ldots, a_n)$ и определим *фазу*

$$B = (ax) - bt = A - bt$$

с помощью постоянной $a_0 = -b$.

Предположим сначала, что дифференциальное уравнение содержит только главную часть, т. е. члены порядка k; другими словами, предположим, что $P_j = 0$ для $j < k$. Тогда имеет место следующий важный факт: решениями уравнения являются не только описанные выше показательные функции, но и вообще все функции вида

$$u = f(B), \tag{15}$$

причем *форма волны* $f(B)$ — *произвольная функция* фазы $B = A - bt$, а коэффициенты a_ν, b должны удовлетворять характеристическому уравнению $Q(-b, a) = 0$. (Ср. § 2, п. 4.)

Если это уравнение имеет действительные решения $a_1, \ldots, a_n, b$, то функция $f(B)$ представляет собой *бегущую неискажающуюся волну*.

Под термином *бегущая плоская волна* для однородного линейного дифференциального уравнения $L[u] = 0$ мы понимаем решение вида (15).

Плоские волны такого вида имеют постоянное значение на каждой плоскости постоянной фазы из семейства

$$B = (ax) - bt = \text{const}$$

в $(n+1)$-мерном пространстве x, t.

Чтобы оправдать термин „бегущая волна", мы рассмотрим n-мерное пространство $\mathfrak{R}_n$ пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$, в котором „поле" u меняется с течением времени t. Решение u вида (15) постоянно на всей плоскости *постоянной фазы* B, принадлежащей семейству параллельных плоскостей. Плоскость, на которой значение фазы постоянно, передвигается в пространстве $\mathfrak{R}_n$ параллельно самой себе с постоянной скоростью.

Если мы положим

$$a_l = \rho\alpha_l, \quad \sum_{l=1}^{n} \alpha_l^2 = 1, \quad \rho^2 = \sum_{l=1}^{n} a_l^2, \quad b = \rho\gamma,$$

$$B = A - bt = \rho\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \gamma t\right) = \rho((\alpha x) - \gamma t) = \rho E$$

и напишем

$$u = f(B) = \varphi(E),$$

то мы получим представление решения, в котором величины α_i являются „направляющими косинусами“ нормалей к плоским волнам, а γ обозначает скорость распространения волн. Величина E снова называется *фазой волны*, а функция φ, или f, называется *формой волны*.

Например, обычное волновое уравнение в пространстве n переменных $\Delta u - u_{tt} = 0$ допускает плоские волны вида

$$u = \varphi((\alpha x) - t);$$

здесь коэффициенты α_i могут быть компонентами произвольного вектора α, такого, что $\alpha^2 = 1$, а форма волны φ может быть произвольной функцией.

Другими словами, *волновое уравнение* $\Delta u - u_{tt} = 0$ *имеет решения в виде плоских волн произвольного направления и произвольной формы; все эти волны распространяются со скоростью* $\gamma = 1$.

Волны $f(B)$ называются неискажающимися, или волнами *без дисперсии*, так как волна или сигнал *произвольной формы* $f(B)$ без искажения распространяется со скоростью γ (по направлению нормали α к плоскостям постоянной фазы).

Если для произвольного направления α характеристическое уравнение $Q = 0$ имеет k действительных различных корней, т. е. существует k различных возможных скоростей распространения неискажающихся волн в любом направлении, причем эти скорости, вообще говоря, зависят от направления α, то дифференциальное уравнение (13) называется *гиперболическим*. (Позже мы обобщим это определение, допустив в некоторых случаях кратные корни.) Это определение гиперболичности, связанное с характеристическим уравнением $Q = 0$, сохраняется также тогда, когда дифференциальное уравнение содержит младшие члены.

Для дифференциального уравнения (13), содержащего младшие члены, для которого не все полиномы P_j при $j < k$ равны нулю, дело обстоит иначе, чем в случае неискажающихся волн. Если это бегущие волны, то они уже не могут иметь произвольную форму, а их скорость уже не определяется направлением нормали. В этом случае форма волны может описываться только показательной функцией; она зависит от заданного направления и от заданной скорости.

Рассмотрим сначала пример дифференциального уравнения

$$\Delta u - u_{tt} + cu = 0, \tag{16}$$

где $c \neq 0$. Если $u = f(B)$ — плоская волна для уравнения (16), причем

$$B = (\alpha x) - bt,$$

то мы сразу получаем для заданных a и b уравнение

$$f''(B)(a^2-b^2)+f(B)c=0. \tag{17}$$

Это значит, что функция $f(B)$ должна удовлетворять линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, а это ограничивает возможность выбора $f(B)$ классом показательных функций. Ясно, что для скорости $\gamma=1$, т. е для $a^2=b^2$, уже не существует бегущей волны. Однако для любой другой скорости и для произвольного направления возможные формы волны определяются из уравнения (17) и являются показательными функциями. Поэтому *направление и скорость волны, соответствующей дифференциальному уравнению* (16), *могут быть заранее произвольно заданы* (*за исключением скорости, равной* 1); *но при этом возможны только специальные формы бегущих волн.*

Конечно, вид показательной функции $f(B)$ зависит от знаков коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения (17).

Из физических соображений мы исключаем решения, которые не являются равномерно ограниченными функциями в пространстве; другими словами, мы рассматриваем только волны вида

$$f(B)=e^{i\rho((\alpha x)-\gamma t)},$$

где ρ — „частота". Тогда в нашем случае, если $c>0$, такие волны существуют для произвольного направления $a^2>b^2$, т. е. для любой скорости γ, не превышающей предельной скорости $\gamma=1$. Для скоростей, превышающих предельную, решения $f(B)$ уже не будут допустимыми волнами, так как они не ограничены в пространстве.

Во всяком случае, уравнение (17) описывает явление *дисперсии* в следующем смысле: если решение u является суперпозицией волн, распространяющихся в одном и том же направлении, причем все эти волны имеют форму, удовлетворяющую уравнению (17), то разные компоненты распространяются с различными скоростями; таким образом, форма составной волны будет изменяться со временем.

В случае общего дифференциального уравнения (13) форма распространяющейся волны $f(B)$

$$u=f(B)=f\left(\sum_1^n(ax)-bt\right)$$

снова должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f^k(B)P_k(-b,\ a)+f^{k-1}(B)P_{k-1}(-b,\ a)+\ldots+f(B)P_0=0. \tag{18}$$

Коэффициенты этого уравнения постоянны для любого набора параметров $a_0 = -b$, $a_1, \ldots, a_n$. Как и раньше, мы ограничим допустимые волны требованием

$$B = l\rho(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n - \gamma t),$$

где $a_\nu = \rho\alpha_\nu$ и $a_0 = -b = -\rho\gamma$, так что ρ является частотой, α — направлением нормали, а γ — скоростью распространения волны; ρ и α действительны, а $\gamma = p + iq$ может быть и комплексным.

Для произвольных ρ и α уравнение (18) определяет скорости γ как непрерывные функции α и частоты ρ, за исключением особых случаев, например, когда все коэффициенты уравнения (18) обращаются в нуль, кроме, может быть, P_0[1]).

Если для заданных ρ и α скорость γ имеет мнимую часть q, то волну можно записать в виде

$$e^{i\rho((\alpha x) - pt)} \cdot e^{-\rho q t}.$$

Тогда мы говорим о *затухающих волнах*, амплитуда которых в фиксированной точке пространства экспоненциально убывает со временем. (Решение с множителем $e^{\rho q t}$ для $q > 0$ обычно отбрасывается, так как оно неограничено при возрастании t.)

Снова мы встречаемся с явлением искажения, или *дисперсии*. Начальная гармоническая компонента $e^{i\rho(\alpha x)}$ распространяется со скоростью, зависящей от частоты; таким образом, начальная форма волны u, заданная суперпозицией членов $e^{i\rho(\alpha x)}$, искажается с течением времени (независимо от уменьшения амплитуды, или затухания), так как различные компоненты распространяются с различной скоростью или „рассеиваются" в соответствии с их различными частотами.

Итак, наличие дисперсии или бегущих неискажающихся волн связано с тем, входят ли члены младшего порядка в дифференциальное уравнение. В первом случае бегущие плоские волны имеют экспоненциальную форму, а скорость может непрерывно изменяться

---

[1]) Например, уравнение (16) не имеет решения в виде бегущей волны, если заданная скорость равна 1, а направление произвольно.

В другом примере дисперсии, заданной уравнением

$$\Delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} - u_t = 0,$$

исключительные значения для скорости и направления получаются из условий

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - b^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i - b = 0;$$

если эти условия выполняются, то существуют бегущие волны произвольной формы. Они распространяются со скоростью, равной 1, а их направления принадлежат конусу $\sum_{i \neq k} a_i a_k = 0$.

в зависимости от частоты. Во втором случае форма волны произвольная, а скорость может иметь только дискретные значения, равные корням характеристического уравнения[1]).

5. Примеры. Телеграфное уравнение. Неискажающиеся волны в кабелях. Для волнового уравнения $\frac{1}{c^2}u_{tt}=\Delta u$ возможны распространяющиеся в произвольном направлении со скоростью c плоские бегущие неискажающиеся волны

$$\varphi\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_l x_l-ct\right),\quad \sum_{l=1}^{n}\alpha_l^2=1.$$

Более общий пример дает телеграфное уравнение

$$u_{tt}-c^2u_{xx}+(\alpha+\beta)\,u_t+\alpha\beta u=0; \tag{19}$$

этому уравнению удовлетворяет напряжение или сила тока u, если их рассматривать как функции времени t и координаты x вдоль провода; x есть длина провода от некоторой начальной точки[2]).

За исключением случая, когда $\alpha=\beta=0$, это уравнение описывает явление дисперсии. Если ввести функцию $v=e^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t}u$, то мы получим для нее более простое уравнение

$$v_{tt}-c^2v_{xx}-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2v=0.$$

Это уравнение описывает случай отсутствия дисперсии тогда и только тогда, когда

$$\alpha=\beta. \tag{20}$$

---

[1]) Поучительное упражнение — проследить, как первый случай переходит во второй, когда коэффициенты P_j для $j<k$ стремятся к нулю в зависимости от некоторого параметра.

[2]) Это дифференциальное уравнение получается с помощью исключения одной из неизвестных функций из следующей системы двух дифференциальных уравнений первого порядка для силы тока i и напряжения u как функций x и t:

$$Cu_t+Gu+i_x=0,$$
$$Li_t+Ri+u_x=0.$$

Здесь L — самоиндукция кабеля, R — его сопротивление, C — емкость, и, наконец, G — утечка (потеря тока, деленная на напряжение). Константы в уравнении (19), возникающие в процессе исключения, имеют следующий смысл:

$$\frac{1}{c^2}=LC,\quad \alpha=\frac{G}{C},\quad \beta=\frac{R}{L},$$

где c — скорость света, α — емкостный, а β — индуктивный коэффициенты затухания.

В этом случае исходное телеграфное уравнение, конечно, не имеет совершенно неискажающихся волн произвольно заданной формы. Однако наш результат можно сформулировать следующим образом.

Если выполняется условие (20), *то телеграфное уравнение имеет решения в виде затухающих, однако „относительно" неискажающихся бегущих волн вида*

$$u = e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t} f(x \pm ct) \tag{21}$$

с произвольной функцией f; *волны могут распространяться по кабелю в обе стороны.*

Этот результат важен для телеграфного дела; он показывает, что если подобраны подходящие значения емкости и самоиндукции кабеля, то сигналы могут передаваться хотя и с затуханием по времени, но в относительно неискаженном виде (см. гл. V, приложение 2).

6. Цилиндрические и сферические волны. Принцип суперпозиции позволяет найти другие важные формы решений наших дифференциальных уравнений, в частности, *цилиндрические и сферические волны.*

(a) *Цилиндрические волны.* Волновое уравнение в случае двух измерений

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0 \tag{22}$$

при любом θ имеет решение

$$\exp\{i\rho(x\cos\theta + y\sin\theta\}\exp\{i\rho t\},$$

где ρ — число, которое можно выбирать произвольным образом. Интегрирование этой „плоской волны" по углу θ дает новое решение

$$u(x, y, t) = e^{i\rho t}\int_0^{2\pi}\exp\{i\rho r\cos(\theta-\varphi)\}\,d\theta = 2\pi e^{i\rho t}J_0(\rho r),$$

где полярная координата r вводится равенствами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Это решение представляет *стоячую волну.*

Таким образом, *инвариантное относительно вращения решение волнового уравнения* (22), так называемая *цилиндрическая волна, задается функцией Бесселя* J_0. Это решение регулярно в начале координат $r = 0$.

С помощью суперпозиции плоских волн мы можем также построить решение, имеющее особенность в начале координат и соответствующее *процессу излучения* (см. § 4) *с источником в начале координат.* Для этого построения мы используем несобственные волны. Рассмотрим комплексный контур интегрирования L на пло-

скости θ, изображенный на рис. 5 (см. т. I, гл. VII), и составим комплексный интеграл

$$u = e^{i\rho t} \int_L e^{i\rho r \cos\theta} d\theta = \pi e^{i\rho t} H_0^1(\rho r),$$

где H_0^1 — функция Ганкеля. Тогда u является решением рассматриваемого волнового уравнения.

Обе цилиндрические волны, конечно, периодичны по t и являются колеблющимися, но не периодическими функциями пространственной переменной r.

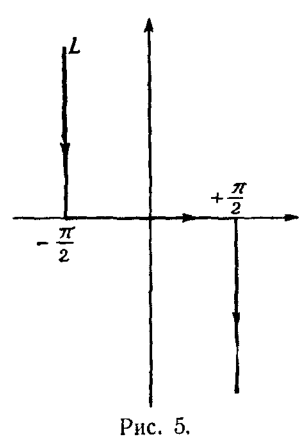


Рис. 5.

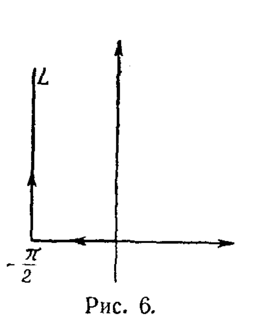


Рис. 6.

(б) *Сферические волны.* В трехмерном пространстве положение несколько иное. Из решения

$$\exp\{i\rho t\} \exp\{i\rho(\alpha x + \beta y + \gamma z)\} = \exp\{i\rho t\} w,$$

интегрируя w по единичной сфере пространства α, β, γ, мы получим новую функцию

$$v = \iint_{\Omega} e^{i\rho(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент поверхности единичной сферы. Так как эта функция, очевидно, инвариантна относительно вращения осей координат, мы можем для простоты вычислений положить $x = y = 0$, $z = r$. Вводя в пространстве α, β, γ сферические координаты θ, φ, мы получим

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{i\rho r \cos\theta} \sin\theta \, d\theta,$$

или

$$v = \frac{4\pi}{\rho} \frac{\sin \rho r}{r}.$$

Таким образом, функция $\exp\{i\rho t\}(\sin\rho r)/r$ является стоячей сферической волной, инвариантной относительно вращения и регулярной в начале координат; она получается с помощью суперпозиции регулярных бегущих плоских волн.

Волны с особенностью в начале координат, соответствующие явлениям излучения, снова могут быть получены с помощью несобственных плоских волн. Контур интегрирования L (рис. 6) приводит к функции

$$v = 2\pi \int_L e^{i\rho r\cos\theta} \sin\theta\, d\theta = 2\pi \frac{e^{i\rho r}}{i\rho r}. \tag{23}$$

В действительной области мы одновременно построили две сферические волны вида $(\cos\rho r)/r$ и $(\sin\rho r)/r$; вторая из них и есть только что построенная выше регулярная волна.

Заметим, что сферическая волна вида (23) может быть получена с помощью суперпозиции плоских волн $\exp\{i\rho(\alpha x + \beta y + \gamma z)\}$ для произвольной точки (x, y, z), где $z > 0$. Независимо от положения этой точки справедливо соотношение

$$2\pi \frac{e^{i\rho r}}{i\rho r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_L e^{i\rho(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \sin\theta\, d\theta, \tag{24}$$

где $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Простой вывод формулы (24) можно опустить[1]).

Так как волновое уравнение не содержит дисперсионных членов, мы можем построить волну, инвариантную относительно вращения,

$$u = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(t - \alpha x - \beta y - \gamma z) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

с произвольной функцией $f(\lambda)$. Это выражение инвариантно относительно вращения; поэтому мы можем вычислить этот интеграл в предположении, что $x = y = 0$.

В полярных координатах мы получаем

$$u = 2\pi \int_0^{\pi} f(t - r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{r}[F(t + r) - F(t - r)],$$

---

[1]) Установление равенства двух интегралов (23) и (24) связано с интегральной теоремой Коши для двух комплексных переменных, так как переход от $\rho \neq 0$ к $\rho = 0$ означает только перемещение контура интегрирования на комплексной плоскости θ (см. Вейль [1], где дается важное применение формулы (24) к задаче распространения радиоволн).

где F — неопределенный интеграл функции f — является произвольной функцией. Таким образом, для любой (дважды дифференцируемой) функции F функция

$$\frac{F(t+r)-F(t-r)}{r}$$

является решением[1]). Аналогично, каждая из функций

$$\frac{F(t+r)}{r} \quad \text{и} \quad \frac{F(t-r)}{r}$$

также является решением. Это легко показать с помощью соответствующих замен в функции f или F или с помощью непосредственной проверки. Эти решения, которые, очевидно, имеют особенность в начале координат, представляют собой *„бегущие сферические волны*, затухающие в пространстве".

Кроме того, эти функции — единственные решения волнового уравнения в трехмерном пространстве, которые как функции пространственных переменных зависят только от r, так как для функции $u(r, t)$ выражение $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ превращается в выражение

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r}(ru)_{rr}$$

(см. т. I, стр. 200). Поэтому волновое уравнение $\Delta u - u_{tt} = 0$ переходит в уравнение

$$\frac{1}{r}[(ru)_{rr} - (ru)_{tt}] = 0;$$

общее решение этого уравнения, согласно гл. I, § 6, равно

$$ru = F(t+r) + G(t-r)$$

с произвольными функциями F и G.

§ 4. Задача Коши. Задача излучения для волнового уравнения

Линейные задачи теории распространения волн часто могут быть решены с помощью суперпозиции известных частных решений дифференциального уравнения. Задача всегда состоит в том, чтобы найти

---

[1]) В двумерном случае аналогичное упрощение интеграла

$$u = \int_0^{2\pi} f(t - r\cos\theta)\, d\theta$$

невозможно. Это одно из проявлений существенного различия между задачами в четно- и нечетномерном пространствах, на которое мы уже указывали; это различие станет яснее в § 4 и в гл. VI.

решения u, зависящие от пространственных переменных x и от времени для $t \geqslant 0$ в некоторой области G пространства, удовлетворяющие заданным начальным условиям при $t=0$ и некоторым краевым условиям на границе области G (смешанные задачи). Если область G совпадает со всем пространством x и не задается никаких краевых условий, то мы имеем более простой случай задачи с одними начальными условиями, или „задачи Коши". Если u не зависит от t, и, соответственно, не задается никаких начальных условий, а область G ограничена, то мы имеем краевую задачу.

В этом параграфе мы рассмотрим несколько отдельных примеров; *более общая теория будет систематически изложена позднее* (см. также § 6).

1. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Преобразование тета-функции. *Для уравнения теплопроводности*

$$u_{xx} - u_t = 0 \tag{1}$$

мы рассмотрим следующую задачу Коши: для всех значений переменной x и для $t > 0$ найти ограниченное решение $u(x, t)$, обладающее непрерывными производными до второго порядка включительно и принимающее заданные значения

$$u(x, 0) = \psi(x)$$

при $t=0$; предполагается, что функция $\psi(x)$ всюду непрерывна и ограничена,

$$|\psi(x)| < M.$$

Решение этой задачи Коши определяется формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-(x-\xi)^2/4t} d\xi, \tag{2}$$

которая получается с помощью суперпозиции из найденного ранее (гл. I, § 3) „фундаментального решения". Эта формула описывает распространение тепла как суперпозицию отдельных процессов, *в каждом из которых начальная температура равна нулю всюду,* за исключением точки $x=\xi$, где в начальный момент имеется локальная концентрация тепла, пропорциональная значению $\psi(\xi)$.

Мы докажем этот результат с помощью непосредственной проверки. Дифференцирование под знаком интеграла сразу показывает, что при $t > 0$ функция (2) удовлетворяет уравнению теплопроводности. Чтобы проверить выполнение начального условия (при $t=0$),

мы вводим вместо ξ новую переменную интегрирования $\sigma = (\xi - x)/2\sqrt{t}$ *и получаем*

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x + 2\sigma\sqrt{t})\, e^{-\sigma^2} d\sigma. \qquad (3)$$

Мы разделяем этот интеграл на три части

$$J_1 + J_2 + J_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-T} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{T} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{T}^{\infty}$$

и выбираем $T = |t|^{-1/4}$. Если t достаточно мало, то для произвольно малого заданного ε на отрезке $-T \leqslant \sigma \leqslant T$ выполняется неравенство $|\psi(x + 2\sigma\sqrt{t}) - \psi(x)| < \varepsilon$, так как очевидно, что $|\sigma|\sqrt{t} \leqslant |t|^{1/4}$, а функция ψ непрерывна по предположению. Из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}$ мы сразу заключаем, что для достаточно малых t разность между интегралом J_2 и функцией $\psi(x)$ сколь угодно мала. Интегралы J_1 и J_3 можно оценить так:

$$J_1 \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-T} e^{-\sigma^2} d\sigma$$

$$J_3 \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{T}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma.$$

Так как несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma$ сходится, то эти интегралы можно сделать сколь угодно малыми, если t выбрать достаточно малым. Таким образом, заданная функция действительно является решением нашей задачи Коши.

Аналогичная явная формула дает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в случае двух или более измерений. Например, рассмотрим такую задачу: для $t > 0$ найти ограниченное решение $u(x, y, z; t)$ уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_t = 0,$$

которое при $t = 0$ совпадает с заданной непрерывной функцией $\psi(x, y, z)$.

Решение, как легко видеть, определяется формулой

$$u(x, y, z; t) = \frac{1}{8(\sqrt{\pi t})^3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-(1/4t)[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]} d\xi d\eta d\zeta. \tag{4}$$

Другая задача с начальными условиями для уравнения теплопроводности относится к замкнутому одномерному теплопроводящему телу (например, проволочному кольцу) длины 1. В этом случае задача с начальными условиями для уравнения $u_{xx} - u_t = 0$ ставится так же, как и раньше, но вводится дополнительное требование, чтобы и функция $\psi(x)$, и решение $u(x, t)$ были периодическими функциями x с периодом 1. С помощью суперпозиции решений

$$\exp\{-4\pi^2\nu^2 t\}\,(a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)$$

мы находим решение вида

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)\, e^{-4\pi^2\nu^2 t}$$

в предположении, что начальная функция $\psi(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x).$$

Выражая коэффициенты Фурье через интегралы и меняя порядок суммирования и интегрирования (что безусловно допустимо при $t > 0$), мы получаем

$$u(x, t) = \int_0^1 \psi(\xi) \left\{1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-4\pi^2\nu^2 t} \cos 2\pi\nu(x-\xi)\right\} d\xi. \tag{5}$$

С другой стороны, мы можем получить явное решение нашей задачи совсем другим способом, если вспомним, что функция

$$W(x-\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi-\nu)^2}{4t}\right\} \tag{6}$$

является периодическим решением уравнения теплопроводности с периодом 1. Рассуждение, аналогичное приведенному выше, показывает, что решение рассматриваемой задачи с начальными условиями определяется формулой

$$u(x, t) = \int_0^1 \psi(\xi)\, W(x-\xi, t)\, d\xi. \tag{7}$$

Сравнивая эти два решения и применяя „основную лемму“ [1]) вариационного исчисления, мы в силу произвольности функции $\psi(\xi)$ получаем тождество

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\nu^2 t}\cos 2\pi\nu x = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x-\nu)^2/t}. \tag{8}$$

Это тождество было получено раньше (т. I, стр. 70) для частного случая $x=0$ и называлось ***формулой преобразования эллиптической тета-функции***; здесь оно снова получено в связи с уравнением теплопроводности.

Вывод формулы (8) опирается на тот факт, что два решения (5) и (7) тождественно совпадают. Чтобы доказать единственность решения задачи с начальными условиями, мы покажем, что решение, соответствующее начальной функции, равной нулю, т. е. разность между двумя решениями, соответствующими одинаковым начальным значениям, тождественно равно нулю. Действительно, умножая уравнение $u_{xx}-u_t=0$ на u, интегрируя по нашему интервалу и учитывая периодичность, мы получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2dx + \int_0^1 u_x^2dx = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2dx \leqslant 0.$$

Так как при $t=0$ тождественно выполняется равенство $u=0$, то функция u тождественно равна нулю и при $t>0$ [2]).

2. Задача Коши для волнового уравнения. Мы уже получили решение задачи Коши для волнового уравнения в одномерном случае (см. гл. I, § 7, п. 1). Теперь мы найдем имеющее важное значение решение задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{tt} \tag{9}$$

в трехмерном пространстве, исходя из ранее найденных решений вида $F(r-t)/r$ (с произвольной функцией F). Здесь r определяется равенством

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2;$$

ξ, η, ζ — координаты точки-параметра.

---

[1]) См. т. I, стр. 164.

[2]) Этот метод доказательства единственности в значительно более общем виде будет играть важную роль в дальнейшем (гл. V, § 4 и гл. VI, § 8).

Пусть $F_\varepsilon(\lambda)$ — неотрицательная функция параметра λ, обращающаяся в нуль вне интервала $-\varepsilon < \lambda < \varepsilon$ и такая, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_\varepsilon(\lambda)\, d\lambda = 1.$$

Ясно, что полученная суперпозицией сферических волн функция

$$\frac{1}{4\pi} \iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta) \frac{F_\varepsilon(r-t)}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ — произвольная функция, является решением этого волнового уравнения.

Переходя к пределу под знаком интеграла при $\varepsilon \to 0$, мы получим выражение

$$u(x, y, z; t) = \frac{t}{4\pi} \iint_\Omega \varphi(x + t\alpha, y + t\beta, z + t\gamma)\, d\omega = tM_t\{\varphi\}, \quad (10)$$

где $d\omega$ — элемент поверхности сферы $\Omega : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, а $M_t\{\varphi\}$ — среднее значение функции φ на поверхности сферы радиуса t с центром в точке (x, y, z).

Однако легче непосредственно проверить, что функция u, заданная формулой (10), является решением волнового уравнения, чем обосновать этот предельный переход. Здесь мы опускаем эту проверку, так как она будет подробно проделана в более общем случае в гл. VI, § 12.

Очевидно, что функция u удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, y, z; 0) = 0, \quad u_t(x, y, z; 0) = \varphi(x, y, z).$$

Учитывая, что u_t так же, как и u, есть решение волнового уравнения, мы легко получаем, что *функция*

$$u = tM_t\{\varphi\} + \frac{\partial}{\partial t} tM_t\{\psi\} \quad (11)$$

является решением задачи Коши с заданными начальными значениями

$$u(x, y, z; 0) = \psi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z; 0) = \varphi(x, y, z).$$

3. Принцип Дюамеля. Неоднородные уравнения. Запаздывающие потенциалы. Если решена задача Коши для однородного линейного дифференциального уравнения, такого, как волновое уравнение, то все решения соответствующего неоднородного дифференциального уравнения можно найти с помощью простого и общего „принципа Дюамеля“, который является аналогом хорошо известного метода вариации постоянных или метода импульсов для обыкновенных

дифференциальных уравнений. Мы сначала сформулируем этот принцип (который будет встречаться и дальше в этом томе) и затем применим его к волновому уравнению.

Рассмотрим дифференциальное уравнение для некоторой функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$, или, короче, $u(x, t)$:

$$u_{tt} - L[u] = g(x, t). \tag{12}$$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор, который может содержать производную u_t, но не содержит производных по t более высокого порядка. В приложениях правая часть $g(x, t)$ представляет внешние силы, действующие на систему. Нужно решить следующую задачу Коши: найти решение u дифференциального уравнения (12), которое при $t=0$ удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \tag{12'}$$

К решению этой задачи приводит следующее рассуждение. Мы предполагаем, что для некоторого фиксированного τ правая часть уравнения (12) есть функция g_ε, обращающаяся в нуль всюду, кроме малого интервала $\tau - \varepsilon \leqslant t \leqslant \tau$, для которого

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} g_\varepsilon(x, t)\, dt = g(x, \tau).$$

Мы формально перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, предварительно проинтегрировав дифференциальное уравнение по t в пределах от $\tau - \varepsilon$ до τ. Таким образом мы придем к следующей задаче Коши для соответствующего однородного дифференциального уравнения: для заданного значения параметра τ найти при $t \geqslant \tau$ решение $u(x, t)$ уравнения

$$u_{tt} - L[u] = 0, \tag{13}$$

такое, что для $t = \tau$

$$u(x, \tau) = 0, \quad u_t(x, \tau) = g(x, \tau). \tag{13'}$$

Это решение мы продолжаем тождественным нулем при $t \leqslant \tau$; оно соответствует действию на покоящуюся при $t \leqslant \tau$ систему мгновенного импульса силы $g(x, \tau)$. Мы обозначим это решение задачи (13), (13'), зависящее от параметра τ, через $\varphi(x, t; \tau)$; его можно определить независимо от эвристических соображений. Мы утверждаем теперь, что *функция*

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau, \tag{14}$$

полученная с помощью суперпозиции импульсов φ, *является решением задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения* (12) *с начальными условиями* (12').

Это утверждение можно легко проверить. Так как

$$u_t = \int_0^t \varphi_t(x, t; \tau)\, d\tau,$$

$$u_{tt} = \varphi_t(x, t; t) + \int_0^t \varphi_{tt}(x, t; \tau)\, d\tau,$$

$$L[u] = \int_0^t L[\varphi]\, d\tau$$

и так как $\varphi_t(x, t; t) = g(x, t)$, функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению (12) и начальным условиям (12′).

Теперь мы применим этот общий результат к волновому уравнению в трехмерном пространстве. Согласно п. 2, мы имеем

$$\varphi(x, y, z, t; \tau) = (t - \tau)\, M_{t-\tau}\{g(x, y, z; \tau)\}.$$

Очевидно, что решением задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = g(x, y, z; t)$$

с начальными условиями

$$u(x, y, z; 0) = 0, \quad u_t(x, y, z; 0) = 0$$

является функция

$$u(x, y, z; t) = \int_0^t (t - \tau)\, M_{t-\tau}\{g(x, y, z; \tau)\}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \tau M_\tau \{g(x, y, z; t - \tau)\}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \tau\, d\tau \int_\Omega g(x + \tau\alpha, y + \tau\beta, z + \tau\gamma; t - \tau)\, d\omega,$$

где α, β, γ — компоненты вектора единичной длины. Вводя снова вместо полярных координат прямоугольные координаты $\xi = x + \tau\alpha$, $\eta = y + \tau\beta$, $\zeta = z + \tau\gamma$, мы имеем

$$u(x, y, z; t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \frac{g(\xi, \eta, \zeta; t - r)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{15}$$

где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$. Это выражение u называется *запаздывающим потенциалом*; действительно, оно образовано так же, как потенциал масс, распределенных в пространстве с плот-

ностью g, изменяющейся со временем (см. гл. IV, § 1). Однако эту плотность надо брать не в момент t, а в более ранний момент $t-r$; разность r — это интервал времени, за который сигнал, распространяющийся со скоростью 1, проходит расстояние от центра сферы x, y, z до точки (ξ, η, ζ).

3а. Принцип Дюамеля для систем первого порядка. Переход от решения задачи Коши для однородного уравнения к решению неоднородного уравнения является особенно простым и полезным, когда он применяется к системам первого порядка, записанным в матричном виде (см. § 2, п. 3, уравнение (4а)).

Предположим, что система записана в векторной форме

$$L[u] = u_t + \sum_{\nu=1}^{n} A^{\nu} u_{\nu} + Bu = g(x, t), \tag{13a}$$

где u — вектор с k компонентами, A^{ν}, B — заданные матрицы $k \times k$, а g — заданный вектор.

Предположим, что функция $u = \varphi(x, t; \tau)$, зависящая от параметра τ, является при $t > \tau$ решением однородного уравнения $L[u] = 0$, удовлетворяющим начальным условиям $u(x, t) = g(x, \tau)$ при $t = \tau$; тогда

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau$$

есть решение уравнения $L[u] = g(x, t)$ с начальным условием $u(x, 0) = 0$.

Доказательство очевидно и может быть опущено.

4. Задача Коши для волнового уравнения в двумерном пространстве. Метод спуска. Решение задачи Коши для волнового уравнения в случае двух измерений

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{tt} \tag{16}$$

можно сразу получить из решения соответствующей задачи в трехмерном пространстве с помощью следующего общего метода, который Адамар назвал *методом спуска.* (См. также гл. VI, § 12.) Мы будем рассматривать уравнение (16) как частный случай волнового уравнения в трехмерном пространстве, когда ни начальные данные, ни само решение не зависят от третьей пространственной переменной z. Таким образом мы „спускаемся“ от трех к двум переменным. Это рассуждение сразу дает искомое решение, если мы в формуле (10) из п. 2 предположим, что функция

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y)$$

не зависит от z. Подставляя в (10) $\xi = t\alpha$, $\eta = t\beta$, $\zeta = t\gamma$, мы получаем

$$u(x,\ y;\ t) = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} \varphi(x+\xi,\ y+\eta)\, d\omega,$$

где ξ, η — независимые переменные. Этот интеграл можно записать как интеграл по кругу $\xi^2+\eta^2 \leqslant t^2$ радиуса t:

$$u(x,\ y;\ t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2} \leqslant t} \frac{\varphi(x+\xi,\ y+\eta)}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{17}$$

Здесь элемент поверхности сферы $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = t^2$ выражен как

$$t^2\, d\omega = \frac{t}{\zeta}\, d\xi\, d\eta = \frac{t}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

Следовательно, формула (17) дает решение задачи Коши для волнового уравнения в случае двух измерений, если заданы начальные условия $u(x,\ y;\ 0) = 0$, $u_t(x,\ y;\ 0) = \varphi(x,\ y)$.

Существенное различие между двумерным и трехмерным пространствами выясняется при сравнении формул (17) и (10). В трехмерном пространстве решение в некоторой точке зависит только от начальных значений на поверхности трехмерной сферы радиуса t с центром в этой точке; для двумерного же случая область зависимости включает и границу, и внутренность круга радиуса t. Позднее мы выясним более глубокий смысл этого факта (см. § 4, п. 6 и гл. VI, § 18).

Кроме того, метод, изложенный в п. 3, позволяет получить решение неоднородного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = f(x,\ y;\ t), \tag{18}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,\ y;\ 0) = 0, \quad u_t(x,\ y;\ 0) = 0; \tag{18'}$$

оно определяется формулой

$$u(x,\ y;\ t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint \frac{f(\xi,\ \eta;\ t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

Его можно также записать в виде

$$u(x,\ y;\ t) = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_K \frac{f(\xi,\ \eta;\ \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\tau, \tag{19}$$

где K — область пространства ξ, η, τ, определенная неравенствами

$$0 \leqslant \tau \leqslant t; \quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \leqslant (t-\tau)^2.$$

5. Задача излучения. Проблемы излучения так же важны для физики, как и задача Коши; в действительности они могут рассматриваться как предельные случаи задачи Коши. Формулировка задач излучения, не зависящая от таких предельных переходов, будет дана ниже, в гл. VI, § 18. В задаче излучения искомая функция u и ее производные по t равны нулю в начальный момент времени (т. е. при $t=0$ мы имеем состояние покоя). Однако, в некоторой точке пространства, например, в начале координат $r=0$, задается особенность решения u в зависимости от времени.

В трехмерном пространстве мы уже знаем решения волнового уравнения с особенностью в фиксированной точке пространства; такими решениями являются функции

$$\frac{F(t-r)}{r}, \quad \frac{G(t+r)}{r}$$

— выходящая и входящая волна (мы пока не учитываем те начальные условия, которые должны выполняться). Решение задачи излучения получается следующим предельным переходом. Мы рассматриваем неоднородное дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-\Delta u=f(x, y, z; t), \tag{20}$$

где f — „плотность внешней силы“.

Решение соответствующей задачи Коши для $t>0$ с состоянием покоя в качестве начального условия (см. уравнение (15)) задается формулой

$$u=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant t}\frac{f(\xi, \eta, \zeta; t-r)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Пусть задан малый параметр ε; мы предположим, что $f=0$ для

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant\varepsilon^2,$$

и введем обозначение

$$\iiint\limits_{\rho\leqslant\varepsilon}f(\xi, \eta, \zeta; t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=4\pi g(t).$$

Если мы положим $g(t)=0$ для $t<0$ и перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$, то наше решение перейдет в функцию

$$u=\frac{g(t-r)}{r}, \quad \text{где } r^2=x^2+y^2+z^2. \tag{21}$$

Следовательно, в этом решении задачи излучения функция $4\pi g(t)$ представляет действующую силу, сконцентрированную в начале координат в момент t. Заметим, что в некоторой точке (x, y, z) пространства в момент времени t решение зависит только от

отдельного импульса, возникшего в начале координат в момент $t-r$ и пришедшего в точку (x, y, z) со скоростью 1.

Для задач излучения в двумерном случае положение совсем иное. Здесь мы имеем дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=f(x, y; t). \tag{22}$$

Мы предполагаем, что $f=0$ для $r^2=x^2+y^2 \geqslant \varepsilon^2$, и вводим обозначение

$$\iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\leqslant\varepsilon} f(\xi, \eta; t)\,d\xi\,d\eta=2\pi g(t).$$

Применяя результат из п. 4 и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$u(x, y; t)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^{t-r}\frac{g(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}\,d\tau & \text{для} \quad r\leqslant t,\\ 0 & \text{для} \quad r>t.\end{cases} \tag{23}$$

В отличие от трехмерного случая решение в точке (x, y) в момент времени t зависит не от отдельного импульса, возникшего в предшествующий момент, а от всего течения процесса излучения до момента $t-r$.

Интересно также изучить характер особенности нашего решения при $r=0$ в случае двух измерений. С этой целью мы сначала интегрируем по частям, принимая во внимание, что

$$\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}=-\frac{d}{d\tau}\log\left|t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\right|,$$

а затем разлагаем в ряд по r, что приводит к следующему представлению решения в окрестности особой точки:

$$u(x, y; t)=-g(t-r)\log r+g(0)\log 2t+$$
$$+\int\limits_0^t g'(\tau)\log 2(t-\tau)\,d\tau+\varepsilon(t, r),$$

где

$$\varepsilon(t, r)\to 0 \quad \text{при} \quad r\to 0.$$

Таким образом, в двумерном случае особенность решения задачи излучения сложнее, чем в трехмерном.

6. Явления распространения и принцип Гюйгенса. Сейчас мы несколько подробнее рассмотрим природу явлений распространения (однако изучение основных принципов будет предпринято только в гл. VI). Сначала мы рассмотрим однородное волновое уравнение

в трехмерном пространстве. Предположим, что при $t=0$ начальное состояние отлично от нуля только в некоторой окрестности G одной точки, например, начала координат. Чтобы найти u в точке (x, y, z) в момент времени t, мы окружаем точку (x, y, z) сферой радиуса t и вычисляем некоторые интегралы от начальных функций по этой сфере. Поэтому величина $u(x, y, z; t)$ отлична от нуля только тогда, когда поверхность этой сферы пересекает начальную область G, т. е. только в пределах некоторого интервала времени $t_1 < t < t_2$; длина этого интервала есть разность между наибольшим и наименьшим расстоянием от точки (x, y, z) до области G. Этот факт характеризует наше дифференциальное уравнение как уравнение, для которого явление распространения происходит со скоростью 1. Начальное состояние в области G не влияет на точку (x, y, z) до момента времени t_1, равного кратчайшему расстоянию от точки (x, y, z) до области G. После момента t_2, соответствующего наибольшему расстоянию, начальное состояние перестает оказывать какое-либо влияние. Это явление называется *принципом Гюйгенса* для волнового уравнения. Этот принцип утверждает, что резко локализованное начальное состояние наблюдается позднее из другой точки как явление, столь же резко ограниченное. В предельном случае, когда окрестность G, в которой начальное состояние отлично от нуля, стягивается в точку, например, если начальное возмущение при $t=0$ сосредоточено в начале координат, его влияние на точку (x, y, z) будет чувствоваться только в определенный момент времени t, причем t зависит от расстояния между началом координат и точкой (x, y, z).

В двумерном случае положение дел совершенно иное. Мы снова рассмотрим область G, содержащую начало координат, и предположим, что начальные значения u и u_t отличны от нуля только в этой области. В точке P с координатами x, y, отстоящей от G на расстояние t_1, без сомнения, выполняется равенство $u=0$ для $t < t_1$. Согласно формуле (17) из п. 4, величина u для $t > t_1$ уже не равна тождественно нулю. Действительно, если, например, начальная функция φ неотрицательна, то решение u в точке P при $t > t_1$ всегда остается отличным от нуля. Другими словами, в двумерном случае мы также имеем явление распространения в том смысле, что локализованное начальное возмущение достигает другой точки пространства только через некоторое время. Однако принцип Гюйгенса уже не имеет места, так как влияние начального возмущения уже не будет строго ограничено во времени. Если возмущение достигло некоторой точки в пространстве, то оно остается в ней неограниченно долго (реверберация).

При изучении явлений распространения мы замечаем, что состояние в точке (x, y, z) в момент t зависит от начальных значений u в некоторой области пространства, так называемой *области зави-*

симости, соответствующей точке $(x, y, z; t)$. Следовательно, для волнового уравнения в трехмерном пространстве эта область зависимости является поверхностью сферы радиуса t с центром в точке (x, y, z). Возмущение в этой точке в момент t не зависит от начальных данных внутри и вне поверхности этой сферы.

С другой стороны, в двумерном пространстве область зависимости включает и внутренность, и границу круга радиуса t с центром в точке (x, y).

Физически разница становится еще более понятной для решений проблемы излучения из п. 5. Предположим, что из начала координат в трехмерном пространстве распространяется возмущение. Тогда в момент t в точке $P(x, y, z)$ мы наблюдаем только то, что вышло из начала координат в момент $t-r$. В двумерном же пространстве результат наблюдения в точке в момент t зависит от всего процесса излучения, который происходит до момента $t-r$.

Таким образом, в трехмерном мире, в котором волны распространяются в соответствии с волновым уравнением, резкие сигналы передаются и могут приниматься как резкие. В двумерном мире принятый сигнал будет размытым.

В гл. VI мы увидим, что такого рода явления свойственны не только волновому уравнению и не только двумерному или трехмерному пространству. Мы увидим, что принцип Гюйгенса справедлив для волнового уравнения при любом нечетном числе n пространственных измерений, кроме $n=1$, и что он несправедлив при четном числе измерений.

§ 5. Решение задачи Коши с помощью интеграла Фурье

1. Метод Коши применения интеграла Фурье. Мы сейчас опишем общий метод решения задачи Коши с помощью суперпозиций плоских волн. Чтобы избежать проверки законности перестановки предельных переходов, мы будем пользоваться эвристическими соображениями при получении решений; после этого необходимо непосредственно проверить, что полученные так формулы действительно дают решение рассматриваемой задачи[1]).

Пусть снова

$$L[u]=0 \tag{1}$$

— линейное однородное дифференциальное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами для функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$, или $u(x, t)$. Пусть

$$u=e^{i(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n-bt)}, \tag{2}$$

[1]) Однако в п. 3 мы не будем разделять формальную конструкцию и проверку.

или, короче, $u = e^{i(ax)}e^{-ibt}$ — решение уравнения (1). Мы предположим, что уравнение (1) — *гиперболическое*, т. е. для любой системы действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (или для любого вектора a) существует ровно k различных действительных значений (см. § 3, п. 4)

$$b = b_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

которые являются алгебраическими функциями параметров a_i и для которых функция (2) является решением уравнения (1). Если W_1, $W_2, \ldots, W_k$ обозначают k произвольных функций от $a_1, \ldots, a_n$, то мы можем формально построить выражение

$$u = \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int W_j(a)\, e^{i(ax)}\, e^{-itb_j(a_1, a_2, \ldots, a_n)}\, da \tag{3}$$

— суперпозицию плоских волн; здесь da обозначает $da_1\, da_2 \ldots da_n$. Ясно, что это формальное выражение также является решением уравнения (1), если все интегралы сходятся и если можно применять дифференциальный оператор $L[u]$ под знаком интеграла.

Мы воспользуемся этим замечанием, чтобы построить решение u уравнения (1), удовлетворяющее при $t = 0$ начальным условиям

$$\begin{gathered} u(x, 0) = \varphi_0(x), \\ u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}(u(x, 0)) = \varphi_{k-1}(x) \end{gathered} \tag{4}$$

с произвольными функциями φ_ν, $\nu < k$.

Дифференцируя формулу (3) по t под знаком интеграла, мы получаем, согласно этим начальным условиям, при $t = 0$ для функций $W_1, W_2, \ldots, W_k$ систему уравнений

$$\begin{gathered} \varphi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \sum_{j=1}^{k} W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da, \\ \varphi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \sum_{j=1}^{k} (-ib_j)\, W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \sum_{j=1}^{k} (-ib_j)^{k-1}\, W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da. \end{gathered} \tag{5}$$

Согласно теореме об обращении преобразования Фурье, решения этих уравнений определяются формулами

$$\sum_{j=1}^{k} (-ib_j)^l W_j(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\cdots}} \int \varphi_l(\xi) e^{-i(a\xi)} d\xi$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1); \tag{6}$$

здесь ξ — вектор $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n$, а выражения, стоящие в правых частях, известны. Таким образом, для k неизвестных функций $W_1, W_2, \ldots, W_k$ мы получаем систему k линейных уравнений; ее определитель $|(-ib_j)^l|$ не обращается в нуль, так как, по предположению, все b_i различны. Функции W_j определяются однозначно и, следовательно, наша задача Коши формально решена. Обоснование будет дано в п. 3.

2. Пример. В качестве примера мы снова рассмотрим волновое уравнение в трехмерном пространстве

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

с начальными условиями

$$u(x, y, z; 0) = 0, \qquad u_t(x, y, z; 0) = \varphi(x, y, z).$$

Здесь для b мы получаем два значения

$$b = \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \pm \rho. \tag{7}$$

Применяя преобразование Фурье и учитывая начальное условие $u(x, y, z; 0) \doteq 0$, мы получаем представление

$$u(x, y, z; t) = \int \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int W(a_1, a_2, a_3) e^{i(a_1x + a_2y + a_3z)} \sin \rho t \, da. \tag{8}$$

После дифференцирования под знаком интеграла при $t = 0$ мы имеем

$$u_t(x, y, z; 0) = \varphi(x, y, z) = \int \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int \rho W(a_1, a_2, a_3) e^{i(a_1x + a_2y + a_3z)} da;$$

согласно теореме об обратном преобразовании, W определяется формулой

$$W(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 \rho} \int \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int \varphi(\xi, \eta, \zeta) e^{-i(a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)} d\xi \, d\eta \, d\zeta. \tag{9}$$

Подставляя это значение функции W в формулу (8) и меняя порядок интегрирования по переменным a_1, a_2, a_3 и по ξ, η, ζ в шестикратном интеграле

$$u = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{da}{\rho} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \varphi(\xi, \eta, \zeta) \sin \rho t \times$$

$$\times e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

мы могли бы попытаться получить решение в более простом виде. Однако это изменение порядка интегрирования нельзя произвести сразу, так как тогда не будет сходиться внутренний интеграл. Эта трудность обходится с помощью простого часто применяемого искусственного приема (см., например, гл. VI, § 12). Мы будем рассматривать не сам интеграл (8), а интеграл

$$v(x, y, z, t) = -\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(ax)} \frac{\sin \rho t}{\rho^2}\, da; \qquad (10)$$

дважды продифференцированный по t, он дает u:

$$u = v_{tt}.$$

Если мы в формулу (10) подставим вместо W выражение (9), изменим порядок интегрирования[1]) и воспользуемся обычными обозначениями[2]), то мы получим

$$v = -\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int e^{i[a(x-\xi)]} \frac{\sin \rho t}{\rho^3}\, da,$$

причем теперь внутренний интеграл J сходится. Простые вычисления дают

$$J = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int e^{i[a(x-\xi)]} \frac{\sin \rho t}{\rho^3}\, da = \frac{1}{2\pi^2 r} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin \rho r \sin \rho t}{\rho^2}\, d\rho.$$

Так как

$$\sin \rho r \sin \rho t = \sin^2 \frac{t+r}{2} \rho - \sin^2 \frac{t-r}{2} \rho,$$

---

[1]) Эта перемена производится без доказательства, так как мы имеем дело с эвристическим методом получения решения, который будет обоснован в гл. VI, § 13.

[2]) То есть $\rho^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, $\quad \rho^2\, d\rho\, d\omega = da$.

то мы сразу получаем

$$\int_0^\infty \frac{\sin \rho r \sin \rho t}{\rho^2}\, d\rho = \left(\frac{t+r}{2} - \left|\frac{t-r}{2}\right|\right) \int_0^\infty \frac{\sin^2 \rho}{\rho^2}\, d\rho = \\ = \frac{\pi}{2}\left(\frac{t+r}{2} - \left|\frac{t-r}{2}\right|\right) \qquad (11)$$

и

$$J = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} & \text{для} \quad r \leqslant t, \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{t}{r} & \text{для} \quad r \geqslant t, \end{cases} \qquad (12)$$

т. е.

$$v = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{r \leqslant t} \varphi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \frac{t}{4\pi} \iiint_{r \geqslant t} \frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (13)$$

Дифференцируя по t интеграл вида

$$J_1 = \iiint_{r \leqslant t} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

взятый по шару радиуса t с центром в точке (x, y, z), мы получаем интеграл по поверхности Ω этого шара:

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = \iint_\Omega f(\xi, \eta, \zeta)\, d\Omega.$$

Соответственно интеграл

$$J_2 = \iiint_{r \geqslant t} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

взятый по внешности сферы, имеет производную

$$\frac{dJ_2}{dt} = -\iint_\Omega f(\xi, \eta, \zeta)\, d\Omega.$$

Поэтому из формулы (13) мы получаем

$$v_t = -\frac{1}{4\pi} \iint_\Omega \varphi\, d\Omega + \frac{1}{4\pi} \iint_\Omega \varphi\, d\Omega - \frac{1}{4\pi} \iiint_{r \geqslant t} \frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

а следовательно,

$$v_t = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{r \geqslant t} \frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (14)$$

Дальнейшее дифференцирование дает

$$v_{tt} = \frac{1}{4\pi t} \iint_\Omega \varphi\, d\Omega, \qquad (15)$$

или, с применением введенного ранее обозначения $M_t\{\varphi\}$,

$$u = v_{tt} = tM_t\{\varphi\},$$

что согласуется с результатом § 4, п. 2 [1]).

3. Обоснование метода Коши. Вместо того чтобы применять метод Коши как чисто формальную конструкцию, нуждающуюся в дальнейшем обосновании, можно получить решение вместе с полным доказательством и анализом границ его применимости. Сейчас будет вкратце проведен этот анализ с некоторыми изменениями в прежних рассуждениях.

Наиболее общее линейное дифференциальное уравнение порядка k с постоянными коэффициентами может быть записано в виде

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) u = 0 \tag{17}$$

(см. § 3), где

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_0) = \sum_{j=0}^{k} P_j(y_1, y_2, \ldots, y_0) \tag{18}$$

— полином порядка k с постоянными коэффициентами, представленный в виде суммы однородных полиномов P_j степени $j \leqslant k$ [2]).

Задача Коши для уравнения (17) с плоскостью $x_0 = 0$ в качестве начальной поверхности состоит в отыскании решения уравнения (17), удовлетворяющего начальным условиям

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_0^j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{19}$$

$$\text{при } x_0 = 0 \quad \text{и} \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

причем функции φ_j заданы. Эта задача называется *корректно поставленной*, если [3]) существует такое число N, что для функций φ_j, принадлежащих классу [4]) C_N, уравнение (17) и условия (19) выполняются только для одной функции u (которая непрерывно зависит от функций φ_j и их производных порядка, не превосходящего N).

Очевидно, что условие

$$p = P_k(0, 0, \ldots, 0, 1) \neq 0, \tag{20}$$

---

[1]) По поводу обобщения этой формулы на пространство n измерений см. гл. VI, § 12.

[2]) Мы здесь пишем j в качестве индекса, что несколько отличается от обозначений § 3.

[3]) Критерии корректности постановки задачи рассматриваются в § 6, п. 2. Слово „корректно“ употребляется здесь именно в этом смысле.

[4]) C_N — класс функций, для которых существуют и непрерывны все частные производные порядка, не превосходящего N.

является необходимым, так как в противном случае уравнение (17) при $x_0 = 0$ дает соотношение между начальными функциями φ_j и их производными, которое не выполняется тождественно. (Условие (20) утверждает, что начальное многообразие $x_0 = 0$ не является характеристическим; см. § 2, п. 4.)

Менее очевидно другое необходимое условие: уравнение

$$P_k(y_1, y_2, \ldots, y_n, \eta) = 0 \tag{21}$$

должно иметь только действительные корни η для любых действительных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Мы докажем здесь необходимость этого условия для случая дифференциального уравнения

$$P_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) u = 0, \tag{17'}$$

содержащего только производные порядка k. Предположим, что для некоторых действительных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнение (21) имеет комплексный корень η. Так как коэффициенты алгебраического уравнения (21) действительны, то комплексно сопряженное к η число также должно быть корнем, и мы можем без ограничения общности считать, что

$$\operatorname{Im} \eta = -z < 0.$$

Тогда мы для любого положительного λ имеем решение дифференциального уравнения (17')

$$u = \lambda^{-N-k} e^{i\lambda(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n + x_0 \eta)}, \tag{22}$$

соответствующее начальным условиям

$$\varphi_j = i^j \eta^j \lambda^{j-N-k} e^{i\lambda(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)} \quad \text{для} \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

При $\lambda \to +\infty$ функции φ_j и их производные порядка, не превосходящего N, равномерно по $x_1, \ldots, x_n$ стремятся к нулю, в то время как

$$|u(0, 0, \ldots, 0, x_0)| = \lambda^{-N-k} e^{\lambda z x_0}$$

стремится к бесконечности. Это несовместимо с непрерывной зависимостью решения u от функций φ_j и их производных порядка, не превосходящего N. Аналогичные рассуждения применимы к более общему уравнению (17); они показывают, что задача Коши может быть поставлена корректно только тогда, когда все корни уравнения (21) действительны для действительных $y_1, \ldots, y_n$, в частности, если уравнение (17) *гиперболическое* в смысле § 2, п. 3 [1]).

[1]) См. также Джон [4], гл. II.

Однако это условие не является достаточным[1]). В качестве примера мы рассмотрим параболическое уравнение

$$u_{x_0x_0} - u_{x_1} = 0, \tag{23}$$

соответствующее $k=2$, $n=1$. Уравнение (21) сводится к уравнению $\eta^2=0$, и, следовательно, имеет только действительные корни. Одно из решений уравнения (23) определяется формулой

$$u = y_1^{-N-1} e^{i(x_1y_1+x_0\eta)},$$

если

$$\eta^2 + iy_1 = 0.$$

Решение u, соответствующее корню $\eta = (1-i)(y_1/2)^{1/2}$, стремится к бесконечности вместе с y_1, хотя его начальные значения и их производные порядка, не превосходящего N, стремятся к нулю. В соответствии с этим задача Коши для уравнения (23) поставлена некорректно, хотя корни уравнения (21) действительны.

Теперь мы дадим *достаточное* условие: задача Коши поставлена корректно, если все корни уравнения (21) *действительны и различны* при любых действительных не равных нулю одновременно значениях $y_1, \ldots, y_n$. Для доказательства мы построим решение методом, по существу не отличающимся от метода Коши [1]. Сначала мы заметим, что задачу Коши для уравнения (17) с начальными значениями (19) можно свести к задаче для того же уравнения с начальными значениями частного вида $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{k-2} = 0$ и с произвольной функцией φ_{k-1}. Искомое решение u общей задачи Коши (19) можно тогда записать в виде

$$u = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^r u_r}{\partial x_0^r},$$

где функции u_r — решения уравнения (17) с начальными условиями специального вида

$$\frac{\partial^j u_r}{\partial x_0^j} = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad j=0, 1, \ldots, k-2, \\ g_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{для} \quad j=k-1. \end{cases}$$

Функции g_r надо подобрать так, чтобы функция u удовлетворяла условиям (19); поэтому мы должны потребовать, чтобы выполнялись соотношения

$$g_{k-1} = \varphi_0,$$

$$g_{k-1-j} + \sum_{r=k-j}^{k-1} \left(\frac{\partial^{r+j} u_r}{\partial x_0^{r+j}} \right)_{x_0=0} = \varphi_j \quad \text{для} \quad j=1, 2, \ldots, k-1.$$

---

[1]) Для уравнений с постоянными коэффициентами Гординг [2] дал условия, необходимые и достаточные для корректности постановки задачи Коши.

Для $j=0, 1, \ldots, k-1$ мы последовательно получаем соотношения, из которых определяются сначала g_{k-1} и, следовательно, u_{k-1}, затем g_{k-2} и, следовательно, u_{k-2} и т. д. Таким образом, достаточно решить уравнение (17) с начальными значениями

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_0^j}=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad j=0, 1, \ldots, k-2, \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) & \text{для} \quad j=k-1 \end{cases} \tag{24}$$

на поверхности $x_0=0$. Чтобы завершить построение решения, мы рассмотрим сначала решение, соответствующее функции φ вида $\exp\{i(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)\}$; согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений, это решение определяется формулой

$$\exp\{i(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)\}\,Z(y_1, \ldots, y_n, x_0), \tag{25}$$

где

$$Z(y_1, \ldots, y_n, x_0)=\frac{p}{2\pi}\oint\frac{e^{i\eta x_0}}{P(iy_1, \ldots, iy_n, i\eta)}\,d\eta. \tag{26}$$

Величина p здесь задается формулой (20), а контур интегрирования на комплексной плоскости η должен охватывать все корни знаменателя. Если y изменяется в ограниченной области пространства, то корни знаменателя также ограничены, так что можно выбрать контур интегрирования, не зависящий от y. Отсюда следует, что Z есть целая аналитическая функция своих аргументов. Положим $y_\nu=rz_\nu$, где $z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2=1$. Мы покажем, что величины

$$r^{k-1}Z, \quad r^{k-2}\frac{\partial Z}{\partial x_0}, \ \ldots, \ r^{-1}\frac{\partial^k Z}{\partial x_0^k} \tag{27}$$

равномерно ограничены для действительных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n, x_0$, таких, что $r>1$, $|x_0|<M$.

С этой целью мы сначала запишем уравнение

$$P(iy_1, \ldots, iy_n, i\eta)=0 \tag{28}$$

в виде

$$P_k\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\eta}{r}\right)+\frac{1}{ir}P_{k-1}\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\eta}{r}\right)+\ldots=0. \tag{29}$$

Так как корни ζ уравнения

$$P_k(z_1, \ldots, z_n, \zeta)=0 \tag{30}$$

по предположению простые и так как простые корни многочлена с фиксированным старшим коэффициентом являются непрерывными и дифференцируемыми функциями остальных коэффициентов, то для любого корня η уравнения (28) существует такой корень ζ уравнения (30), что для больших r величина $|\eta/r-\zeta|$ имеет порядок $1/r$. Корни ζ действительны и различны; следовательно, корни η различны

и имеют ограниченную мнимую часть при больших r. Применяя теорию вычетов, мы можем для больших r написать Z в виде

$$Z = p \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{i\eta_j x_0}}{P'(iy_1, \ldots, iy_n, i\eta_j)},$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ — корни уравнения (28), а P' — производная функции P по последнему аргументу. Так как

$$P'(iy_1, \ldots, iy_n, i\eta_j) =$$
$$= (ir)^{k-1}\left[P'_k\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\eta_j}{r}\right) + \frac{1}{ir} P'_{k-1}\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\eta_j}{r}\right) + \ldots\right] =$$
$$= (ir)^{k-1} P'_k(z_1, \ldots, z_n, \zeta) + O\left(r^{k-2}\right)$$

и так как величины $\exp\{i\eta_j x_0\}$ и η_j/r ограничены, отсюда следует, что выражения (27) ограничены для $r > 1$ и $|x_0| < M$.

Теперь мы в состоянии решить задачу Коши с начальными условиями (24). Как и раньше, мы пользуемся сокращенными обозначениями x, y, ξ для векторов $x_1, \ldots, x_n$ и т. д., а $dx = dx_1 \ldots dx_n$ и т. д. Предположим, что функция φ обращается в нуль вне некоторой ограниченной области и принадлежит классу C_{n+2}. Тогда функция φ допускает представление в виде интеграла Фурье (см. т. I, стр. 75):

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \psi(y)\, e^{i(xy)}\, dy,$$

где

$$(2\pi)^n \psi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \varphi(\xi)\, e^{-i(y\xi)}\, d\xi. \tag{31}$$

Функция φ принадлежит классу C_{n+2}; следовательно, интегрированием по частям можно установить, что величина $r^{n+2}\psi(y)$ ограничена и поэтому интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int r\,|\psi(y)|\, dy$$

сходится. Тогда функция

$$u(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \psi(y)\, e^{i(xy)}\, Z(y, x_0)\, dy \tag{32}$$

принадлежит классу C_k и, очевидно, удовлетворяет уравнению (17) и условиям (24). Следовательно, задача Коши решена. Предположе-

ние о том, что φ обращается в нуль вне некоторой ограниченной области, не является ограничением, так как можно показать, что решение u зависит только от значений начальной функции φ в некоторой *ограниченной* области. (Это следует, например, из теоремы единственности; см. стр. 239.)

Выражение (32) для функции u не включает непосредственно значений начальной функции φ, в него входит только ее преобразование Фурье ψ. Поэтому подставим выражение (31) для ψ в формулу (32); мы получим

$$u(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \varphi(\xi) K(x-\xi, x_0)\, d\xi, \tag{33}$$

где

$$(2\pi)^n K(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int e^{i(xy)} Z(y, x_0)\, dy. \tag{34}$$

Перемена порядка интегрирования, которая приводит к формуле (33), без сомнения, законна, если интеграл, определяющий функцию K, абсолютно сходится. Так как величина $r^{k-1}Z$ ограничена, этот интеграл сходится абсолютно, если порядок уравнения k и число независимых переменных $n+1$ удовлетворяют неравенству

$$k \geqslant n+2. \tag{35}$$

Представление (33) показывает, что в этом случае решение u *непрерывно* зависит от начальной функции φ. Это уже не следует из предыдущих рассуждений, если неравенство (35) нарушается (как в случае волнового уравнения при большом числе измерений). Однако и в таких случаях можно вывести несколько измененную формулу (33). Мы предположим, что существует целое число $\varkappa$, такое, что

$$n-1 \geqslant 2\varkappa \geqslant n+2-k. \tag{36}$$

Такое число всегда можно найти, если порядок дифференциального уравнения k не менее четырех. Обозначив оператор Лапласа $\partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$ через Δ, мы можем записать решение u, заданное формулой (32), в виде

$$u = \Delta^{\varkappa} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \psi(y)\, r^{-2\varkappa} e^{i(xy)} Z(y, x_0)\, dy,$$

причем этот интеграл абсолютно сходится в начале координат, так как $2\varkappa < n$.

Если мы теперь положим

$$(2\pi)^n K^*(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int r^{-2\varkappa} e^{i(xy)} Z(y, x_0)\, dy,$$

то интеграл, определяющий K^*, абсолютно сходится и мы получаем представление

$$u = \Delta^{\varkappa} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi(\xi) K^*(x - \xi, x_0)\, d\xi.$$

Так как это выражение можно записать также в виде

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \Delta^{\varkappa} \varphi(x + \xi) K^*(-\xi, x_0)\, d\xi,$$

то мы видим, что решение u непрерывно зависит от функции φ и ее производных до порядка, не превосходящего $2\varkappa$. (Пропущенное здесь решение для случая $k = 2$ можно получить другими способами; см., например, гл. VI, § 12.)

Аналогичную теорию можно построить для систем с постоянными коэффициентами; однако здесь мы ее не приводим.

В § 3, п. 6 мы строили решения для таких дифференциальных уравнений, для которых $P_{\varkappa} = 0$ при всех $\varkappa$, кроме $\varkappa = k$ (т. е. для случая без дисперсии), с помощью суперпозиции плоских волн произвольной формы, не обязательно показательных функций. Таким образом, применения интеграла Фурье можно было бы избежать (см. гл. VI, § 14, 15).

§ 6. *Типичные задачи для уравнений математической физики* [1])

1. Вводные замечания. Задача отыскания „общего решения“, т. е. всех решений некоторого дифференциального уравнения с частными производными, почти никогда не встречается. Обычно цель состоит в том, чтобы выделить отдельные специальные решения, добавляя к дифференциальному уравнению некоторые дополнительные условия. Для $n+1$ независимых переменных эти дополнительные ограничения обычно относятся к n-мерным многообразиям, которые иногда являются границами, иногда — „начальными многообразиями“, а иногда — поверхностями разрыва внутри областей, в которых отыскиваются решения („граничные“, „начальные“ условия и „условия на разрывах“). В частности, в § 4 рассматривалась *задача с начальными условиями*, или „задача Коши“. На плоскости $x_0 = t = 0$ задавались значения функции u и в некоторых случаях значения ее

---

1) Ср. Адамар [2], в особенности гл. I, а также исчерпывающую работу Адамара [1], в которой рассмотрены также другие типы задач.

производных по t как функции координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы ищем при $t \geqslant 0$ решение u, такое, которое при $t = 0$ соответствует заданному „начальному состоянию". Такие решения задачи Коши в некоторых случаях можно продолжать для $t < 0$ так, чтобы многообразие $t = 0$ лежало внутри области определения решения. Другими словами, состояние при $t = 0$ можно рассматривать как результат предыдущего состояния, продолжение которого для последующих значений времени управляется теми же законами. В случае дифференциальных уравнений первого порядка, для которых решение задачи Коши построено в гл. II, такое продолжение делается автоматически. Для задач более высокого порядка аналогичный результат содержится в гл. I, § 7, где рассматриваются аналитические дифференциальные уравнения и аналитические начальные условия. Однако предполагать, что либо дифференциальное уравнение, либо начальные условия аналитичны, — это значит вводить искусственное ограничение; кроме того, даже для аналитических дифференциальных уравнений аналитический характер решений не является a priori очевидным. Поэтому разумно рассматривать задачу Коши или краевые задачи, не занимаясь продолжением решений за эти границы.

Типичной *краевой задачей* — одной из центральных задач анализа — является задача отыскания решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, регулярного внутри заданной области, т, е. непрерывного там вместе со своими первыми и вторыми производными, которое принимает заданные непрерывные, но не обязательно аналитические граничные значения на границе этой области. В случаях $n = 2$ и $n = 3$ эта задача была явно решена для круга и шара с помощью интеграла Пуассона (см. гл. I, § 3, п. 2 и т. I, гл. VII, стр. 433). В гл. IV этого тома и в томе III мы построим и изучим решения для произвольных областей.

В других краевых задачах для уравнения Лапласа на границе задаются значения некоторой линейной комбинации функции и ее нормальной производной. Задачи такого типа обсуждались в т. I, гл. VI с точки зрения вариационного исчисления. Они будут решены в т. III.

Теория потенциала дает хороший пример того, что „общее" решение может быть бесполезным при решении краевых задач. Например, хорошо известное общее решение уравнения Лапласа для $n = 2$ имеет вид $u = f(x + iy) + g(x - iy)$, где f и g — произвольные аналитические функции комплексного переменного. Однако этот вид решения не имеет большой ценности при решении общей краевой задачи[1]).

[1]) Отметим, что в ряде работ решение весьма общих краевых задач для эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными получено, исходя из общего представления решений. См., например, Векуа [2,1]. — *Прим. ред.*

Затем мы упомянем нелинейную краевую задачу, возникающую в теории минимальных поверхностей. Предположим, что в пространстве x, y, u задана замкнутая пространственная кривая Γ, проекция C которой ограничивает некоторую область G на плоскости x, y. Чтобы найти минимальную поверхность $u(x, y)$, ограниченную контуром Γ, мы ставим следующую *краевую задачу для уравнения минимальных поверхностей*

$$\left(1+u_y^2\right) u_{xx}-2u_x u_y u_{xy}+\left(1+u_x^2\right) u_{yy}=0. \tag{1}$$

Найти решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения (1), дважды непрерывно дифференцируемое в G и принимающее заданные значения на C (задача Плато в несимметричной форме).

Далее, следует указать на важный класс „смешанных задач". Мы рассматриваем в пространстве переменных x_1, x_2, ..., x_n фиксированную область G с границей Γ, которая предполагается достаточно гладкой. В области G для $t \geqslant 0$ мы ищем функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, или $u(x, t)$, удовлетворяющую заданному дифференциальному уравнению $L[u]=0$, принимающую на Γ заданные граничные значения, которые могут зависеть также и от t, и удовлетворяющую при $t=0$ в G заданным начальным условиям. Такая задача ставится для струны, натянутой между точками $x=0$ и $x=1$, с граничными условиями

$$u(0, t)=u(1, t)=0$$

и начальными условиями

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x).$$

Во многих смешанных задачах граничные условия для дифференциальных уравнений неоднородны. Если оператор $L[u]$ линейный и однородный, то различают два типа краевых задач.

1. Граничные условия однородны; например, функция обращается в нуль на границе. Такие условия возникают *в задачах о колебаниях* ограниченных тел; предполагается, что движение начинается при $t=0$ с заданного начального состояния. В т. I эти задачи о колебаниях были подробно исследованы, в частности, на основе теории собственных функций.

2. Начальные условия однородны; например, функция u и, может быть, некоторые ее производные обращаются в нуль при $t=0$. Однако краевые условия неоднородны. Задачи такого рода, как, например, *задачи о переходном режиме*, играют важную роль во многих приложениях.

В принципе задачи с неоднородными краевыми условиями можно свести к задачам первого типа. Надо только вычесть из функции, которая является неизвестной в дифференциальном уравнении, функцию, которая удовлетворяет заданным начальным и граничным условиям, а в остальном выбирается произвольно. Тогда для разности мы получаем задачу типа задачи о колебаниях, но с неоднородным

уравнением; поэтому к ней можно непосредственно применить метод собственных функций в соответствии с т. I, гл. V. Несмотря на возможность такого сведения, желательно и с теоретической и с практической точки зрения провести независимое исследование задач с неоднородными краевыми условиями, которые мы в дальнейшем будем называть *нестационарными*. Методы, специально приспособленные для приложений, будут рассмотрены в приложении 2 к гл. V.

Проблемы излучения, которые в § 4, п. 5 рассматривались как предельные случаи задачи Коши для неоднородных уравнений, можно рассматривать также как предельные случаи нестационарных задач; поэтому их также можно причислять к классу смешанных задач.

Наконец, упомянем несколько типичных примеров, которые не входят в описанные выше классы. *Задача Римана об отображении* состоит в том, чтобы конформно отобразить заданную область G плоскости x, y на круг $u^2+v^2<1$. Аналитически это приводит к следующей краевой задаче: найти для системы Коши — Римана

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

решение — пару функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, определенных в области G с границей Γ, непрерывных в G вместе с первыми производными; кроме того, функции u и v должны иметь непрерывные граничные значения, удовлетворяющие граничному условию $u^2+v^2=1$, и отображение Γ на единичную окружность должно быть взаимно однозначным.

В этом случае, очевидно, перед нами уже не простая граничная задача теории потенциала, хотя ее решение можно свести к решению такой задачи (как было показано в т. I, стр. 319 и будет показано с другой точки зрения в следующей главе).

Более общей является *задача Плато* в параметрической форме: построить минимальную поверхность, ограниченную заданной пространственной кривой Γ. В соответствии с § 1, п. 4, эту задачу можно сформулировать как следующую задачу для дифференциальных уравнений: в единичном круге $u^2+v^2<1$ найти три функции x, y, z переменных u, v, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \tag{2}$$

и дополнительным условиям

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0, \tag{3}$$

причем их граничные значения $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ должны быть непрерывными функциями длины дуги s на единичной окружности и должны задавать параметрическое представление пространственной кривой Γ. Хотя задача Плато в несимметричной форме [см. уравнение (1)] не всегда имеет решение, в такой форме она всегда разрешима [1]).

[1]) См. Курант [2].

Другой типичный пример, относящийся к уравнению Лапласа, — это „задача о струе“ в плоской гидродинамике. Она существенно отличается от классических краевых задач, так как значения задаются на „*свободных*“ (т. е. не заданных a prior) границах. Мы рассмотрим задачу о двумерном безвихревом истечении несжимаемой жидкости из симметричного сопла. Предполагается, что течение симметричное; ось симметрии, например ось x, является линией тока, и ее можно заменить твердой стенкой. Предположим, что G — бесконечная область на плоскости x, y, ограниченная снизу осью x, а сверху некоторой кривой, состоящей из двух частей: границы сопла D и границы струи S (см. рис. 7). Заданная граница сопла D простирается от точки A назад, асимптотически приближаясь к горизонтальной прямой $y=b$. Неизвестная граница струи S продолжается вперед от точки A, асимптотически приближаясь к горизонтальной линии $y=1$. Мы хотим найти „функцию тока“ $\psi(x, y)$, описывающую искомое течение, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\Delta\psi=0$. Так как границы области G являются линиями тока, функция ψ на них постоянна; мы можем потребовать, чтобы было $\psi=0$ на оси x и $\psi=1$ на $D+S$. На границе S давление постоянно; поэтому, согласно теореме Бернулли, на ней $\partial\psi/\partial\nu=\text{const}$ (ν обозначает внешнюю нормаль). Кроме того, мы требуем, чтобы величина $\partial\psi/\partial y$ стремилась к 1 при $x\to\infty$ и к $1/b$ при $x\to-\infty$. Эта задача является задачей со „свободной“ границей. Граница S и величина b, фигурирующие в условиях, наложенных на функцию u, не заданы заранее, а должны быть найдены в процессе решения задачи. В соответствии с этим задается дополнительное граничное условие, кроме обычного условия краевой задачи, а именно требуется, чтобы на S нормальная производная была постоянной [1]). Наконец, следует упомянуть задачу еще одного типа, *задачу рассеяния*; нужно изменить „входящую“ волну, заданную a priori, например плоскую волну; требуется найти еще одно решение волнового уравнения, „рассеянную волну“, так чтобы сумма удовлетворяла некоторым условиям, определяемым препятствиями. Мы будем рассматривать такие задачи в гл. IV, § 5.

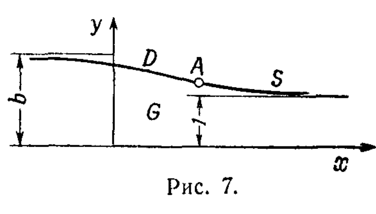


Рис. 7.

2. Основные принципы. Типы дифференциальных уравнений, перечисленные в п. 1, возникают из задач физики, механики или

[1]) Задачу о свободной струе рассматривал Гельмгольц в 1868 г. Он и его последователи получили решения для ряда специальных форм сопла. Существование решения для сопла произвольной формы было установлено Вайнштейном в 1929 г. Исторический очерк и библиографию по теории следов и струй в случае двух измерений см. в работе Вайнштейна [1].

геометрии. Характер дополнительных условий, таких, как краевые или начальные условия, также подсказывается физической реальностью. Тем не менее необходимо дать обоснование с чисто математической точки зрения. Однако мы не хотим предпринимать попытку полной систематизации; вместо этого мы установим в связи с некоторыми типичными примерами важные руководящие принципы, которые будут подтверждены дальнейшим ходом наших исследований.

Основной принцип состоит в следующем.

Краевые задачи естественным образом связаны с эллиптическими уравнениями, а задача Коши, смешанные задачи и задачи излучения возникают в связи с гиперболическими и параболическими дифференциальными уравнениями.

Математическая задача, соответствующая физическому явлению, должна удовлетворять следующим основным требованиям.

(1) Решение должно существовать.

(2) Решение должно определяться однозначно.

(3) Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (требование устойчивости) [1]).

Первое требование выражает естественное условие, чтобы на решение не накладывалось слишком много ограничений, т. е. чтобы среди этих ограничений не было противоречащих друг другу.

Второе требование соответствует полноте задачи: неопределенность или неоднозначность должны быть исключены, если они не присущи самой физической ситуации [2]).

Третье требование, особенно тонкое, необходимо, если мы хотим, чтобы математическая задача описывала действительно наблюдаемые физические явления. В действительности данные задачи нельзя считать строго фиксированными; сам процесс измерения вводит малые ошибки. Например, пространственные или временные координаты всегда заданы в некоторых пределах точности. Поэтому считать, что математическая задача правильно описывает физическое явление, можно только в случае, когда изменение данных задачи в достаточно малых пределах приводит к произвольно малому изменению решения. Это требование „устойчивости“ имеет существенное значение не только

---

[1]) При этом предполагается, что для всякой конкретной задачи должно быть указано, в каком смысле нужно понимать эту непрерывность. Для этого должны быть введены нормы в пространстве функций, составляющих данные задачи, и в пространстве решений. Условие (3) сведется к требованию, чтобы малым по норме изменениям функций, составляющих данные задачи, соответствовали малые по норме изменения решения. Чаще всего в линейных задачах требование (3) выражается так, что функциям, составляющим данные задачи, которые малы по модулю вместе с производными до некоторого порядка r, соответствует малое по модулю решение. — *Прим. ред.*

[2]) Бывают случаи, когда требование единственности не является естественным. Например, для кратных собственных значений существуют целые семейства решений задачи о собственных значениях.

для того, чтобы задача математической физики имела смысл, но и для приближенных методов.

Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей.*

Другое важное обстоятельство подсказывается примером задачи Коши и задачи излучения. Во многих случаях ясно, что решения не зависят от всей совокупности данных задачи; возникают вопросы об *области влияния данных задачи* или *об области зависимости решения.*

В подтверждение этих общих высказываний будет дано несколько примеров, которые помогут разобраться особенно в нашем третьем требовании.

Сначала мы рассмотрим эллиптическое уравнение $\Delta u = 0$ в области G с границей Γ. Существование решения уже было доказано, по крайней мере, для таких частных областей, как круг, шар или прямоугольник (см. т. I, гл. V, § 15; общее доказательство будет дано позднее в гл. IV).

Во всяком случае краевая задача для любой кусочно-гладкой границы удовлетворяет нашему требованию единственности. Это сразу следует из того, что любая гармоническая в G и непрерывная в $G + \Gamma$ функция принимает свое минимальное и максимальное значение на Γ (см. гл. IV, § 1); следовательно, эта функция тождественно обращается в нуль, если ее граничные значения равны нулю. Если мы имеем два решения, соответствующие одинаковым граничным значениям, то их разность является гармонической функцией, принимающей нулевые значения на границе; следовательно, эта разность тождественно обращается в нуль. Поэтому два таких решения совпадают.

Требование, чтобы решения непрерывно зависели от граничных значений, также выполняется. Разность двух решений, граничные значения которых всюду отличаются на величину, по модулю меньшую ε, является гармонической функцией и не может быть по абсолютной величине больше ε внутри G, так как она принимает максимальное и минимальное значение на Γ. Поэтому краевая задача для уравнения Лапласа корректно поставлена в соответствии с нашим определением.

Кроме того, мы видим, что *областью зависимости* для решения в каждой точке области G является *вся граница*, т. е. значение решения u в любой замкнутой подобласти G_1 зависит от граничных значений на любой части границы Γ. Если бы некоторая часть C границы Γ не влияла на значение u в подобласти G_1, то мы в этой подобласти получили бы то же самое решение u, изменив граничные значения на C и не меняя их на остальной части границы C'. Составив разность этих двух граничных значений, мы получили бы в G решение u, тождественно равное нулю в G_1, соответ-

ствующее граничным значениям, не равным тождественно нулю и, например, неотрицательным. Очевидно, что это невозможно, так как гармоническая функция u принимает минимальное значение внутри области только в том случае, когда $u = \text{const}$ (см. гл. IV, § 1, п. 3)[1]).

В отличие от краевой задачи задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно. Мы покажем, что первое требование (существование решения) и третье требование (непрерывная зависимость от данных задачи) нарушаются.

Зададим, например, для уравнения $\Delta u = 0$ начальные условия $u(x, 0) = 0$, $u_y(x, 0) = g(x)$. Согласно одному из принципов теории потенциала (см. гл. IV), любое решение может быть с помощью отражения продолжено из верхней полуплоскости $y > 0$ в нижнюю полуплоскость и автоматически оказывается аналитическим на оси x. Таким образом, функция $g(x)$ должна быть аналитической функцией x и не может задаваться произвольно; например, она не может быть всюду дважды непрерывно дифференцируемой, но не аналитической функцией. (В случае аналитических начальных данных решение было построено в гл. I, § 7.)

Следующий пример, приведенный Адамаром, показывает, что решение такой задачи Коши с аналитическими начальными данными не зависит непрерывно от начальных данных. Рассмотрим последовательность задач Коши для уравнения $\Delta u = 0$; для n-й задачи ($n = 1, 2, \ldots$) мы задаем аналитические начальные условия

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = g_n(x) = \frac{\sin nx}{n};$$

эти функции при $n \to \infty$ равномерно стремятся к функции $g(x) = 0$.

Решение задачи Коши с данными g_n имеет вид

$$u(x\ y) = \frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2}.$$

При возрастании n это решение не стремится к решению $u = 0$, соответствующему начальным значениям с $g(x) = 0$. Другими словами, хотя мы изменяем начальные данные произвольно мало, изменение решения уже не будет малым[2]). Таким образом, задача Коши для уравнения Лапласа некорректно поставлена. Более общая теорема такого рода была дана на стр. 219.

С другой стороны, задача Коши для простейшего гиперболического уравнения, уравнения струны $u_{xx} - u_{tt} = 0$, удовлетворяет всем

[1]) Это утверждение также легко следует из аналитичности гармонических функций. — *Прим. ред.*

[2]) Легко видеть, что если $g_n = \dfrac{\sin nx}{n^{r+1}}$, то решение $u(x, y) = \dfrac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^{r+2}}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, хотя $g_n \to 0$ при $n \to \infty$ вместе с производными до порядка r. — *Прим. ред.*

трем требованиям. Начальным условиям $u(x, 0)=\varphi(x)$, $u_t(x, 0)=\psi(x)$ при $t>0$ соответствует решение

$$2u(x, t)=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau.$$

Решение этой задачи для гиперболического уравнения существует, определено однозначно и, очевидно, непрерывно зависит от заданных начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Что же касается области зависимости для решения, то $u(x, t)$ зависит только от значений $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ там, где $x-t\leqslant\xi\leqslant x+t$.

Однако для этого гиперболического уравнения краевая задача была бы лишена смысла. Если, например, мы заменим волновое уравнение эквивалентным уравнением $u_{xy}=0$ для функции $u(x, y)$, то мы уже не сможем произвольно задавать граничные значения, например в случае прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Так как производная u_y должна принимать одинаковые значения в противоположных точках сторон $x=\text{const}$ и так как аналогичное утверждение справедливо для u_x, то функцию u можно задавать произвольно только на двух примыкающих друг к другу сторонах, и следовательно, вообще говоря, краевая задача не имеет решения[1]).

Соображения, аналогичные использованным для гиперболического уравнения, можно применить и в параболическом случае, например к уравнению теплопроводности.

Высказанные здесь общие положения по вопросу о том, когда задачи для дифференциальных уравнений поставлены корректно, будут уточнены и расширены в последующих частях этой книги.

3. Замечания о „некорректно поставленных“ задачах. Требования, сформулированные в п. 2, относительно существования, единственности и устойчивости решений преобладают в классической математической физике. Они глубоко и неотъемлемо связаны с представлением об идеальном физическом явлении, которое полностью, единственным и устойчивым образом определяется подходящими условиями на границе, на бесконечности, при $t=0$ или в прошлом. Крайним выражением этой позиции является утверждение Лапласа о возможности определить все будущее физического мира, если имеются полные данные о состоянии в настоящий момент. Однако этот разумный идеал причинно-математической определенности постепенно разрушался при сопоставлении с физической реальностью. Нелинейные явления, квантовая теория и возникновение мощных численных методов показали, что „корректно поставленные“ задачи — это

---

[1]) О краевой задаче для уравнения струны см. Арнольд В. И., *ИАН СССР*, матем., **25** (1961), 21—86; там же имеется библиография. — *Прим. ред.*

далеко не единственные задачи, правильно отражающие физические явления. Однако, к сожалению, до сих пор мало сделано с математической точки зрения в таком важном вопросе, как решение или даже выделение и формулировка тех задач, которые „некорректно поставлены“, но все же имеют важное значение и описывают реальные явления. В этой книге в основном (но не исключительно) рассматриваются классические корректно поставленные задачи.

Тем не менее мы можем привести несколько примеров таких задач, имеющих смысл, но некорректно поставленных. Прежде всего мы напомним, что задача Коши для уравнения Лапласа, согласно предыдущему пункту, некорректно поставлена. Однако она имеет физический смысл. Например, Тэйлор показал, что один важный вопрос об устойчивости сводится к такой некорректно поставленнной задаче. Рассмотрим систему двух несжимаемых жидкостей, отделенных друг от друга поверхностью раздела, которая двигается по направлению к более легкой жидкости. Это явление можно описать с помощью потенциала скоростей. Оказывается, что этот потенциал является решением некорректно поставленной задачи Коши для уравнения Лапласа.

Переопределенные задачи составляют другой класс имеющих смысл „некорректных“ задач. Например, мы можем искать функцию, гармоническую внутри единичного круга, принимающую заданные значения на концентрической окружности радиуса $^1/_2$.

Некорректно поставленные задачи, которые могут иметь большое значение в приближенных вычислениях, до сих пор еще не попали в основной поток активных математических исследований. Так, задачи Коши, в которых начальные данные известны из наблюдений только приближенно, решаются приближенными методами, например методом конечных разностей. Возникает вопрос: как можно использовать дальнейшие наблюдения для уточнения и продолжения вычисленного решения? Продвижение в этих задачах было бы чрезвычайно ценным, например, для математического предсказания погоды [1]).

4. Общие замечания о линейных задачах. Аналогия между задачами для линейных дифференциальных уравнений и системами конечного числа алгебраических уравнений была уже указана раньше

---

[1]) Относительно некорректно поставленных задач см. Джон [2] и Пуччи [2]; см. также гл. VI, § 17. [Кроме того, см. Лаврентьев М. М., О задаче Коши для уравнения Лапласа, *ИАН СССР*, сер. матем., **20** (1956), 819—842; Ландис Е. М., Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений, *УМН*, **14**, 1 (1959), 21—85. Тихонов А. Н., О регуляризации некорректно поставленных задач, *ДАН СССР*, **153**, 1 (1963), 49—52; О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации, *ДАН СССР*, **151**, 3 (1963), 501—504. — *Прим. ред.*]

(т. I, гл. V, § 1). Например, дифференциальные уравнения можно заменить разностными. Дальше, в т. III, эта идея будет развита подробно[1]) (конечно, при этом необходим предельный переход). Напомним следующую *альтернативу* для системы N линейных уравнений с N неизвестными. *Либо соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, либо общая неоднородная задача имеет единственное решение при произвольных данных задачи.* Неоднозначность решения общей неоднородной задачи влечет за собой существование нетривиального решения однородной задачи. Кроме того, эту альтернативу можно сформулировать также следующим образом: для N линейных уравнений с N неизвестными существование и единственность решения общей неоднородной задачи эквивалентны.

Можно ожидать, что корректно поставленные линейные задачи математической физики будут вести себя так же, как системы N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными. Таким образом, мы приходим к следующему эвристическому принципу: если имеется корректно поставленная задача для линейного дифференциального уравнения и соответствующая однородная задача имеет только „тривиальное" нулевое решение, то существует единственное решение общей неоднородной задачи. Если же однородная задача имеет нетривиальное решение, то для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнение некоторых дополнительных условий[2]).

В первом томе мы убедились, что этот принцип подтверждается; мы дадим его более глубокое обоснование в последующих главах.

ПРИЛОЖЕНИЕ I К ГЛАВЕ III

§ 1. Лемма Соболева

Раньше мы несколько раз пользовались тем важным фактом, что ограниченность положительно определенных квадратичных интегралов, содержащих производные некоторой функции, иногда влечет за собой ограниченность этой функции. Общим утверждением такого типа является *лемма Соболева*[3]). Эта лемма дает оценку функ-

---

[1]) См., например, Курант, Фридрихс, Г. Леви [1].

[2]) Существует широкий класс задач, которые не обладают этими свойствами, так называемые задачи с ненулевым индексом. См., например, И. Н. Векуа [1], [2], а также Вольперт А. И., Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, *Тр. Моск. матем. общества*, 10 (1961), стр. 41—87. — *Прим. рсд.*

[3]) В нашей литературе утверждения такого типа называются теоремами вложения С. Л. Соболева. См. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. — *Прим. ред.*

ции через „нормы в L_2" ее производных (т. е. через интегралы от квадратов производных).

(1) *Если функция* $u(x)$ *определена в ограниченной* n*-мерной области* G, *то для любого* y *из* G *имеем*

$$|u(y)|^2 \leqslant C \sum_{j \leqslant \nu} R^{2j-n} \int_G |D^j u(x)|^2\, dx, \qquad \text{если} \quad \nu > \frac{n}{2}, \tag{1}$$

где R — *расстояние от* y *до границы области* G, C — *постоянная, зависящая только от* ν *и* n. Здесь $D^j u$ обозначает производную j-го порядка, а суммирование распространяется на все производные указанного порядка.

Ниже в утверждении (1′) мы сформулируем аналогичный результат для точек y, принадлежащих замыканию области G, при некоторых предположениях относительно гладкости границы G.

Доказательство леммы (1). Пусть $h(t)$ — функция класса[1] C^∞, зависящая от одной переменной $t \geqslant 0$, тождественно равная 1 для $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ и равная нулю при $t \geqslant 1$. Будем считать, что y — начало координат, положим $|x| = r$ и определим[2] функцию

$$\zeta(r) = h\left(\frac{r}{R}\right).$$

Заметим, что

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k \zeta\right| \leqslant R^{-k} C_k, \quad k \geqslant 0, \tag{2}$$

где C_k — постоянная, зависящая только от функции $h(t)$. Так как $h(0) = 1$ и $h(1) = 0$, мы имеем

$$u(0) = -\int_0^R \frac{\partial}{\partial r}(\zeta u)\, dr.$$

Обозначив через $d\omega$ элемент единичной сферы с центром в точке $y = 0$, а через ω — поверхность $(n-1)$-мерной единичной сферы, мы получим с помощью интегрирования по ω соотношение

$$\omega u(0) = -\int\int \frac{\partial}{\partial r}(\zeta u)\, dr\, d\omega.$$

Интегрируя $(\nu - 1)$ раз по частям по переменной r, получаем

$$\omega u(0) = \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!} \int\int r^{\nu-1} \frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu}(\zeta u)\, dr\, d\omega.$$

Полагая $r^{\nu-1} = r^{\nu-n} r^{n-1}$, получаем, согласно неравенству Шварца,

$$|u(0)| \leqslant \text{const} \cdot \sqrt{\int\int \left|\frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu}(\zeta u)\right|^2 dV} \sqrt{\int\int r^{2(\nu-n)}\, dV},$$

[1]) Класс C^N содержит функции, обладающие производными до порядка N, класс C^∞ — функции, имеющие производные всех порядков.

[2]) Мы можем положить $h(t) = e^{1/4} e^{-(t-1)^{-2}} \left(1 - e^{-(t-1/2)^{-2}}\right)$ для $1/2 \leqslant t \leqslant 1$.

где $dV = r^{n-1}dr\,d\omega$ — элемент объема; константа зависит только от ν. Так как $2\nu > n$, последний интеграл сходится и мы имеем

$$|u(0)|^2 \leqslant \text{const} \cdot R^{2\nu-n} \int\int \left| \frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu} (\zeta u) \right|^2 dV.$$

Вместе с оценкой (2) неравенство

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} u \right|^2 \leqslant C'_j \sum |D^j u|^2,$$

где C'_j зависит только от j и от n, дает формулу (1).

Определение. Говорят, что область G удовлетворяет „условию конуса", если каждая точка y из $\overline{G}$ (замыкания G) является вершиной некоторого ограниченного конуса C_y (т. е. пересечения конуса со сферой радиуса R, описанной вокруг его вершины), лежащего в $\overline{G}$, причем объем этого конуса превышает некоторую константу V.

(1′) *Если область G удовлетворяет „условию конуса", то*

$$|u(y)|^2 \leqslant \text{const} \cdot \sum_{j \leqslant \nu} \int_G |D^j u(x)|^2 dx \qquad \left(\nu > \frac{n}{2}\right), \tag{1′}$$

где константа зависит только от ν, n и значений R и V.

Доказательство более тонкой леммы (1′) совпадает с доказательством леммы (1), за исключением того, что интегрирование по $d\omega$ распространяется только на внутренний телесный угол конуса C_y, исходящего из точки y.

Такие интегральные неравенства, как (1), играют важную роль при построении решений вариационными методами[1]).

§ 2. *Сопряженные операторы*

1. Матричные операторы. В теории линейных операторов большое значение имеет понятие оператора L^*, сопряженного к оператору L.

Для конечномерных пространств это понятие возникает в формальной линейной алгебре. Рассмотрим линейный оператор

$$w^i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} u^j \qquad (i = 1, \ldots, k), \tag{1}$$
$$w = L[u]$$

или, в матричных обозначениях,

$$w = Au;$$

[1]) См. т. III, а также Ниренберг [2], лекция II. [См. также книгу С. Л. Соболева, указанную в примечании на стр. 234. — *Прим. ред.*]

этот оператор переводит вектор u с l компонентами $u^1, \ldots, u^l$ в k-мерный вектор [1]) w с компонентами $w^1, \ldots, w^k$; если $l \neq k$, то матрица этого преобразования не является квадратной.

Вместе с оператором L мы рассмотрим билинейную форму (или скалярное произведение)

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{k} v^i w^i = (v, Au) = (v, L[u]) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_{ij} u^j v^i, \qquad (2)$$

образованную с помощью k-мерного вектора v. Тогда сопряженный оператор L^* переводит k-мерный вектор v в l-мерный вектор z и определяет преобразование, соответствующее транспонированной матрице A^*:

$$z_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} v^i \qquad (j = 1, \ldots, l), \qquad (1')$$

или

$$z = A^* v, \quad \text{или} \quad z = L^*[v].$$

Сопряженный оператор связан с билинейной формой (2):

$$(v, w) = (v, L[u]) = (L^*[v], u). \qquad (3)$$

Независимо от того, равны ли k и l, соотношение между операторами L и L^* выражается равенством

$$vL[u] - uL^*[v] = 0, \qquad (4)$$

или равенством

$$(v, Au) - (u, A^* v) = 0.$$

Из формулы (4) мы сразу находим, что $(A^*)^* = A$; далее, для произведения двух матриц AB имеем

$$(AB)^* = B^* A^*;$$

это можно увидеть, если заменить в (4) A на AB и написать $(v, ABu) = (A^*v, Bu) = (B^*A^*v, u)$. Если матрица A симметричная, то соответствующий оператор называется *самосопряженным*; это означает, что он совпадает со своим сопряженным оператором.

Попутно мы напомним основную теорему линейной алгебры. Если $k < l$, то система l линейных уравнений $L^*[v] = z$ для компонент вектора v при заданных значениях компонент z является переопределенной. Она разрешима тогда и только тогда, когда выполняется несколько, скажем r, линейных однородных условий совместности вида $Rz = 0$. Сопряженная матрица $S = R^*$ дает преобразование $u = Sh$ вектора h с r компонентами в вектор u с k компонентами;

---

[1]) Векторы можно рассматривать как векторы-строки или векторы-столбцы; на это указывают соответствующие матричные обозначения.

оно выражает все решения недоопределенной системы уравнений $L[u]=0$ через r независимых произвольных величин $h_1, \ldots, h_r$.

2. Сопряженные дифференциальные операторы. Мы теперь будем рассматривать дифференциальные операторы L произвольного порядка. Снова число k компонент вектора v и число l компонент вектора u не обязательно должны быть одинаковыми. Как и в п. 1, мы можем составить скалярное произведение $L[u]$ и произвольного k-мерного вектора v и проинтегрировать его по области G с кусочно-гладкой границей Γ. Затем мы интегрируем выражение $vL[u]$ по частям, чтобы перенести производные с функции u. Тогда мы получаем соотношение вида

$$vL[u]-uL^*[v]=\sum_{i=1}^{n} P^i_{x_i}=\operatorname{div} P \tag{5}$$

или, после интегрирования,

$$\int\int_G (vL[u]-uL^*[v])\,dx=\int P\xi\,dS, \tag{6}$$

где P — вектор с компонентами P^i, dS — элемент границы Γ, а ξ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Компоненты P^i билинейно зависят от функций u, v и их производных и имеют коэффициенты, которые могут зависеть от x. Оператор L^* однозначно определяется равенством (5), в то время как вектор P определяется лишь с точностью до произвольного аддитивного вектора R, дивергенция которого тождественно равна нулю.

Однозначно определенный таким образом оператор L^* называется сопряженным к L. Он преобразует k-мерный вектор в l-мерный.

Очевидно, что интеграл от $(v, L[u])$ соответствует билинейной форме, рассмотренной в п. 1. Если функция v и ее производные, или u и ее производные, обращаются в нуль на границе, то интеграл по границе в формуле (6) равен нулю и наше определение без изменений соответствует определению из п. 1.

Приведем несколько примеров. Оператор L нулевого порядка

$$L[u]=au,$$

очевидно, является самосопряженным, т. е. $L^*=L$. Затем мы рассмотрим оператор первого порядка

$$L[u]=D_ju,$$

где $D_j=\partial/\partial x_j$; ясно, что

$$L^*[u]=-D_ju.$$

Сопряженным оператором к оператору первого порядка

$$L[u]=\sum A^\nu u_\nu+Bu,$$

как в § 2, является оператор

$$L^*[v] = -(vA^\nu)_{x_\nu} + Bv,$$

а вектор P имеет компоненты

$$P_\nu = (vA^\nu u).$$

Для скалярного оператора второго порядка

$$L[u] = \sum a^{ij} u_{ij} + \sum a^i u_i + bu$$

сопряженный оператор имеет вид

$$L^*[v] = \sum \left[\frac{\partial^2 (va^{ij})}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}(va^i) + vb \right],$$

а компоненты P задаются формулами

$$P^i(v, u) = \sum_j \left[va^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial (va^{ij})}{\partial x_j} u + va^i u \right].$$

Коэффициенты a^{ij} могут быть матричными, т. е. оператор может быть системой отдельных операторов. Для самосопряженного оператора матрицы a^{ij} должны быть симметричными и должны выполняться соотношения

$$\sum_j \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial a^{ji}}{\partial x_j} \right) = 2a^i, \quad \sum_i \frac{\partial a^i}{\partial x_i} = 0.$$

Если L — оператор порядка m, записанный в виде[1])

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} a_p D^p u,$$

то

$$L^* = \sum (-1)^{|p|} D^p a_p u.$$

Иногда, чтобы образовать сопряженные операторы и векторы P, можно пользоваться следующим соотношением для произведения двух операторов:

$$(LM)^* = M^* L^*,$$

которое легко установить.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 К ГЛАВЕ III

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛЬМГРЕНА

Решение задачи Коши в малом существует и единственно для любого аналитического дифференциального уравнения, если начальные данные аналитические, начальная поверхность аналитическая

---

[1]) Относительно обозначений см. гл. VI, § 3, п. 1.

и нехарактеристическая и если само решение предполагается аналитическим (см. гл. I, § 7). Для неаналитических начальных данных или уравнений нельзя, вообще говоря, ожидать, что решение существует, не вводя дальнейших ограничений, таких, как гиперболический тип уравнения и пространственный характер начального многообразия и данных задачи. Замечательно, однако, что *единственность* решения все же можно доказать даже в тех случаях, когда теоремы существования для *произвольных* начальных данных уже неверны. Важнейшая теорема такого рода была доказана Гольмгреном [1]. Она касается линейных аналитических[1]) дифференциальных уравнений с произвольным числом независимых переменных и относится как к отдельным уравнениям, так и к системам.

Если $L[u]$ — линейный дифференциальный оператор с аналитическими коэффициентами и если начальные данные Коши обращаются в нуль на гладкой нехарактеристической поверхности S_0, то любое решение u уравнения $L[u]=0$ с этими начальными данными тождественно обращается в нуль в достаточно малой окрестности любой замкнутой подобласти S_0.

Заметим, что в этой теореме предполагается, но не утверждается, что решение u существует. Ясно, что эта теорема утверждает единственность решения для произвольных, не обязательно аналитических начальных данных на S_0, так как разность двух решений с такими данными соответствует нулевым начальным данным, и, следовательно, согласно сформулированной выше теореме, тождественно обращается в нуль.

Доказательство по существу очень простое. Рассмотрим линзообразную область G, ограниченную достаточно малой частью S_0 и близкой аналитической поверхностью S. В окрестности S мы решим задачу Коши в обратном направлении для неоднородного дифференциального уравнения

$$L^*v = p(x)$$

с нулевыми начальными данными, где L^* — оператор, сопряженный к L, а p — произвольный полином от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Функ-

---

[1]) Рассуждения Коши и Ковалевской показывают только, что не может существовать более одного *аналитического* решения задачи Коши; при этом остается открытым вопрос о том, существуют ли другие неаналитические решения. Теорема Гольмгрена отвергает эту возможность. Теорема единственности решения задачи Коши для *неаналитических* дифференциальных уравнений остается пока нерешенной проблемой. Она была доказана в общем случае для двух независимых переменных Карлеманом [2]. Для большего числа переменных она была доказана для многих гиперболических уравнений и начальных многообразий пространственного типа методами, аналогичными описанным в этой главе. Сравните с теоремами единственности для многих переменных Мюллера [1], Кальдерона [1] и Хёрмандера [5]. [См. книгу Хёрмандера, указанную в сноске на стр. 159. — *Прим. ред.*]

цию v можно построить, на основании изложенного в гл. I, § 7, в некоторой окрестности S_0. Предположим, что поверхность S выбрана так близко к S_0, что функция v существует в одной и той же области G для всех полиномов $p(x)$. Тогда формула Грина, полученная интегрированием равенства $uL^*[v]-vL[u]=up(x)$ по области G, дает

$$\int_G \cdots \int up(x)\,dx = 0,$$

так как данные Коши для v на S и для u на S_0 обращаются в нуль. Поскольку множество полиномов $p(x)$ плотно в C, отсюда сразу следует, что u тождественно равно нулю в G.

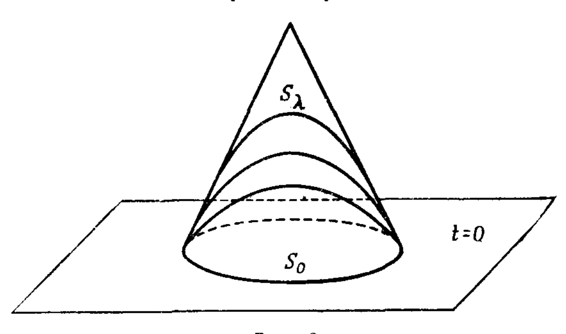


Рис. 8.

Остается только доказать возможность выбора поверхности S с указанными свойствами. Это легко сделать, пользуясь примечанием к гл. I, § 7, п. 4; подробности этого рассуждения мы здесь не приводим.

В качестве дополнительного замечания укажем[1]), что теорема Гольмгрена может быть обобщена и из утверждения в малом может быть сделана утверждением в целом для линзообразного тела G, заполненного некоторым семейством аналитических поверхностей S_λ, соответствующим положительным значениям параметра λ, причем для $\lambda > 0$ характеристический определитель на S_λ должен быть строго отграничен от нуля равномерно по λ. Например, рассмотрим волновое уравнение $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-u_{tt}=0$ и возьмем в качестве гиперповерхности S_0 „сферический диск“ $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, $t=0$. Интуитивно ясно и легко проверить, что S_0 можно включить в семейство поверхностей S_λ с той же самой границей, причем это семейство будет заполнять весь характеристический конус с основанием S_0. Этот конус действительно является точной областью, в которой функция u однозначно определяется данными Коши на S_0 (см. рис. 8).

[1]) См. Джон [3].

Глава IV

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ[1])

Исчерпывающее изложение теории эллиптических дифференциальных уравнений выходит за пределы этой книги. Мы будем в основном (но не исключительно) заниматься линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, обращая особое внимание на теорию потенциала, которая типична для теории более общих эллиптических дифференциальных уравнений и которая сама по себе является важной частью анализа.

В томе I и в предыдущих главах рассматривались многочисленные вопросы теории потенциала. В первой части этой главы будет дано ее более систематическое изложение. Вторая, менее элементарная часть должна подвести читателя к более далеко идущим теориям, связанным с более общими типами эллиптических задач.

Дополнение, написанное Л. Берсом, вкратце излагает теорию псевдоаналитических функций, которая является важным недавно разработанным аппаратом, применимым к дифференциальным уравнениям второго порядка с двумя независимыми переменными.

§ 1. Основные понятия

1. Уравнения Лапласа и Пуассона и связанные с ними уравнения. Мы рассматриваем функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(x)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, или вектора x, в области G с границей Γ в пространстве x. Дифференциальное уравнение

$$\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0 \qquad (1)$$

называется *уравнением Лапласа*. Его решения называются *гармоническими функциями*. Соответствующее неоднородное уравнение

---

[1]) Мы отсылаем читателя к следующим книгам: Келлог [1], Петровский [1], Миранда [1], Лихтенштейн [1], Джон [4] и Берс [2]. Относительно более поздних исследований можно смотреть библиографию симпозиумов и коллоквиумов [1, 2, 3], а также Мадженес и Стампаккья [1], Ниренберг [2], Вишик и Ладыженская [1] и Гординг [1].

называется *уравнением Пуассона*. Мы введем величину ω_n — площадь поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве:

$$\omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}, \tag{2}$$

где $\Gamma(n/2)$ обозначает Γ-функцию, и запишем уравнение Пуассона в виде

$$\Delta u = -\omega_n \mu(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — заданная функция точки x.

Решения уравнения Лапласа, обладающие в G непрерывными вторыми производными, называются *регулярными* в G. (Далее мы увидим, что следствием регулярности решений u является их аналитичность.) Здесь, как и в дальнейшем, G обозначает *открытую связную* и, если не оговорено противное, *ограниченную* область пространства. Через $G+\Gamma$ мы обозначаем *замкнутую* область, которая получается из G добавлением границы Γ. Аналогично, если функция μ непрерывна в G, то решения уравнения Пуассона с непрерывными вторыми производными называются регулярными. Мы сначала рассмотрим случаи $n=2$ и $n=3$, причем координаты x_1, x_2 и x_1, x_2, x_3 будем обозначать x, y и x, y, z соответственно.

Для $n=2$ „общее решение" уравнения Лапласа является действительной частью произвольной аналитической функции комплексного переменного $x+iy$. Для $n=3$ также легко можно получить решения, зависящие от произвольных функций. Например, пусть функция $f(w, t)$ аналитична по комплексному переменному w при фиксированных действительных t. Тогда при произвольном значении t и действительная, и мнимая части функции

$$u = f(z + ix\cos t + iy\sin t, t)$$

действительных переменных x, y, z являются решениями уравнения $\Delta u = 0$. Другие решения можно теперь получить с помощью суперпозиции

$$u = \int_a^b f(z + ix\cos t + iy\sin t, t)\, dt. \tag{4}$$

Например, если мы положим

$$f(w, t) = w^n e^{iht},$$

где n и h — целые числа, и проинтегрируем от $-\pi$ до $+\pi$, то получим однородные полиномы

$$u = \int_{-\pi}^{\pi} (z + ix\cos t + iy\sin t)^n e^{iht}\, dt,$$

зависящие от x, y, z. Вводя сферические координаты $z=r\cos\theta$, $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, получаем

$$u=2r^n e^{ih\varphi}\int\limits_0^\pi (\cos\theta+i\sin\theta\cos t)^n\cos ht\,dt,$$

т. е., с точностью до постоянного множителя, функции

$$u=r^n e^{ih\varphi}P_{n,\,h}(\cos\theta),$$

где $P_{n,\,h}(x)$ — сопряженные функции Лежандра (см. т. I, стр. 426).

При переходе к полярным координатам r, φ для $n=2$ или сферическим координатам r, θ, φ для $n=3$, т. е. при замене

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\varphi,\\ y&=r\sin\varphi \end{aligned}\right\}\quad \text{на плоскости}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\varphi,\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z&=r\cos\theta \end{aligned}\right\}\quad \text{в пространстве,}$$

оператор Лапласа принимает вид

$$\Delta u=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right]\qquad(n=2), \tag{5}$$

$$\Delta u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)\right]\qquad(n=3)$$

(см. т. I, стр. 200). Из этих формул можно вывести следующую часто применяемую теорему.

Если $u(x, y)$ — регулярная гармоническая функция в плоской области G, то функция

$$v(x,\ y)=u\left(\frac{x}{r^2},\ \frac{y}{r^2}\right)\qquad(r^2=x^2+y^2) \tag{6}$$

также удовлетворяет уравнению Лапласа и регулярна в области G', полученной из G с помощью инверсии относительно единичного круга.

Соответствующая теорема справедлива и в пространстве, но там мы должны положить

$$v=\frac{1}{r}\,u\left(\frac{x}{r^2},\ \frac{y}{r^2},\ \frac{z}{r^2}\right)\quad(r^2=x^2+y^2+z^2). \tag{7}$$

Для того чтобы доказать теорему, мы вводим полярные координаты и показываем, что если функции $u(r, \varphi)$ и $u(r, \theta, \varphi)$ гармонические, то функции $v(r, \varphi)=u(1/r, \varphi)$ и $v(r, \theta, \varphi)=u(1/r, \theta, \varphi)/r$

также гармонические. Это сразу следует из формул (5), если заметить, что

$$r^4 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u_\rho) \qquad \text{для } n=2,$$

$$r^5 \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r \sin\theta) = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 u_\rho \sin\theta) \qquad \text{для } n=3,$$

где $\rho = 1/r$.

Читатель может проверить, что в n-мерном пространстве справедлива аналогичная теорема для функции

$$v = \frac{1}{r^{n-2}} u\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right). \tag{8}$$

Таким образом, *с точностью до множителя r^{2-n} гармоничность функции сохраняется при инверсии относительно сфер. Кроме того, гармоничность полностью сохраняется при преобразованиях подобия, переносах и простых отражениях относительно плоскостей.*

Пусть функция u регулярна и гармонична в ограниченной области G. При инверсии относительно единичной сферы с центром в некоторой точке G, например в начале координат, внутренность области G переходит во внешность G' образа Γ' границы. Гармоническая функция

$$v = \frac{1}{r^{n-2}} u\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right)$$

называется тогда регулярной в этой внешней области G'. Итак, мы определяем *регулярность в области G, простирающейся до бесконечности*, следующим образом: при помощи инверсии относительно единичной сферы с центром в некоторой точке вне G мы переводим G в ограниченную область G'. *Гармоническая функция u называется регулярной в G, если указанная выше функция v регулярна в G'.* В частности, функция u называется *регулярной в бесконечности*, если G содержит некоторую окрестность бесконечно удаленной точки, а значение u в бесконечности задается так, что функция v регулярна в G'. Согласно этому определению, например, функция $u = \text{const}$ регулярна в бесконечности на плоскости, но не регулярна в пространстве трех или большего числа измерений. В трехмерном пространстве функции

$$u = 1 - a + \frac{a}{r}$$

при произвольном a гармоничны вне единичной сферы и принимают значение 1 на этой сфере. Но $u = 1/r$ — единственная функция этого семейства, регулярная во внешности единичной сферы.

В пространствах любого числа измерений единственными решениями уравнения Лапласа (1), зависящими только от расстояния r между x и фиксированной точкой ξ, например, началом координат, являются (с точностью до произвольных мультипликативной и аддитивной констант) функции

$$\begin{aligned}\gamma(r) &= \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} r^{2-n} \qquad (n > 2),\\ \gamma(r) &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \qquad (n = 2),\end{aligned} \tag{9}$$

которые при $r = 0$ имеют так называемую *характеристическую особенность*.

Любое решение уравнения Лапласа, имеющее в области G вид

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \psi(x, \xi) = \gamma(r) + w \qquad \left(r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2\right),$$

где точка ξ находится внутри G, а функция w регулярна, называется *фундаментальным решением* с особенностью в точке ξ (см., например, гл. III, § 2).

Соответствующие фундаментальные решения легко получить также и для более общего дифференциального уравнения

$$\Delta u + cu = 0,$$

где c — некоторая постоянная. Вводя полярные координаты, мы ищем решения вида $u = \psi(r)$, где $r^2 = \sum\limits_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2$. Для функции ψ мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\psi'' + \frac{n-1}{r} \psi' + c\psi = 0. \tag{10}$$

Если положить $\psi(r) = r^{-1/2\,(n-2)} \varphi(\sqrt{c}\, r)$, то это уравнение перейдет в уравнение Бесселя

$$\varphi'' + \frac{1}{\rho} \varphi' + \varphi - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{\varphi}{\rho^2} = 0 \quad (\rho = \sqrt{c}\, r). \tag{11}$$

Искомое фундаментальное решение ψ является тогда просто решением уравнения (11), не ограниченным в начале координат. Таким образом, для нечетных n мы имеем

$$\psi = r^{-1/2\,(n-2)} J_{-1/2\,(n-2)}(\sqrt{c}\, r), \tag{12}$$

а для четных n

$$\psi = r^{-1/2\,(n-2)} N_{1/2\,(n-2)}(\sqrt{c}\, r), \tag{13}$$

где N_ν есть ν-я функция Неймана (см. гл. III, § 2).

2. Потенциалы распределения масс. Для $n=3$ фундаментальное решение уравнения Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

и физически соответствует гравитационному потенциалу, который создается в точке $P(x, y, z)$ единичной массой, сосредоточенной в точке (ξ, η, ζ) [1]).

Пусть $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность распределения масс в пространстве ξ, η, ζ. Интеграл

$$u(x, y, z)=\iiint\limits_G \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$(r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2), \qquad (14)$$

распространенный на соответствующую область G пространства, называется *потенциалом пространственного распределения масс с плотностью* μ в области G. Если точка P с координатами x, y, z лежит вне области G, то с помощью дифференцирования под знаком интеграла мы сразу получаем, что u — гармоническая функция. Если точка P лежит в области G и если функция μ кусочно-непрерывно дифференцируема [2]), то, как мы видели раньше (см. т. I, гл. V), потенциал u удовлетворяет *уравнению Пуассона*

$$\Delta u=-4\pi\mu. \qquad (15)$$

В общем случае n измерений интеграл, образованный с помощью фундаментального решения $\gamma(r)$:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n)=u(x)=$$
$$=\int\limits_G \cdots \int \mu(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,\gamma(r)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n, \qquad (14a)$$

---

[1]) Здесь и далее слово потенциал употребляется в физическом смысле. Оно обозначает величину, градиент которой дает поле сил. Понятие потенциала обычно связывают с уравнением Лапласа.

[2]) Необходимо напомнить следующее определение: поверхность называется *кусочно-гладкой*, если она составлена из конечного числа частей, каждая из которых конгруэнтна поверхности, заданной функцией

$$x_n=z=f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

где функция f непрерывна и имеет непрерывные первые производные в соответствующей области, включая границу. Если, кроме того, каждая функция f имеет непрерывные производные второго порядка, то говорят, что поверхность имеет *кусочно-непрерывную кривизну*. Очевидно, что аналогичные определения можно применять и к кривым.

Функция называется *кусочно-непрерывной* в G, если она непрерывна в G, за исключением разрывов первого рода в изолированных точках или на кусочно-гладких кривых или поверхностях, и если имеется только конечное число таких разрывов в любой замкнутой подобласти G. Если первые производные непрерывной функции кусочно-непрерывны в G, то эта функция называется *кусочно-непрерывно дифференцируемой* в G.

где область интегрирования G пространства ξ содержит точку x, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = -\mu(x), \tag{15a}$$

если функция μ имеет непрерывные производные. Этот интеграл также называется потенциалом распределения масс в области G с плотностью μ. Сейчас мы дадим доказательство при несколько более слабых предположениях относительно μ и рассмотрим решение u с другой точки зрения.

Однако сначала мы докажем следующую теорему.

Пусть $\mu(x, y, z)$ — *ограниченная* (по абсолютной величине) *и интегрируемая функция в области* G. *Тогда потенциал* (14) *и его первые производные всюду равномерно непрерывны; эти производные можно вычислить с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Если, кроме того, функция* μ *кусочно-непрерывно дифференцируема в* G, *то вторые производные и также непрерывны внутри* G *и удовлетворяется уравнение Пуассона* $\Delta u = -4\pi\mu$.

Для того чтобы доказать первую часть этой теоремы, рассмотрим функцию

$$u_\delta(x, y, z) = \iiint_G \mu(\xi, \eta, \zeta) f_\delta(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{16}$$

где $f_\delta(r)$ — вспомогательная функция, которая отличается от фундаментального решения $1/r$ только в малом шаре $r \leqslant \delta$ радиуса δ; внутри этого шара $f_\delta(r)$, в отличие от $1/r$, ограничена. На поверхности шара она переходит в $1/r$ непрерывно и с непрерывной производной. Например, можно положить

$$f_\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta}\left(3 - \frac{r^2}{\delta^2}\right), & r \leqslant \delta, \\ \frac{1}{r}, & r > \delta. \end{cases} \tag{17}$$

Из неравенства

$$|u_\delta - u| \leqslant 4\pi M \int_0^\delta \left(f_\delta + \frac{1}{r}\right) r^2\, dr = \frac{18\pi}{5} M\delta^2, \tag{18}$$

где M обозначает максимум $|\mu|$, сразу следует, что последовательность u_δ при $\delta \to 0$ равномерно сходится к потенциалу u для всех x, y, z и что функция u равномерно непрерывна.

Из дифференцируемости функций $f_\delta(r) = g(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$ сразу следует дифференцируемость функций u_δ. Действительно, мы имеем

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} = \iiint_G \mu \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Пусть теперь функция $\chi(x, y, z)$ определяется как сходящийся интеграл

$$\chi = \iiint_G \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \tag{19}$$

который получается из (14) формальным дифференцированием под знаком интеграла. Тогда

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi = \iiint_{r<\delta} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(f_\delta - \frac{1}{r} \right) d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi \right| \leqslant 4\pi M \int_0^\delta \left(\left| \frac{\partial f_\delta}{\partial r} \right| + \frac{1}{r^2} \right) r^2 \, dr = 5\pi M \delta; \tag{20}$$

это значит, что последовательность $\partial u_\delta / \partial x$ равномерно по x, y, z сходится к функции $\chi(x, y, z)$. Из известных теорем анализа следует, что функция χ равномерно непрерывна и что $\chi = u_x$. Точно так же получаются аналогичные результаты для производных u_y и u_z.

Не делая дополнительных предположений относительно функции μ, нельзя доказать, что u имеет непрерывные вторые производные. Однако, если μ имеет непрерывные первые производные, то в интеграле

$$u_x = \iiint_G \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = - \iiint_G \mu \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

можно произвести интегрирование по частям; тогда этот интеграл записывается как

$$- \iint_\Gamma \frac{\mu}{r} n_1 \, dS + \iiint_G \frac{\mu_\xi}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

где dS обозначает элемент площади на поверхности Γ, а n_1 — косинус угла между внешней нормалью к Γ и осью ξ. В силу приведенного выше рассуждения, мы можем продифференцировать это выражение и получить выражения для вторых производных функции u через непрерывные функции. Например, в точке $P:(x, y, z)$ мы получаем

$$u_{xx}(P) = - \iint_\Gamma \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} n_1 \, dS + \iiint_G \mu_\xi \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \tag{21}$$

Второй интеграл можно также записать в виде

$$\iiint_G (\mu - \mu(P))_\xi \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

который интегрированием по частям приводится к виду

$$\iint_{\Gamma} (\mu - \mu(P)) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} n_1 \, dS - \iiint_{G} (\mu - \mu(P)) \frac{\partial^2}{\partial \xi \, \partial x} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

(интегрирование по частям законно, так как функция $\mu - \mu(P)$ имеет в P нуль первого порядка). Если теперь мы подставим это выражение в формулу для $u_{xx}(P)$ и приведем подобные члены, то получим

$$u_{xx}(P) = -\mu(P) \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} n_1 dS - \\ - \iiint_{G} (\mu - \mu(P)) \frac{\partial^2}{\partial \xi \, \partial x} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \\ = -\mu(P) \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} n_1 \, dS + \iiint_{G} (\mu - \mu(P)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \qquad (21')$$

Из этой формулы и аналогичных ей формул мы получаем последнюю часть нашей теоремы, а именно: *для кусочно-непрерывно дифференцируемой плотности* μ *вторые производные функции* u *непрерывны и* $\Delta u = -4\pi\mu$.

Тот факт, что представление (21′) для производной u_{xx} не содержит производных функции μ, наводит на мысль о том, чтобы искать более широкий класс функций μ, для которых интегралы, входящие в это представление, сходятся и остается справедливым утверждение теоремы. С этой целью мы вводим важный класс функций, которые удовлетворяют условию Гёльдера (или непрерывны по Гёльдеру).

Непрерывность по Гёльдеру. Говорят, что функция μ непрерывна по Гёльдеру в области G, или *удовлетворяет условию Гёльдера* в области G с показателем α, $0 < \alpha < 1$, и с коэффициентом K, если для любой пары точек P, Q из G справедливо неравенство

$$|\mu(P) - \mu(Q)| \leqslant K \overline{PQ}^{\alpha}.$$

Здесь $\overline{PQ}$ обозначает расстояние от P до Q; α и K называются константами неравенства Гёльдера.

Заметим, что последний интеграл в формуле (21′) абсолютно сходится, если функция μ непрерывна по Гёльдеру в области G; при этом правая часть формулы (21′) является вполне определенной функцией $v(P)$; действительно, в этом случае подынтегральное выражение в интеграле по объему ограничено по абсолютной величине интегрируемым выражением

$$\frac{CK}{r^{3-\alpha}}, \qquad (22)$$

где α и K — константы неравенства Гёльдера, а C — некоторая постоянная.

Мы установим сейчас следующую теорему (которая является уточнением теоремы, высказанной ранее).

Если $\mu(x, y, z)$ *удовлетворяет условию Гёльдера в* G, *то потенциал* (14) *имеет равномерно непрерывные первые производные, которые можно получить с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Кроме того, и имеет непрерывные вторые производные, которые даются формулой* (21') *и аналогичными ей выражениями, и функция и удовлетворяет уравнению Пуассона* $\Delta u = -4\pi\mu$.

Чтобы доказать существование, например, производной $u_{xx}(P)$, предполагаем сначала, что функция μ может быть равномерно приближена дифференцируемыми функциями μ_n, удовлетворяющими равномерно по n условию Гёльдера с константами α и K'. Для этих функций μ_n мы определяем функции u_n по формуле (14); согласно сказанному выше, функции u_n имеют непрерывные вторые производные. Достаточно показать, что производные $(u_n)_{xx}$ равномерно сходятся к v в любой замкнутой подобласти G. Из формулы (21') мы имеем

$$|v(P)-(u_n)_{xx}(P)| \leqslant |\mu_n(P)-\mu(P)| \cdot \left| \int_\Gamma\int \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} n_1\, dS \right| +$$

$$+ \iiint_G |\mu-\mu(P)-\mu_n+\mu_n(P)| \cdot \left| \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial x}\frac{1}{r} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Если точка P принадлежит некоторой замкнутой подобласти G, то первое слагаемое может быть сделано равномерно малым за счет выбора достаточно большого n. При оценке интеграла по объему мы разделим G на две части: $G = G_1 + G_2$, где G_1 — сфера радиуса R вокруг точки P. В силу оценки (22) и равномерной непрерывности по Гёльдеру[1]) подинтегральная функция ограничена по абсолютной величине выражением $2CK'/r^{3-\alpha}$, так что интеграл по G_1 не превосходит $C_1K'R^\alpha/\alpha$, а эта величина может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно малого R (C_1 здесь абсолютная постоянная). В области G_2 подинтегральная функция ограничена величиной $[|\mu-\mu_n|+|\mu(P)-\mu_n(P)|]\,C_2/R^3$; таким образом, при фиксированном R второй интеграл можно сделать малым, если n достаточно велико, так как функции μ_n равномерно сходятся к μ.

Чтобы завершить доказательство, мы должны показать, что функцию μ можно равномерно приблизить с помощью функций μ_n, равно-

[1]) Предел равномерно сходящейся последовательности функций, непрерывных по Гёльдеру с константами α, K, удовлетворяет тому же самому условию Гёльдера.

мерно непрерывных по Гёльдеру. Мы знаем, что функцию μ можно равномерно приблизить полиномами вида

$$\mu_n = P_n(x, y, z) =$$
$$= \frac{1}{c^3}\int\int_{-1}^{1}\int \mu(\xi, \eta, \zeta)\,[1-(\xi-x)^2]^n\,[1-(\eta-y)^2]^n\,[1-(\zeta-z)^2]^n d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где

$$c = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, dt$$

(см. т. I, гл. II, § 4, п. 2, стр. 63). Кроме того, можно проверить, что если μ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом K, то функции μ_n удовлетворяют равномерно условию Гёльдера с показателем α и некоторым коэффициентом K'.

Мы показали, что решение u уравнения $\Delta u = -4\pi\mu$, заданное формулой (14), имеет непрерывные вторые производные, если функция μ непрерывна по Гёльдеру. Более того, можно показать, что вторые производные функции u непрерывны по Гёльдеру (с тем же показателем, что и функция μ) в любой замкнутой подобласти G. Мы более подробно исследуем это замечание и его важные следствия в § 7.

Совершенно аналогичным методом устанавливается, что в случае двух измерений уравнению Пуассона (15а) удовлетворяет функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\int_G \mu(\xi, \eta)\log\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta \qquad (r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2),$$

а в случае произвольного числа измерений уравнению Пуассона удовлетворяет функция (14а).

В случае $n = 3$ встречаются потенциалы распределения масс на поверхностях и так называемые потенциалы „двойного слоя", а также потенциалы распределения масс на кривых. Для $n = 2$ мы имеем потенциалы простого и двойного слоя на кривых. Соответствующие понятия для $n > 3$ не будут здесь рассматриваться.

Потенциал распределения масс на поверхности F с поверхностной плотностью ρ определяется как интеграл вида

$$u = \int\int_F \frac{\rho}{r}\, dS, \tag{23}$$

где dS — элемент площади поверхности. На кривой C с длиной дуги s потенциал распределения масс с плотностью τ определяется как

$$u = \int_C \frac{\tau}{r}\, ds \tag{24}$$

для $n=3$ или как

$$u=\int_C \tau \log \frac{1}{r}\, ds \tag{24'}$$

для $n=2$.

Потенциалы двойного слоя получаются в результате суперпозиции потенциалов диполей (см. т. I, гл. VII, § 5, п. 5, стр. 443). Потенциал отдельного диполя определяется как

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r}=-\frac{\cos(\nu, r)}{r^2} \qquad (n=3),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{1}{r}=-\frac{\cos(\nu, r)}{r} \qquad (n=2),$$

где $\partial/\partial\nu$ обозначает дифференцирование по некоторому направлению в пространстве ξ, η, ζ (или на плоскости ξ, η); (ν, r) — угол между этим направлением и радиусом-вектором, проведенным из точки $P(x, y, z)$ в точку $Q(\xi, \eta, \zeta)$ (или соответствующий угол для $n=2$).

Потенциал двойного слоя с плотностью σ на поверхности F (в случае $n=3$) или на кривой C (в случае $n=2$) задается выражениями вида

$$u(x, y, z)=\iint_F \sigma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r}\, dS \tag{25}$$

или

$$u(x, y)=\int_C \sigma \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{1}{r}\, ds \tag{25'}$$

соответственно, причем $\partial/\partial\nu$ обозначает дифференцирование по направлению положительной нормали к поверхности или кривой.

3. Формула Грина и ее применения. Чрезвычайно важную роль в теории потенциала играет *формула Грина*. В трехмерной ограниченной области G с элементом объема $dg=dx\,dy\,dz$ и с границей Г, которая предполагается кусочно-гладкой[1]), для двух функций u и v справедливы формулы Грина

$$\iiint_G (u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z)\, dg+\iiint_G v\Delta u\, dg = \iint_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS, \tag{26}$$

$$\iiint_G (u\Delta v - v\Delta u)\, dg=\iint_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu}-v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS.$$

---

[1]) См. примечание 2 к стр. 247.

(Здесь $\partial/\partial\nu$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали.) В первой формуле мы предполагаем, что функции u и v непрерывны в $G+\Gamma$, первые производные u и v непрерывны в G, первые производные функции u непрерывны в $G+\Gamma$, а вторые ее производные непрерывны в G. Во второй формуле мы предполагаем, что первые производные u и v непрерывны в $G+\Gamma$, а вторые их производные непрерывны в G. Кроме того, в обоих случаях требуется, чтобы существовали интегралы по области G. Совершенно аналогичные формулы справедливы для плоскости.

Если $\Delta u=0$ и $v=1$, то мы получаем *интегральную теорему Гаусса*:

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS = 0. \tag{27}$$

Другими словами, *если гармоническая функция регулярна в ограниченной области G и непрерывно дифференцируема в $G+\Gamma$, то интеграл по поверхности Γ от ее нормальной производной равен нулю.*

Как следствие равенства (27), мы получаем следующую теорему о потенциалах двойного слоя с постоянной плотностью.

Если задан кусок поверхности F, ограниченный кривой C, и точка P, не принадлежащая F, то в случае постоянной плотности $\sigma=1$ потенциал двойного слоя поверхности F в точке P по абсолютной величине равен телесному углу, под которым кривая C видна из точки P. В частности, потенциал двойного слоя для поверхности, ограничивающей некоторую область G, имеет для точек G постоянное значение -4π, а для точек вне G равен нулю.

Чтобы доказать эту теорему, мы построим конус Ω, образованный прямыми, соединяющими точку P с точками границы C куска поверхности F[1]). Для простоты мы предположим, что область, ограниченная поверхностью F и частью поверхности конуса, лежащей между точкой P и контуром C, односвязна. Мы отрежем вершину конуса с помощью достаточно малой сферы K_ε радиуса ε и обозначим через G_ε область,

[1]) Знак этого телесного угла однозначно определяется, если на поверхности указаны положительная и отрицательная сторона. Кусок поверхности F и конус Ω, определенный точкой P и кривой C, ограничивают замкнутую область; сначала мы предположим, что она односвязна. Знак телесного угла отрицательный, если положительная нормаль к F выводит из этой области, и положительный в противном случае. В общем случае мы предполагаем, что кусок F составлен из конечного числа частей, для каждой из которых выполняется вышеуказанное предположение. Тогда мы видим, что потенциал двойного слоя равен сумме соответствующих телесных углов, причем каждый из них берется со своим знаком.

ограниченную поверхностями F, Ω, K_ε; функция $u=1/r$ в этой области регулярна. Из формулы (27) мы заключаем, что

$$\iint\limits_F \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}\,dS+\iint\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}\,dS+\iint\limits_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}\,dS=0,$$

и, так как $\partial(1/r)/\partial\nu$ обращается в нуль на Ω и принимает на K постоянное значение $-(1/\varepsilon^2)$, наше утверждение доказано (см. рис. 9)

Для $n=2$ мы имеем аналогичную теорему.

Потенциал двойного слоя дуги C с постоянной плотностью $\sigma=1$ в точке P, не лежащей на C, равен углу, под которым эта дуга видна из точки P. В частности, $u=-2\pi$ внутри любой замкнутой кривой C и $u=0$ вне этой кривой.

Если мы положим $v=u$ в первой из формул (26), то мы получим тождество

$$D\,[u]=\iiint\limits_G\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)dg=$$
$$=\iint\limits_\Gamma u\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS, \quad (28)$$

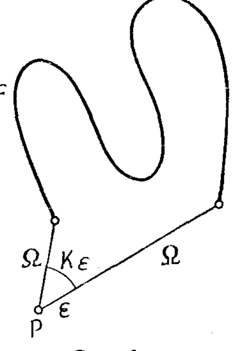


Рис. 9.

справедливое для любой гармонической функции, регулярной в ограниченной области G, с первыми производными, непрерывными в $G+\Gamma$. Эта формула остается верной, если область G содержит окрестность бесконечно удаленной точки, при условии, что гармоническая функция регулярна в этой окрестности, т. е. что функция

$$\frac{1}{r}\,u\left(\frac{x}{r^2},\ \frac{y}{r^2},\ \frac{z}{r^2}\right)$$

регулярна в начале координат. Интеграл $D[u]$, который называется *интегралом Дирихле*, играет особенно важную роль в теории потенциала. Как мы уже видели в т. I, гл. IV, § 3, п. 4, этот интеграл устанавливает связь между теорией потенциала и вариационным исчислением. В связи с этим он будет иметь важное значение при доказательстве теорем существования (см. т. III).

Сейчас мы уже можем сделать следующий вывод из тождества (28):

Пусть u — регулярная гармоническая функция в области G, непрерывная и непрерывно дифференцируемая в $G+\Gamma$. Тогда

а) *если функция u обращается в нуль на Γ, то она обращается в нуль тождественно в G;*

б) *если нормальная производная $\partial u/\partial\nu$ обращается в нуль на границе, то функция u постоянна в G.*

В обоих случаях из формулы (28) следует, что $D[u]=0$, и, следовательно, $u=\text{const}$. В первом случае константа должна совпадать с граничным значением нуль.

Пусть G — шар радиуса R с центром в P и с границей Γ. Пусть G_0 — концентрический шар радиуса $R_0 < R$ с границей Γ_0. Положим $v=1/r$ (где r — расстояние до центра шара) и применим вторую формулу (26) к области, лежащей между Γ и Γ_0. Тогда, с учетом равенства (27), мы получим для гармонической функции u равенство

$$\frac{1}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{\Gamma_0} u\,dS = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Gamma} u\,dS. \tag{29}$$

Устремив R_0 к нулю, получим формулу средних значений

$$u(P)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Gamma} u\,dS. \tag{30}$$

Другими словами, *значение гармонической функции в точке P равно среднему значению этой функции на любой сфере с центром в P, если эта функция регулярна внутри сферы и непрерывна в замкнутой области, ограниченной этой сферой*[1]).

Из этой теоремы о среднем значении можно вывести важные следствия. Прежде всего мы сформулируем

Принцип максимума. *Пусть функция u регулярна и гармонична в связной области G и непрерывна вплоть до границы области Γ. Тогда она принимает свое максимальное и минимальное значение на границе; максимум и минимум достигаются внутри области тогда и только тогда, когда u постоянна.*

Чтобы доказать эту теорему, мы рассмотрим такое подмножество F замкнутой области $G+\Gamma$, на котором u принимает свое наибольшее в $G+\Gamma$ значение M. Так как функция u непрерывна в $G+\Gamma$, F есть замкнутое множество. Если бы множество F содержало внутреннюю точку P_0 области G, то существовало бы семейство сфер с центром в P_0, целиком лежащих в G, и среднее значение функции u на каждой из этих сфер равнялось бы $u(P_0)=M$. Но так как $u \leqslant M$, это возможно только в том случае, когда $u=M$ на всякой сфере с центром в P_0, целиком содержащейся в G. Таким образом, множество F содержит по крайней мере все точки, лежа-

[1]) Очевидно, что для того, чтобы эта теорема была справедлива, функция не обязана быть непрерывно дифференцируемой в *замкнутой* области, ограниченной сферой, хотя это требование необходимо для того, чтобы были применимы формулы (26) и (27), которые используются при доказательстве.

щие внутри наибольшей сферы с центром в P_0, содержащейся в $G+\Gamma$. То же самое рассуждение можно провести для любой другой внутренней точки P_0; поэтому множество F должно совпадать с $G+\Gamma$. Но это и значит, что u константа (а именно константа, равная M). Следовательно, для любой функции u, отличной от константы, множество F может состоять только из граничных точек. Аналогичное рассуждение показывает, что минимум u принимается на границе, и только для постоянной u минимальное значение m принимается внутри области G.

Следующее утверждение является непосредственным следствием принципа максимума:

Если регулярная гармоническая функция, непрерывная в $G+\Gamma$, постоянна на границе, то она постоянна и во всей области,

В частности, из этого следует

Теорема единственности. *Две гармонические в G и непрерывные в $G+\Gamma$ функции, совпадающие на границе, тождественно равны в G.*

Это утверждение верно в силу того, что разность двух таких функций сама является регулярной гармонической функцией, непрерывной в $G+\Gamma$; она обращается в нуль на границе и, следовательно, тождественно равна нулю в G.

Формулы Грина (26) существенно изменяются, если мы подставляем вместо v функцию, обладающую характеристической для уравнения Лапласа особенностью в точке P. Пусть P — некоторая точка области G с координатами (x, y, z). Положим

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} + w(\xi, \eta, \zeta),$$

где $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$, а w — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция в G, непрерывная и непрерывно дифференцируемая в $G+\Gamma$. Мы применим формулу Грина (26) к подобласти $G-K_\varepsilon$, полученной из G исключением малой сферы K_ε радиуса ε с центром в P. Применяя формулу Грина к этой подобласти и производя простой предельный переход при $\varepsilon \to 0$, мы получаем

$$\iiint_G (u_\xi v_\xi + u_\eta v_\eta + u_\zeta v_\zeta)\, dg + \iiint_G u\, \Delta v\, dg = \\ = pu + \iint_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS, \quad (31)$$

$$\iiint_G (u\, \Delta w - v\, \Delta u)\, dg = pu + \iint_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS; \quad (31')$$

здесь dg — элемент объема в пространстве ξ, η, ζ и

$$v = \frac{1}{r} + w, \quad p = \begin{cases} 4\pi & \text{для } P \text{ в } G, \\ 2\pi & \text{для } P \text{ на } \Gamma, \\ 0 & \text{для } P \text{ вне } G; \end{cases}$$

в случае, когда точка P лежит на Γ, предполагается, что Γ имеет непрерывно изменяющуюся касательную плоскость в окрестности точки P[1]). Относительно u и w мы предполагаем так же, как и в формулах (26), существование интегралов по G, непрерывность u и w в $G+\Gamma$, непрерывность первых и вторых производных u и w в G; в формуле (31) мы предполагаем непрерывность первых производных от u в $G+\Gamma$, а в формуле (31′) — непрерывность первых производных от u и w в $G+\Gamma$.

При таких же предположениях мы имеем аналогичную систему формул на плоскости:

$$\iint\limits_G (u_\xi v_\xi + u_\eta v_\eta)\, dg + \iint\limits_G u\, \Delta w\, dg = pu + \int\limits_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds, \tag{32}$$

$$\iint\limits_G (u\, \Delta w - v\, \Delta u)\, dg = pu + \int\limits_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds, \tag{32′}$$

где dg — элемент площади, $v = \log 1/r + w$ и

$$p = \begin{cases} 2\pi & \text{для } P \text{ в } G, \\ \pi & \text{для } P \text{ на } \Gamma, \\ 0 & \text{для } P \text{ вне } G. \end{cases}$$

В частности, если в формуле (31′) мы положим $w = 0$, то получим для функции u в области G следующее представление:

$$u = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_G \frac{\Delta u}{r}\, dg + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Gamma u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS. \tag{33}$$

Таким образом, *любая функция u, непрерывно дифференцируемая в $G+\Gamma$ и имеющая непрерывные вторые производные в G, может рассматриваться как потенциал некоторого распределения, состоящего из пространственного распределения в области G с плотностью $-\Delta u/4\pi$, из поверхностного распределения (простой слой) с плотностью $(1/4\pi)\partial u/\partial \nu$ и из рас-*

[1]) Например, если P — вершина конуса, принадлежащего границе, то в этой точке вместо 2π мы должны взять p равным телесному углу, соответствующему этому конусу.

пределения диполей (двойной слой) с плотностью $-u/4\pi$ *на границе* Г.

В частности, для гармонической функции u справедливо соотношение

$$u = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\int \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\int u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \qquad (34)$$

Другими словами, *любая функция* u, *регулярная и гармоническая в* G *и непрерывно дифференцируемая в* $G+\Gamma$, *может быть представлена как потенциал некоторого распределения на граничной поверхности, состоящего из распределения типа простого слоя с плотностью* $(1/4\pi)\,\partial u/\partial \nu$ *и из распределения типа двойного слоя (распределения диполей) с плотностью* $-u/4\pi$.

Теорему о среднем значении в теории потенциала можно вывести также из формулы (31′). Действительно, применим (31′) к сфере радиуса R и положим $w = -1/R = \text{const}$. Тогда v обращается в нуль на границе сферы и немедленно получается соотношение (30).

Задача о перенесении всех этих результатов на случай $n=2$, а также на произвольное число n измерений предоставляется читателю. Для произвольного n при тех же предположениях относительно u и v и области G выполняются формулы Грина

$$\begin{aligned}\int\int\limits_{G}\cdots\int\left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}v_{x_i} + v\,\Delta u\right) dg &= \int\limits_{\Gamma}\cdots\int v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS,\\ \int\int\limits_{G}\cdots\int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dg &= \int\limits_{\Gamma}\cdots\int\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS,\end{aligned} \qquad (35)$$

а также следующие формулы, аналогичные формулам (31) и (31′):

$$\begin{aligned}\int\int\limits_{G}\cdots\int\left(\sum_{i=1}^{n} u_{\xi_i}v_{\xi_i} + u\,\Delta w\right) dg &= pu + \int\limits_{\Gamma}\cdots\int u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS,\\ \int\int\limits_{G}\cdots\int (u\,\Delta w - v\,\Delta u)\,dg &= pu + \int\limits_{\Gamma}\cdots\int\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS.\end{aligned} \qquad (36)$$

Здесь для $n > 2$ мы полагаем

$$v = \frac{1}{(n-2)\,r^{n-2}} + w, \qquad p = \begin{cases} \omega_n & \text{для } P \text{ в } G,\\ \frac{1}{2}\omega_n & \text{для } P \text{ на } \Gamma,\\ 0 & \text{для } P \text{ вне } G+\Gamma.\end{cases}$$

4. Производные потенциалов распределения масс. В п. 2 мы видели, что потенциал (14) объемного распределения масс непрерывен

и имеет непрерывные первые производные, если плотность распределения ограничена и интегрируема. Теперь мы будем исследовать с точки зрения непрерывности поведение поверхностных потенциалов (простого и двойного слоя) и их производных при переходе точки $P(x, y, z)$ через поверхность F. Мы будем пользоваться следующим методом[1]): как указано на рис. 10, мы рассмотрим точку P_0, лежащую на куске поверхности F; при этом F рассматривается как часть границы Γ пространственной области G. Мы предполагаем, что функция ρ (или σ), которая является плотностью распределения на F, достаточно гладким образом продолжена в эту область G. Применим к области G формулы Грина (31) и (31′) с соответствующим образом подобранными функциями u и v. Так как имеют значение только разрывы изучаемой функции, то мы можем в наших формулах опускать те выражения, которые непрерывны при переходе точки P через поверхность F. Мы будем применять для таких выражений символическое обозначение $\equiv 0$ („конгруэнтно нулю“); кроме того, область G выбирается так, чтобы положительное направление нормали к F было направлением внешней нормали.

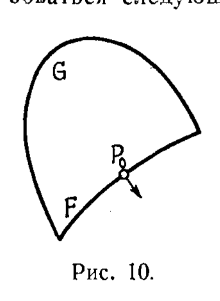


Рис. 10.

Заметим сначала, что потенциал простого слоя непрерывен при переходе точки P через поверхность F. Поэтому мы должны изучить только поведение потенциала двойного слоя и его производных, а также поведение производных потенциала простого слоя.

Мы предположим, что в окрестности точки P_0 поверхность F имеет непрерывную кривизну (см. примечание 2 к стр. 247) и что плотность распределения на поверхности является дважды непрерывно дифференцируемой функцией[2]). Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *При переходе через поверхность F значение потенциала двойного слоя в точке P_0 имеет скачок, описываемый формулами*

$$\begin{aligned} \lim_{P \to P_0^+} u(P) - u(P_0) &= 2\pi\sigma(P_0), \\ \lim_{P \to P_0^-} u(P) - u(P_0) &= -2\pi\sigma(P_0). \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь запись $P \to P_0^+$ обозначает, что P приближается к P_0 с положительной стороны поверхности, а $P \to P_0^-$ обозначает приближение с отрицательной стороны.

[1]) Наш метод связан с методом Шмидта; см. Шмидт [1].

[2]) Эти предположения можно ослабить, даже применяя тот же метод, что и здесь.

б) *Производная потенциала двойного слоя $u(P)$ по направлению нормали к поверхности изменяется непрерывно, если точка P переходит поверхность, двигаясь по нормали к ней в точке P_0. Однако тангенциальные производные $\partial u/\partial t$ (другими словами, производные по направлениям, перпендикулярным к нормали) имеют скачок, удовлетворяющий соотношениям*

$$\lim_{P\to P_0^+} \frac{\partial u(P)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = 2\pi \frac{\partial \sigma(P_0)}{\partial t},$$
$$\lim_{P\to P_0^-} \frac{\partial u(P)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = -2\pi \frac{\partial \sigma(P_0)}{\partial t}. \tag{38}$$

в) *Потенциал простого слоя и его тангенциальные производные непрерывны при переходе через точку P_0. Однако нормальная производная имеет следующий скачок:*

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] = \frac{\partial u}{\partial \nu_+} + \frac{\partial u}{\partial \nu_-} = -4\pi\rho(P_0). \tag{39}$$

Здесь $\partial/\partial\nu_+$ обозначает дифференцирование по направлению положительной нормали к поверхности в точке P_0, а $\partial/\partial\nu_-$ — дифференцирование по направлению отрицательной нормали.

Мы сначала рассмотрим потенциал двойного слоя с плотностью σ и предположим, что эта плотность продолжена на область $G+\Gamma$ так, что она является там непрерывно дифференцируемой функцией $\sigma(x, y, z)$; затем, полагая $u=\sigma$, $w=0$ и опуская все члены, непрерывные при переходе через границу, мы записываем формулу Грина (31) в виде

$$p\sigma + \int\limits_F\int \sigma \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}\,dS \equiv \int\int\limits_G\int \left(\sigma_\xi \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{r} + \sigma_\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{r} + \sigma_\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{r}\right) dg,$$

применяя введенный выше символ $\equiv$. Очевидно, что все граничные интегралы, не зависящие от F, непрерывны как функции точки P и имеют непрерывные производные всех порядков. Так как правая часть этого выражения, согласно п. 2, непрерывна, то

$$p\sigma + \int\limits_F\int \sigma \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}\,dS \equiv 0.$$

Это и есть нужное утверждение относительно поведения потенциала двойного слоя.

Чтобы доказать утверждение, относящееся к производной потенциала двойного слоя, мы предположим, что продолжение плотности σ в область G есть дважды непрерывно дифференцируемая функция,

такая, что нормальная производная $\partial\sigma/\partial\nu$ равна 0. Применим теперь вторую формулу Грина (31′), которую можно записать в виде

$$p\sigma + \iint_{\Gamma} \sigma \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r}\, dS = -\iiint_{G} \frac{\Delta\sigma}{r}\, dg.$$

Так как правая часть непрерывна, то мы снова получаем результат, касающийся разрыва самого потенциала двойного слоя. Кроме того, так как правая часть имеет непрерывные производные по x, y, z, то из формулы следует, что производные потенциала двойного слоя имеют такие же разрывы, как производные выражения $-p\sigma$; именно это мы и хотели доказать.

Наше утверждение относительно производных потенциала простого слоя получается точно таким же способом, если применить формулу Грина (31′). Однако функцию u в (31′) надо выбрать так, чтобы на поверхности F она тождественно равнялась нулю и чтобы нормальная производная $\partial u/\partial\nu$ равнялась плотности поверхностного распределения ρ. То, что такая функция u существует, непосредственно следует из предположений относительно гладкости поверхности F и плотности ρ.

Аналогичные теоремы и соотношения на разрывах можно получить для потенциала на плоскости, с той разницей, что в соотношениях (37) и (38) множитель 2π надо заменить на π, а в соотношении (39) множитель 4π — на 2π.

§ 2. *Интеграл Пуассона и его приложения*

1. Краевая задача и функция Грина. В т. I, гл. V, § 14, мы уже рассматривали представление решения краевой задачи с помощью *функции Грина*, не зависящей от заданных на границе значений и от правой части дифференциального уравнения.

Теперь мы поставим первую краевую задачу, которая называется также задачей Дирихле, для уравнения Лапласа в ограниченной области G пространства x с кусочно-гладкой[1]) границей Γ.

Пусть на Γ заданы непрерывные граничные значения. В частности, пусть граничные значения являются значениями трижды непрерывно дифференцируемой в $G+\Gamma$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, или $f(x)$. Надо найти решение дифференциального уравнения $\Delta u = 0$, непрерывное в $G+\Gamma$ и регулярное в G, совпадающее с функцией f на Γ. В § 4 мы увидим, что предположения относительно гладкости граничных значений легко можно ослабить с помощью простого предельного перехода.

Краевой задаче можно придать несколько иной вид, если ввести вместо u функцию $u - f = v$. Для функции v мы имеем нулевые

[1]) См. примечание 2 к стр. 247.

граничные значения на Г, но неоднородное дифференциальное уравнение

$$\Delta v = -\Delta f.$$

Пусть теперь $Q = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, или $Q = \xi$, — фиксированная точка, $P = x$ — переменная точка области G, γ — функция, заданная формулой (9) из § 1. *Мы определим функцию Грина $K(P, Q)$ дифференциального оператора $\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \partial^2 u / \partial x_\nu^2$ для области G как некоторое специальное фундаментальное решение уравнения $\Delta u = 0$, зависящее от параметра Q, имеющее вид*

$$K(P, Q) = K(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \\ = K(x, \xi) = \gamma(r) + w, \quad (1)$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2 = (x - \xi)^2,$$

и равное нулю, когда точка P лежит на Г. При этом слагаемое w непрерывно в $G + \Gamma$ и регулярно в G (так что функция K регулярна в G, за исключением точки $P = Q$). *Эта функция симметрична относительно аргументов P и Q*: $K(P, Q) = K(Q, P)$ (см. т. I, гл. V, § 14, п. 5, стр. 308).

Функция Грина обращается в нуль на Г и положительна на малой сфере вокруг точки Q; поэтому, согласно принципу максимума, она *положительна внутри G*.

Если v — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta v = -\Delta f$ в $G + \Gamma$, то формула (36) из § 1 сразу дает представление

$$v = \int\int_G \ldots \int K(x, \xi) \Delta f \, d\xi, \quad (2)$$

и решение исходной краевой задачи представляется в виде

$$u = f + \int\int_G \ldots \int K(x, \xi) \Delta f \, d\xi. \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) решение u в действительности не зависит от значений функции f внутри области G. В самом деле, применив формулу Грина, мы легко получим

$$\int\int_G \ldots \int K \Delta f d\xi = -f - \int_\Gamma \ldots \int \frac{\partial K}{\partial \nu} f dS$$

и, следовательно,

$$u = -\int_\Gamma \ldots \int \frac{\partial K}{\partial \nu} f dS. \quad (4)$$

В эту формулу входят только граничные значения функции f.

Однако часто бывает нужно сохранить представление решения краевой задачи в виде (3). В частности, мы будем применять формулу (3) при доказательстве следующей теоремы, которая является обратной по отношению к результатам, изложенным выше, но не содержит таких сильных ограничений на K и v.

Если $K(P, Q)$ — функция Грина для ограниченной области G, то для кусочно-дифференцируемой функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x)$ выражение

$$v = \int\int\ldots\int\limits_G K(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

дает решение уравнения Пуассона

$$\Delta v = -g,$$

непрерывное в $G+\Gamma$ и равное нулю на границе Γ.

То, что v удовлетворяет дифференциальному уравнению, следует из интегрального представления и из того, что функция g кусочно-непрерывно дифференцируема (см. § 1, п. 2, стр. 247). Чтобы показать, что v обращается в нуль на границе Γ, не достаточно воспользоваться тем, что там равна нулю функция Грина, так как K не стремится к нулю равномерно по Q, когда точка P приближается к границе Γ. Чтобы обойти эту трудность, мы воспользуемся следующей леммой, доказательство которой будет дано в п. 2.

Если B есть подобласть области G с диаметром меньше h, то

$$\int\int\ldots\int\limits_B K(x, \xi)\, d\xi < \varepsilon(h),$$

где $\varepsilon(h)$ зависит только от h, а не от вида области B, и стремится к нулю вместе с h.

Пусть точка P из G приближается к точке $\overline{P}$ на границе Γ. Пусть B_h — подобласть G, лежащая в шаре с диаметром h и с центром в точке $\overline{P}$, а G' — оставшаяся часть G. Тогда

$$v = \int\int\ldots\int\limits_{G'} Kg\, d\xi + \int\int\ldots\int\limits_{B_h} Kg\, d\xi.$$

Интеграл по области G', очевидно, стремится к нулю при $P \to \overline{P}$. Член $v_h = \int\int\ldots\int\limits_{B_h} Kg\, d\xi$ допускает оценку

$$|v_h| < M\varepsilon(h),$$

где M — максимум $|g|$. Итак, если точка P достаточно близка к $\overline{P}$, то $|v| < M\varepsilon(h)$. Так как h произвольно, наше утверждение доказано.

Эта теорема показывает, что решение краевой задачи дается формулами (2) и (3), если известна функция K. Другими словами: *решение краевой задачи с произвольными данными на границе эквивалентно отысканию функции Грина*, что соответствует решению краевой задачи со специальными данными на границе, зависящими от точки Q как от параметра.

2. Функция Грина для круга и шара. Интеграл Пуассона для шара и полупространства. В т. I, § 15, п. 2 мы построили функцию Грина для круга и шара. Использованные там соображения можно без труда применить также и к оператору Лапласа в случае n измерений. Пусть $\gamma = \psi(r)$ — фундаментальное решение дифференциального уравнения $\Delta u = 0$ в n-мерном пространстве

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} r^{2-n} && (\text{для } n > 2), \\ \psi(r) &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} && (\text{для } n = 2). \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда функция Грина для шара радиуса R сразу получается в виде

$$K(x,\ \xi) = \psi(r) - \psi\left(\frac{\varkappa}{R} r_1\right), \tag{6}$$

где

$$\varkappa^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2,\quad r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2 = (x - \xi)^2,\quad r_1^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left(x_\nu - \frac{R^2}{\varkappa^2}\xi_\nu\right)^2;$$

r_1 есть расстояние от точки x до отражения точки ξ относительно сферы, т. е. до точки

$$\left(\frac{R^2}{\varkappa^2}\xi_1,\ \frac{R^2}{\varkappa^2}\xi_2,\ \ldots,\ \frac{R^2}{\varkappa^2}\xi_n\right),\quad \text{или}\quad \frac{R^2}{\varkappa^2}\xi.$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет всем требованиям, в частности, она обращается в нуль на сфере, так как $r = (\varkappa/R)\, r_1$, если точка $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ лежит на сфере.

Функцию Грина для круга (или шара) можно следующим образом использовать как *мажоранту функции Грина для произвольной ограниченной области* G. Пусть Q — некоторая точка области G, а R — столь большое число, что круг (или шар) радиуса R с центром в любой из точек G целиком содержит область $G + \Gamma$. Если через r обозначено расстояние от точки $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ до Q, то легко видеть, что выражение

$$\psi(r) - \psi(R) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r} \qquad (n = 2),$$

$$\psi(r) - \psi(R) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}(r^{2-n} - R^{2-n}) \qquad (n > 2)$$

представляет собой функцию Грина соответственно для круга или шара радиуса R с центром в точке Q; она имеет особенность в точке Q (т. е. точка-параметр Q находится в центре круга или шара). Если $K(P, Q)$ — функция Грина для области G с особенностью в точке Q, то разность $K - (\psi(r) - \psi(R))$ регулярна в G и не положительна на Γ; поэтому всюду в G

$$0 \leqslant K \leqslant \psi(r) - \psi(R).$$

Отсюда легко получить оценку функции Грина для подобластей B области G с диаметром, меньшим чем h, использованную в п. 1.

С помощью формулы (6) мы теперь найдем величину $\partial K/\partial\nu$, входящую в интеграл

$$u = -\int_\Gamma\!\!\int \frac{\partial K}{\partial \nu} f\, dS,$$

взятый по поверхности сферы, и получим решение краевой задачи

$$\Delta u = 0, \quad u = f \quad \text{на } \Gamma$$

для шара. При помощи простых вычислений мы находим

$$\frac{\partial K}{\partial \nu} = \psi'(r)\,\frac{R^2 - \rho^2}{rR}, \quad \rho^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{7}$$

что после подстановки в интегральную формулу дает

$$u = -\frac{R^2 - \rho^2}{R}\int_\Gamma\!\!\int \frac{\psi'(r)}{r} f\, dS. \tag{8}$$

Если мы предположим, что f — заданная функция координат ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n на единичной сфере и подставим вместо $\psi(r)$ функцию (5), то получим *интегральную формулу Пуассона*

$$u(x) = \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{\omega_n}\int\!\!\int \frac{f\, d\omega_n}{(\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos\theta)^{n/2}}. \tag{9}$$

В этом выражении интеграл берется по поверхности n-мерной единичной сферы $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x^2$, а θ — угол между вектором ρ и радиусом, направленным в переменную точку интегрирования ξ.

Эта формула была уже выведена для $n = 2$ и $n = 3$ на стр. 34 и в т. I, гл. VII, § 5, п. 4, стр. 433.

Из сделанных выше замечаний следует, что формула (9) дает решение краевой задачи для шара в случае, когда граничные значения $f(\Gamma)$ являются значениями на Γ некоторой непрерывной функции $f(x)$, имеющей в G непрерывные первые и вторые и кусочно-непрерывные третьи производные. Например, все эти предположения выполняются, если $f \equiv 1$. В этом случае из интегральной формулы Пуассона и из теоремы единственности § 1 следует, что интеграл от положительного всюду внутри шара радиуса R ядра

$$H(P, Q) = \frac{R^2 - \rho^2}{R\omega_n r^n}, \quad r^2 = (x - \xi)^2, \quad \rho^2 = x^2 \tag{10}$$

по сфере радиуса R с элементом поверхности $do = R^{n-1}\, d\omega$ равен 1:

$$\int\int H(P, Q)\, do = \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{\omega_n} \int\int \frac{d\omega_n}{(\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\theta)^{n/2}} = 1. \tag{11}$$

Кроме того, для фиксированной точки $Q = \xi$ это ядро как функция точки $P = x$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри шара, что легко видеть, если мы запишем ядро в виде

$$R\omega_n H = -\frac{1}{r^{n-2}} + \frac{2}{n-2}\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\frac{1}{r^{n-2}},$$

где

$$r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2 = (x - \xi)^2.$$

На самой сфере функция H обращается в нуль всюду, кроме точки $P = Q$, где она стремится к бесконечности, когда P стремится к Q изнутри.

Теперь мы легко можем освободиться от сильных требований, наложенных на граничные значения f. Мы покажем, что *интегральная формула Пуассона дает решение краевой задачи для шара, даже если мы требуем от граничных значений только непрерывности на поверхности сферы*. Действительно, при этом предположении мы можем дифференцировать формулу (9) сколько угодно раз под знаком интеграла в любой внутренней точке P шара. Следовательно, функция u в этом случае также удовлетворяет уравнению Лапласа, и нам надо только показать, что при приближении к границе u стремится к заданным граничным значениям.

Пусть P_1 — произвольная точка границы, а P — близко к ней лежащая внутренняя точка (см. рис. 11). Мы предположим, что P_0 — точка поверхности сферы, лежащая на том же радиусе, что и P. Так как справедливо неравенство

$$|u(P)-f(P_1)| \leqslant |u(P)-f(P_0)| + |f(P_0)-f(P_1)|$$

и так как граничная функция непрерывна, достаточно показать, что функция u стремится к заданным граничным значениям, если P приближается к границе по радиусу, т. е. показать, что величина

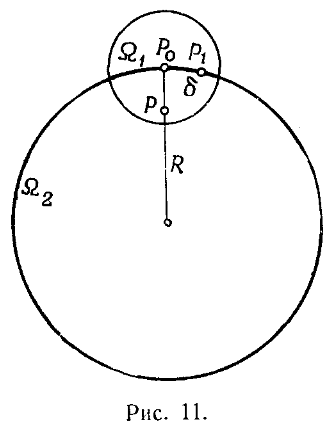


Рис. 11.

$$u(P)-f(P_0) = \iint_{\Gamma} H(P, Q)[f(Q)-f(P_0)]\, dS_Q, \quad (12)$$

где dS_Q — элемент поверхности, становится сколь угодно малой, когда точка P приближается к P_0 по радиусу, проходящему через P_0.

Для доказательства мы разделим поверхность сферы на две части Ω_1 и Ω_2 с помощью сферы произвольно малого радиуса δ с центром в точке P_0. Мы предположим, что точка P уже находится внутри этой малой сферы и, следовательно, расстояние h между P и P_0 меньше, чем δ. Далее, если $|f| \leqslant M$ на сфере и $|f(Q)-f(P_0)| \leqslant \sigma(\delta)$ на Ω_1, причем функция $\sigma(\delta)$ стремится к нулю вместе с δ, то формула (12) дает оценку

$$|u(P)-f(P_0)| \leqslant 2M \iint_{\Omega_2} H\, dS_Q + \sigma(\delta) \iint_{\Omega_1} H\, dS_Q < $$

$$< 2M \iint_{\Omega_2} H\, dS_Q + \sigma(\delta);$$

последнее неравенство следует здесь из равенства (11). Но в Ω_2 ядро H не превышает величины

$$\frac{1}{R}\,\frac{R^2-\rho^2}{\omega_n(\delta/2)^n} < \frac{2h}{\omega_n(\delta/2)^n}.$$

Таким образом получается, что

$$|u(P)-f(P_0)| \leqslant \frac{4MR^{n-1}}{(\delta/2)^n}\, h + \sigma(\delta).$$

Если мы возьмем δ настолько малым, что $\sigma(\delta) < \varepsilon/2$, и выберем h таким, что

$$\frac{4MR^{n-1}}{(\delta/2)^n} h < \frac{\varepsilon}{2},$$

то получим $|u(P) - f(P_0)| < \varepsilon$. Это завершает доказательство.

Соответствующее интегральное представление и аналогичные результаты можно получить, если G представляет собой не шар, а полупространство. Если граница Γ есть плоскость x, y, а G — полупространство $z > 0$, то *интеграл Пуассона для полупространства*

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} \tag{9'}$$

дает решение краевой задачи для области G с произвольными граничными значениями $f(x, y)$; при этом предполагается, что соответствующая задача для ограниченной области G', полученной из G с помощью инверсии относительно некоторого круга, лежащего вне G (см. § 1, стр. 245), оказывается краевой задачей с непрерывными граничными значениями, заданными на границе Γ' ограниченной области G'.

При соответствующих предположениях для n-мерной области G: $x_n > 0$ с границей $\Gamma: x_n = 0$ мы получаем интегральную формулу

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(x) =$$

$$= \frac{2x_n}{\omega_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \frac{f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}}{\left[(x_1-\xi_1)^2 + \ldots + (x_{n-1}-\xi_{n-1})^2 + x_n^2\right]^{n/2}}. \tag{9''}$$

3. Следствия формулы Пуассона. Теорема о среднем значении, а также принцип максимума являются непосредственными следствиями представления Пуассона. Кроме того, из принципа максимума, примененного к разности двух решений (см. § 1, п. 3), следует единственность решения краевой задачи. Таким образом, две гармонические функции, принимающие одинаковые значения на границе, тождественно совпадают во всей области.

Формула Пуассона позволяет доказать следующее важное неравенство: для $\rho < R$ ядро H (см. (10)) всегда положительно и ограничено снизу и сверху величинами

$$\frac{1}{R\omega_n}\left(\frac{1}{R+\rho}\right)^{n-2}\frac{R-\rho}{R+\rho} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R\omega_n}\left(\frac{1}{R-\rho}\right)^{n-2}\frac{R+\rho}{R-\rho}.$$

Пусть u — неотрицательная регулярная гармоническая функция в области G (см. рис. 12); пусть Ω — сфера с центром P радиуса R, целиком лежащая в G, а Q — ее произвольная внутренняя точка. Тогда из интеграла Пуассона и из теоремы о среднем значении следует *неравенство Харнака*[1])

$$\left(\frac{R}{R+\rho}\right)^{n-2}\frac{R-\rho}{R+\rho}\,u(P)\leqslant u(Q)\leqslant\left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{n-2}\frac{R+\rho}{R-\rho}\,u(P).$$

Если u регулярна в любой ограниченной области пространства, а P и Q — любые две точки, то мы всегда можем выбрать достаточно большую сферу с центром в P, содержащую Q. Рассматривая неравенство Харнака и устремляя радиус сферы R к бесконечности, мы сразу получаем $u(P)=u(Q)$. Следовательно, *гармоническая функция, регулярная и положительная в любой ограниченной области пространства, постоянна.*

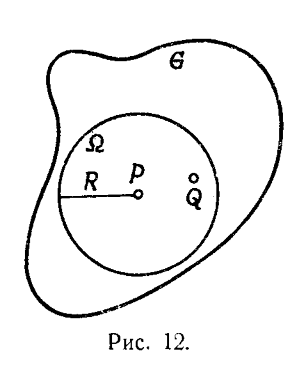


Рис. 12.

Другим важным следствием формулы Пуассона является *аналитичность гармонических функций.*

Любую функцию u, гармоническую и регулярную в области G, можно разложить в степенной ряд в окрестности каждой внутренней точки P области G; это значит, что функция u аналитическая.

Для доказательства мы представим функцию u с помощью интегральной формулы Пуассона для сферы настолько малого радиуса R, чтобы эта сфера целиком лежала в G. Взяв точку P в качестве начала координат, мы разложим ядро Пуассона в степенной ряд по $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и почленным интегрированием затем получим степенной ряд для $u(x_1, \ldots, x_n)=u(x)$.

Мы определим функцию $w(x, \xi)$ формулой

$$w=\frac{\rho^2-2\varkappa\rho\cos\theta}{R^2},$$

где

$$\rho^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2=x^2,\quad \varkappa^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=\xi^2\quad\text{и}\quad \varkappa\rho\cos\theta=\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i=x\xi;$$

мы *не требуем*, чтобы точка ξ лежала на сфере $\varkappa=R$. Кроме того, мы определим $K(w)$ как

$$K(w)=\frac{1}{(1+w)^{n/2}}$$

[1]) Неравенство Харнака было обобщено на общие линейные эллиптические уравнения второго порядка; см. Серрин [1] и Мозер [2]. См. также § 7 и 8 и приложение в работе Берса и Ниренберга [2].

и заметим, что функция

$$\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)K(w(x,\ \xi))$$

совпадает с ядром интеграла Пуассона

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-\frac{2\rho}{R}\cos\theta+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{n/2}},$$

если точка $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ лежит на сфере $\varkappa=R$. Мы разложим функцию $K(w)$ по степеням $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$, чтобы получить представление ядра Пуассона в виде степенного ряда, справедливое для $\varkappa=R$[1]).

Заметим, что функция w представляет собой многочлен относительно x и ξ, причем каждый его член неотрицателен, если все произведения $x_i\xi_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ неположительны. Для произвольного $\varepsilon>0$ мы будем рассматривать точки $\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ и $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, находящиеся в шарах

$$\varkappa<(1+\varepsilon)R \tag{13}$$

и

$$\rho<\frac{R}{3+2\varepsilon} \tag{14}$$

соответственно. Из этого следует, что

$$|w|\leqslant\frac{\rho^2+2\varkappa\rho}{R^2}<\frac{7}{9}+\eta(\varepsilon), \tag{15}$$

где η стремится к нулю вместе с ε; следовательно, $|w|<1$ при достаточно малых ε.

Ясно, что функцию $K(w)$ можно разложить в ряд по w, абсолютно сходящийся при $|w|<1$. Поэтому, разлагая степени w на отдельные члены, мы можем получить ряд по степеням $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$; при достаточно малых ε он сходится к $K(w)$, если точка $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ находится в шаре (13), а $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — в шаре (14); если этот степенной ряд на сфере $\varkappa=R$ умножить на $1-\rho^2/R^2$, то он совпадет с ядром интеграла Пуассона[2]).

---

[1]) Ядро Пуассона, определенное формулой (10) для $\varkappa\leqslant R$, нельзя представить в виде степенного ряда для $\varkappa\leqslant R$, так как это ядро имеет особенность при $\xi=x$.

[2]) Часто бывает полезно разложить ядро Пуассона по степеням ρ/R; при этом получается ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu}\psi_\nu(\cos\theta).$$

В случае $n=2$

$$\psi_\nu(\cos\theta)=2^\nu T_\nu(\cos\theta).$$

Наконец, для гармонической функции u интегральная формула Пуассона дает ряд по $x_1, \ldots, x_n$, сходящийся в шаре (14).

Другим следствием формулы Пуассона является следующий

Принцип отражения. *Если гармоническая в области и непрерывная вплоть до границы функция обращается в нуль на сферической или плоской части границы, то ее можно (аналитически) продолжить при помощи отражения через эту часть границы с сохранением гармоничности.*

Доказательство достаточно провести для куска плоскости (или прямой) S, который является частью границы полушара (или полукруга) H[1]).

Пусть функция u гармонична в H и непрерывна в $H+\Gamma$, причем ее значения на S равны нулю. Отразим область H относительно S и получим таким образом шар (или круг) K.

Зададим теперь граничные значения на границе K. Каждой точке P на $\Gamma - S$ мы ставим в соответствие значение $u(P)$, а в каждой точке P на той части границы K, которая является отражением

где T_ν обозначает ν-й *полином Чебышева* (см. т. I, гл. II, § 9, п. 2, стр. 82). Поэтому

$$\psi_\nu(\cos\theta) = 2\cos\nu\theta, \quad \psi_0(\cos\theta) = 1$$

и

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\frac{\rho^2}{R^2}} = 1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu \cos\nu\theta.$$

В случае $n=3$

$$\psi_\nu(\cos\theta) = (2\nu+1)P_\nu(\cos\theta),$$

где $P_\nu(x)$ обозначает ν-й *полином Лежандра* (см. т. I, гл. II, § 8, стр. 77). Здесь

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{3/2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu P_\nu(\cos\theta).$$

Применяя сопряженные функции Лежандра $P_{\nu,h}(x)$ для $\nu>0$, мы можем записать выражения $P_\nu(\cos\theta)$ в виде

$$(2\nu+1)P_\nu(\cos\theta) = P_\nu(\cos\beta)P_\nu(\cos\beta')+$$
$$+2\sum_{h=1}^{\nu}\frac{(\nu-h)!}{(\nu+h)!}\cos h(\varphi-\varphi')P_{\nu,h}(\cos\beta)P_{\nu h}(\cos\beta'),$$

где $\cos\theta = \cos\beta\cos\beta'+\sin\beta\cdot\sin\beta'\cos(\varphi-\varphi')$.

[1]) Если область G имеет плоскую часть границы, то мы будем пользоваться полушарами, лежащими в G, с центрами на этой плоскости.

Отражение относительно поверхности сферы так же просто, как отражение относительно плоскости.

(зеркальным изображением) точки P' на $\Gamma - S$, мы зададим значение $-u(P')$. Тогда интеграл Пуассона дает гармоническую функцию U, регулярную в K и принимающую заданные граничные значения.

Если зеркальное отражение каждой точки P из K мы обозначим через P', то ясно, что не только $U(P)$, но также и $-U(P')$ (как функция P) является решением краевой задачи для K. Из этого вследствие единственности решения краевой задачи мы заключаем, что $U(P) = -U(P')$ для всех точек P из K и, следовательно, функция U обращается в нуль на S. Наконец, так как $u(P)$ и $U(P)$ совпадают на (всей) границе Γ области H, мы в силу единственности можем сделать вывод, что $u \equiv U$ в H.

Аналогичный принцип отражения можно доказать для таких гармонических функций, у которых нормальная производная обращается в нуль на S. В этом случае u надо продолжать через S четным образом.

Из интеграла Пуассона можно также вывести следующую важную теорему.

Теорема Вейерштрасса о сходимости. *Последовательность гармонических функций u_n, регулярных в G и непрерывных в $G+\Gamma$ и таких, что их граничные значения f_n сходятся равномерно на Γ, равномерно сходится в G к гармонической функции, принимающей граничные значения $f = \lim f_n$.*

Мы здесь ограничимся случаем двух или трех измерений, не теряя при этом общности наших выводов.

Утверждение теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости непосредственно следует из принципа максимума. Действительно, если каждая из гармонических функций u_n регулярна в G и непрерывна в $G+\Gamma$, то те же утверждения справедливы для разности $u_n - u_m$ при произвольных n и m; поэтому эта разность принимает свое максимальное (и минимальное) значение на границе. Следовательно, для всех точек замкнутой области $G+\Gamma$ мы имеем неравенство

$$|u_n - u_m| \leqslant \max |f_n - f_m|,$$

из которого сразу следует равномерная сходимость в G и тот факт, что функция $u = \lim u_n$ принимает граничные значения $f = \lim f_n$. Из интеграла Пуассона видно, что предельная функция u удовлетворяет в G уравнению Лапласа. Действительно, пусть K — произвольная сфера радиуса R, целиком содержащаяся в G; обозначим через $\bar{u}_n$ и $\bar{u}$ соответственно граничные значения u_n и u на K. Тогда внутри K для любой функции u_n, а следовательно, и для функции u

с граничными значениями $\bar{u}$ справедлива интегральная формула

$$u = \frac{R(R^2-\rho^2)}{4\pi} \iint\limits_K \frac{\bar{u}\, d\omega}{(\rho^2+R^2-2\rho R\cos\theta)^{3/2}},$$

из которой сразу следует, что u — гармоническая функция внутри K.

Другим следствием является теорема Харнака — также теорема о сходимости.

Теорема Харнака. *Если неубывающая или невозрастающая последовательность регулярных гармонических функций в области G сходится в некоторой точке G, то она сходится во всех точках G и сходимость равномерна в любой замкнутой внутренней подобласти.*

Достаточно доказать эту теорему для неубывающей последовательности. Для произвольного m и $n > m$ рассмотрим неотрицательную разность $\varphi = u_n - u_m$ и построим шар K_a радиуса a, лежащий в G, с центром в точке сходимости P. Если Q — любая другая точка этого шара, а $\rho < a$ — ее расстояние до центра P, то неравенство Харнака дает

$$0 < \varphi(Q) < \frac{a+\rho}{a-\rho}\varphi(P)\left(\frac{a}{a-\rho}\right)^{n-2}. \tag{16}$$

Это показывает, что последовательность u_n равномерно сходится в любом шаре радиуса $r \leqslant a - \delta$. Так как любую замкнутую внутреннюю подобласть G можно покрыть конечным числом шаров соответствующим образом подобранного радиуса $r < a$, лежащих целиком в G, то утверждение теоремы доказывается многократным применением только что проведенного рассуждения; гармоничность предельной функции в G следует сразу из интегральной формулы Пуассона или из теоремы Вейерштрасса.

Теперь мы сформулируем теорему, имеющую фундаментальное значение.

Если множество регулярных гармонических функций $\{u(P)\}$ равномерно ограничено в G, т. е. если для всех функций и этого множества и для всех точек P области G

$$|u(P)| \leqslant M,$$

то в любой замкнутой внутренней подобласти из G множества их производных $\{u_x\}$, $\{u_y\}$ и $\{u_z\}$ также равномерно ограничены.

Рассмотрим шар K радиуса a с центром в P, лежащий внутри G; поверхность его обозначим через S. Так как u_x — гармоническая

функция, то справедлива теорема о среднем значении

$$u_x(P) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_S u_x \, dS.$$

Отсюда легко получается теорема о среднем значении по K:

$$u_x(P) = \frac{3}{4\pi a^3} \iiint\limits_K u_x \, dg$$

(см. § 3).

Интегрируя по частям, получаем

$$u_x(P) = \frac{3}{4\pi a^3} \iint\limits_S u \frac{\partial x}{\partial \nu} \, dS.$$

Так как $|\partial x/\partial \nu| \leqslant 1$ и $|u| \leqslant M$, то отсюда получается оценка

$$|u_x(P)| \leqslant \frac{3M}{a}. \tag{17}$$

Аналогично мы получаем

$$|u_y(P)| \leqslant \frac{3M}{a} \tag{18}$$

и

$$|u_z(P)| \leqslant \frac{3M}{a}. \tag{19}$$

Пусть теперь G_a — замкнутая подобласть G, причем расстояние точек этой подобласти до границы Γ больше, чем a; тогда для всех точек P подобласти G_a и всех функций $u(P)$ нашего множества справедливы написанные выше неравенства, что дает доказательство теоремы.

Прямым следствием этого результата является следующая теорема о выборе (теорема о „компактности").

Из любого равномерно ограниченного множества регулярных гармонических функций в области G можно выбрать последовательность $u_n(P)$, равномерно сходящуюся к некоторой гармонической функции в любой замкнутой внутренней подобласти G' области G.

Так как производные функции u также равномерно ограничены в любой фиксированной внутренней замкнутой подобласти, то множество $\{u(P)\}$ в этой подобласти равностепенно непрерывно, а это обеспечивает возможность выбора равномерно сходящейся последовательности (см. т. I, гл. II, § 2, п. 1). Снова из теоремы Вейерштрасса мы заключаем, что предельная функция u гармонична в G. В частности, наши рассуждения позволяют утверждать, что *любая сходящаяся последовательность равномерно ограниченных гармонических функций обязана сходиться равномерно в любой замкнутой подобласти, а следовательно, имеет в качестве предела гармоническую функцию.*

§ 3. Теорема о среднем значении и ее приложения

1. Теорема о среднем значении для однородного и неоднородного уравнения. Мы уже рассматривали теорему о среднем значении для гармонических функций.

Для любой регулярной и гармонической в области G функции u среднее значение по поверхности Ω_R сферы радиуса R, целиком содержащейся в G, равно значению u_0 этой функции в центре сферы,

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u \, d\Omega_R. \tag{1}$$

Отсюда сразу получается теорема о среднем значении по шару. Так как формула (1) справедлива для всех R, для которых соответствующие сферы содержатся в G, мы можем умножить ее на R^2 и проинтегрировать в пределах от 0 до a; мы получим

$$u_0 = \frac{3}{4\pi a^3} \iiint\limits_{K_a} u \, dg, \tag{2}$$

где K_a — шар радиуса a. Другими словами, *среднее значение функции u по шару, целиком лежащему в G, равно значению функции u_0 в центре шара.*

Соответствующая теорема о среднем значении по сфере справедлива также для решений неоднородного уравнения Пуассона $\Delta u = -4\pi\mu$; она получается просто как частный случай формулы Грина (31′), выведенной в § 1, п. 3. Применяя эту формулу к шару K_R радиуса R с центром в P и полагая

$$w = -\frac{1}{R}, \quad \text{т. е.} \quad v = \frac{1}{r} - \frac{1}{R},$$

мы получаем тождество

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u \, d\Omega_R = u_0 + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{K_R} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \Delta u \, dg, \tag{3}$$

справедливое для любой непрерывной функции $u(x, y, z)$, обладающей непрерывными первыми и кусочно-непрерывными вторыми производными. Для решений уравнения Пуассона мы, таким образом, получаем следующую теорему о среднем значении.

Для произвольного шара K_R, целиком содержащегося в области G, любое решение уравнения $\Delta u = -4\pi\mu$, регулярное в G, удовлетворяет соотношению

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u \, d\Omega_R + \iiint\limits_{K_R} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \mu \, dg. \tag{4}$$

Как и в частном случае $\mu \equiv 0$, мы получаем уравнение, содержащее среднее значение по шару, умножая это соотношение на R^2 и интегрируя по R. После соответствующих вычислений мы получаем

$$u_0 = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_{K_R} u\, dg + \frac{1}{2R^3} \iiint\limits_{K_R} \frac{(R-r)^2 (2R+r)}{r} \mu\, dg. \quad (5)$$

Аналогичные теоремы справедливы на плоскости.

Для произвольного круга K_R, целиком содержащегося в области G, любое решение уравнения $u_{xx} + u_{yy} = -2\pi\mu$, регулярное в G, удовлетворяет соотношениям

$$u_0 = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\Gamma_R} u\, ds + \iint\limits_{K_R} \mu \log \frac{R}{r}\, dg, \quad (6)$$

$$u_0 = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} u\, dg + \frac{1}{R^2} \iint\limits_{K_R} \left(R^2 \log \frac{R}{r} - \frac{R^2 - r^2}{2}\right) \mu\, dg. \quad (7)$$

Вообще, в n-мерном пространстве, для произвольного шара K_R, целиком содержащегося в области G, любое решение уравнения $\Delta u = -\omega_n \mu$, регулярное в G, удовлетворяет соотношениям

$$u_0 = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int \underset{\Omega_R}{\dots} \int u\, d\Omega_R + \frac{1}{n-2} \iint \underset{K_R}{\dots} \int \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right) \mu\, dg, \quad (6')$$

$$u_0 = \frac{n}{\omega_n R^n} \iint \underset{K_R}{\dots} \int u\, dg - \iint \underset{K_R}{\dots} \int \Psi(r, R) \mu\, dg, \quad (7')$$

где

$$\Psi(r, R) = \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}\right) + \frac{1}{2R^{n-2}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right].$$

Надо заметить, что уравнения (5), (7) и (7′) можно получить также и из формул Грина (31′), (32′) и (36), § 1, если вместо v подставить функцию

$$v = \gamma(r) - \gamma(R) + \frac{1}{2R^n}(r^2 - R^2),$$

где

$$\gamma(r) = \frac{1}{(n-2)\, r^{n-2}};$$

эта функция v вместе со своей нормальной производной обращается в нуль на поверхности сферы Ω_R и удовлетворяет внутри K_R уравнению

$$\Delta v = \frac{n}{R^n}.$$

2. Обращение теорем о среднем значении. Замечательно, что свойства средних значений полностью характеризуют решения соот-

ветствующих дифференциальных уравнений. Сначала мы докажем следующую *обратную теорему о среднем значении для гармонических функций.*

Предположим, что функция $u(x, y, z)$ непрерывна в области G и для любого шара K_R, содержащегося в G, удовлетворяет соотношению средних значений

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Omega_R} u \, d\Omega_R.$$

Тогда функция u гармонична в G.

Мы дадим два доказательства этой теоремы.

Доказательство 1. (В нем применяется интегральная формула Пуассона.) Пусть G' — шар, целиком содержащийся в G, а Γ' — его граница. Пусть v — гармоническая функция, заданная с помощью формулы Пуассона (9) из § 2, причем она является решением следующей краевой задачи: $\Delta v = 0$ в G', $v = u$ на Γ'. Так как функция v гармоническая, она должна удовлетворять теореме о среднем значении; следовательно, разность $u - v$ также должна обладать этим свойством. Тогда она должна удовлетворять принципу максимума (и минимума) (см. § 1, п. 3). Но $u - v = 0$ на Γ', следовательно, $u \equiv v$ в G'. Ясно, что u удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри любой сферы в G; поэтому она гармонична всюду в G.

Доказательство 2. Легко дать прямое доказательство обратной теоремы о среднем значении, не применяя интегральную формулу Пуассона. Если бы мы знали, что функция u обладает непрерывными вторыми производными в области G, то утверждение теоремы немедленно следовало бы из тождества (3)

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Omega_R} u \, d\Omega_R - u_0 = \frac{1}{4\pi} \iiint_{K_R} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \Delta u \, dg;$$

надо было бы разделить обе части равенства на R^2 и устремить R к нулю. В силу непрерывности Δu правая часть при этом сходилась бы к значению

$$\Delta u_0 \lim_{R \to 0} \frac{1}{4\pi R^2} \iiint_{K_R} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) dg = \frac{1}{6} \Delta u_0,$$

а левая часть по предположению обращалась бы в нуль для всех R; следовательно, мы имели бы $\Delta u_0 = 0$. Таким образом, теорема была бы доказана, если бы мы могли показать, что функция u дважды непрерывно дифференцируема в G.

Пусть G_a — подобласть области G, точки которой отстоят от границы больше, чем на a. Тогда соотношение (1) несомненно выпол-

няется для всех сфер K радиуса $R \leqslant a$ с центрами в G_a. Считая центр фиксированным, умножим равенство (1) на $R^2 f(R)$, где $f(R)$—произвольная непрерывная функция, и проинтегрируем по R от 0 до a; мы получим

$$Cu_0 = \iiint_K f(r)\, u\, dg, \tag{8}$$

где $C = 4\pi \int_0^a r^2 f(r)\, dr$.

Для удобства мы продолжим функцию f так, чтобы $f(R)$ тождественно равнялось нулю для $R > a$. Если мы поместим центр сферы в точке (x, y, z) и положим

$$L(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right),$$

то сможем записать формулу (8) в виде

$$Cu(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} L(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{9}$$

Поскольку f можно выбрать так, чтобы функция L имела производные сколь угодно высокого порядка, из формулы (9) следует, что непрерывная функция u, удовлетворяющая соотношению средних значений (1), имеет непрерывные производные всех порядков внутри G. Это завершает второе доказательство теоремы.

До сих пор мы предполагали, что свойство средних значений (1) выполняется для *любого* шара, целиком содержащегося в G, где G может быть произвольной конечной или бесконечной областью. Однако оказывается, что если G — конечная область, то нет необходимости предполагать, что выполняется свойство средних значений для *любого* шара; а именно, мы имеем следующую теорему.

Пусть G — такая ограниченная область в пространстве, что в ней разрешима краевая задача для уравнения $\Delta w = 0$ при произвольных непрерывных граничных значениях. Предположим, что функция u непрерывна в $G + \Gamma$ и обладает свойством средних значений

$$u_0 = \frac{1}{4\pi h^2} \iint_{\Omega_h} u\, d\Omega_h \tag{10}$$

в любой внутренней точке P области G по крайней мере для одной сферы с центром в P и таким радиусом $h(P) > 0$, что сфера содержится в $G + \Gamma$. Тогда u — гармоническая функция в G.

Мы особенно подчеркиваем, что h может быть совершенно произвольной функцией x, y, z и может, например, иметь произвольные разрывы.

Доказательство получается с помощью рассуждений, слегка отличающихся от примененных в первом доказательстве предыдущей теоремы. Предположим, что v — гармоническая функция, совпадающая с u на Γ; как гармоническая функция она обязана удовлетворять соотношению средних значений (10) при любом h, когда Ω_n лежит в G. Следовательно, разность $u-v$ также удовлетворяет соотношению (10) для $h(P)$. Мы рассмотрим теперь замкнутое множество F таких точек области G, в которых разность $u-v$ принимает свое максимальное значение M. Пусть P_0 — точка F, самая близкая к границе Γ. Если бы точка P_0 была внутренней точкой G, то существовала бы сфера радиуса $h(P_0)>0$ с центром в P_0, целиком лежащая в G, для которой выполнялось бы соотношение средних значений и на которой, следовательно, $u-v=M$. Тогда, вопреки сделанному предположению, существовали бы точки F, более близкие к Γ, чем P_0. Таким образом, точка P_0 лежит на Γ. Аналогично можно показать, что минимум функции $u-v$ также достигается на границе. Но $u-v$ обращается в нуль на границе. Поэтому мы заключаем, что $u \equiv v$ в G.

При доказательстве обратных теорем о среднем значении мы предполагали, что функция u непрерывна; это требование не является лишним. Вообще говоря, нельзя ожидать, что непрерывность следует из свойства средних значений, даже если это свойство справедливо для любой сферы. Действительно, для $n=1$, т. е. для одномерного соотношения средних значений

$$u(x)=\frac{1}{2h}(u(x+h)+u(x-h)),$$

можно построить нелинейные разрывные функции u, которые удовлетворяют этому уравнению для произвольных x и h[1]).

Если предполагать, что соотношение средних значений выполняется в каждой точке только для одного радиуса $h(P)$, то надо считать G ограниченной областью. Для неограниченной области, например, в частном случае $h=\text{const}=l$, можно построить непрерывные негармонические функции, удовлетворяющие уравнению

$$u_0=\frac{1}{4\pi l^2}\int_{\Omega_l}\int u\,d\Omega_l \tag{11}$$

в любой точке области G. Если предположить, что u зависит только от x, то легко видеть, что формула (11) переходит в интегральное

---

[1]) См. Гамель [1].

уравнение

$$u(x)=\frac{1}{2l}\int\limits_{x-l}^{x+l}u(\xi)\,d\xi. \tag{12}$$

Мы можем получить частные решения этого уравнения, полагая $u(x)=e^{i\gamma x}$, где γ является корнем трансцендентного уравнения

$$\frac{\sin\gamma l}{\gamma l}=1. \tag{13}$$

Кроме решения $\gamma=0$, это уравнение имеет бесконечно много комплексных корней $\gamma=\alpha+i\beta$; α и β получаются как точки пересечения кривых

$$\frac{\sin\alpha l}{\alpha l}=\frac{1}{\operatorname{ch}\beta l}, \quad \cos\alpha l=\frac{\beta l}{\operatorname{sh}\beta l}$$

на плоскости α, β. Тогда действительные функции $u=e^{-\beta x}\cos\alpha x$ и $u=e^{-\beta x}\sin\alpha x$ также удовлетворяют уравнению (12); гармоническая функция получается только при $\alpha=\beta=0$.

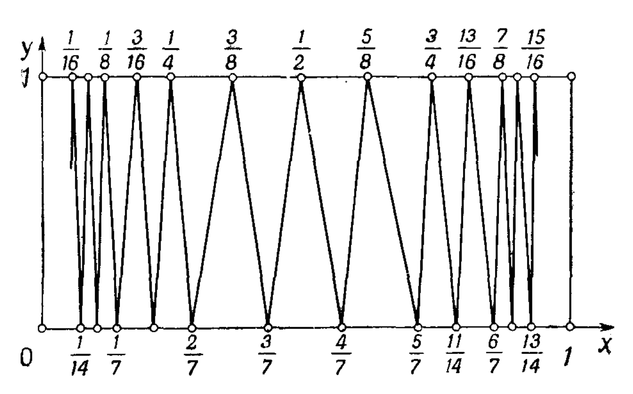


Рис. 13.

Если свойство средних значений выполняется только для одного радиуса $h(P)$ в каждой точке P, то существенно, что функция u непрерывна не только в ограниченной открытой области G, но и в *замкнутой* области $G+\Gamma$.

Рисунок 13 показывает простой пример[1]) функции $u(x)$, непрерывной только в открытом интервале, которая в каждой точке интервала удовлетворяет одномерному уравнению средних значений

$$u(x)=\frac{1}{2h}(u(x+h)-u(x-h)) \tag{14}$$

[1]) Этот пример был предложен Шифманом.

с соответствующим $h(x) > 0$ и которая тем не менее не является линейной.

Эта функция непрерывна и кусочно-линейна в интервале $0 < x < 1$ и колеблется между прямыми $y = 0$ и $y = 1$. Ясно, что она не является непрерывной на концах отрезка $y = 0$ и $y = 1$. Пусть угловые точки, лежащие на верхней прямой, имеют абсциссы a_ν, а точки, лежащие на нижней прямой — абсциссы b_ν. В окрестности каждой точки интервала, не совпадающей ни с одной из точек a_ν, b_ν, функция $u(x)$ линейна и, следовательно, для некоторого определенного $h(x)$ обладает свойством средних значений (14) (в действительности она обладает этим свойством для бесконечно многих h). Если мы теперь выберем последовательность a_ν так, чтобы для каждого a_ν существовали две точки $a_\alpha < a_\nu$ и $a_\beta > a_\nu$, такие, что $a_\nu = {}^1/_2 (a_\alpha + a_\beta)$, то $u(x)$ удовлетворяет соотношению (14) также и в верхних угловых точках и $h(a_\nu) = a_\beta - a_\nu = a_\nu - a_\alpha$. Если, кроме того, мы выберем b_ν таким же образом, но так, чтобы b_ν не совпадали с a_μ при любых ν и μ и чтобы в каждом интервале между двумя соседними точками a_ν находилась ровно одна точка b_μ, то мы получим функцию $u(x)$, которая непрерывна при $0 < x < 1$, удовлетворяет соотношению (14) и тем не менее не линейна, как показано на рис. 13.

Построить две последовательности a_ν и b_ν указанного типа можно многими способами. Например, как на рис. 13, мы можем выбрать точки с абсциссами

$$a = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k}, & \dfrac{3}{2^{k+2}}, \\ 1 - \dfrac{1}{2^k}, & 1 - \dfrac{3}{2^{k+2}} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

на прямой $y = 1$ и точки с абсциссами

$$b = \begin{cases} \dfrac{1}{7}\dfrac{1}{2^{k-1}}, & \dfrac{3}{7 \cdot 2^k}, \\ 1 - \dfrac{1}{7}\dfrac{1}{2^{k-1}}, & 1 - \dfrac{3}{7 \cdot 2^k} \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

на прямой $y = 0$; эти точки симметричны относительно $x = {}^1/_2$.

Общая теорема о средних значениях для неоднородного уравнения Пуассона также имеет обратную.

Пусть u — непрерывная, а μ — кусочно-непрерывно дифференцируемая функция в области G. Пусть для любого шара K, лежащего в G, эти функции удовлетворяют уравнению (4)

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \int_\Omega\!\!\int u \, d\Omega + \iiint_K \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \mu \, dg,$$

или эквивалентному проинтегрированному уравнению (5). *Тогда функция u в области G удовлетворяет уравнению Пуассона* $\Delta u = -4\pi\mu$.

Заметим сначала, что даже в случае, когда функция μ только непрерывна в G, тройной интеграл в формуле (4), деленный на R^2, при $R \to 0$ стремится к значению

$$\mu_0 \lim_{R\to 0} \frac{4\pi}{R^2} \int_0^R \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) r^2\, dr = \frac{4\pi}{6}\mu_0; \tag{15}$$

следовательно, предел

$$\Theta(u_0) = \lim_{R\to 0} \frac{6}{R^2}\left\{\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Omega_R} u\, d\Omega_R - u_0\right\} \tag{16}$$

также существует всюду в G и мы имеем

$$\Theta(u_0) = -4\pi\mu_0. \tag{17}$$

Если функция u имеет непрерывные вторые производные, то, как мы отмечали на стр. 278,

$$\Theta(u) = \Delta u. \tag{18}$$

Таким образом, наша теорема будет доказана, если мы сумеем показать, что функция u имеет непрерывные вторые производные. Мы докажем даже более общее утверждение.

Если функция u непрерывна в G, а μ — кусочно-непрерывно дифференцируема в G, и если для любого шара K, лежащего в G, функция u удовлетворяет соотношению средних значений (4) *или* (5), *то функция u имеет непрерывные вторые производные в G.*

Если функция u удовлетворяет соотношению (4), то мы действуем так же, как в частном случае $\mu \equiv 0$. Мы снова выбираем функцию $f(R)$, тождественно равную нулю для $R > a$ и имеющую производные достаточно высоких порядков, умножаем уравнение (4), справедливое для фиксированной точки P в подобласти G_a, на $4\pi R^2 f(R)$ и интегрируем в пределах от 0 до a. Это приводит к равенству

$$Cu_0 = \iiint_K uf(R)\, dg + \iiint_K \mu F(R)\, dg, \tag{19}$$

где

$$C = 4\pi \int_0^a R^2 f(R)\, dR,$$

а

$$F(r) = 4\pi \int_r^a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) R^2 f(R)\, dR =$$

$$= \frac{C}{r} - \frac{4\pi}{r}\int_0^r R^2 f(R)\, dR - 4\pi \int_r^a Rf(R)\, dR.$$

Если мы теперь положим

$$L(x, y, z) = f(\rho), \quad \text{где} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

и

$$H(x, y, z) = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^\rho R^2 f(R)\, dR + 4\pi \int_\rho^a R f(R)\, dR,$$

то при соответствующем выборе $f(R)$ функции L и H будут всюду иметь непрерывные производные до порядка N. Если центр шара K находится в точке (x, y, z), то мы получаем представление

$$\begin{aligned} Cu(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} L(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \\ - \iiint_G H(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\, \mu(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \\ + C \iiint_G \frac{\mu}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \end{aligned} \tag{20}$$

так как функция $f(r)$ и, следовательно, $F(r)$ тождественно обращаются в нуль для $r > a$.

Первые два интеграла в правой части имеют производные до порядка N. Третий интеграл есть потенциал пространственного распределения с плотностью μ и, согласно результатам § 1, п. 2, дважды непрерывно дифференцируем в G. Следовательно, сама функция u дважды непрерывно дифференцируема в G_a и поэтому удовлетворяет в G_a дифференциальному уравнению $\Delta u = -4\pi\mu$. Так как a можно выбрать сколь угодно малым, результат остается справедливым всюду внутри G.

Соответствующие теоремы справедливы в n-мерном пространстве и непосредственно вытекают из следующей теоремы, доказательство которой аналогично только что проведенному доказательству.

Если функция u непрерывна в G, а μ кусочно-непрерывно дифференцируема в G, и если для любого шара K, лежащего в G, функция u удовлетворяет соотношению (6′) *или* (7′) (*соответственно* (6) *или* (7) *для* $n = 2$), *то функция u дважды непрерывно дифференцируема в G.*

3. Уравнение Пуассона для потенциалов пространственных распределений. В § 1, п. 2 мы доказали, что для числа измерений $n = 3$ потенциал u распределения масс в области G с плотностью μ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u = -4\pi\mu$. Теперь будет дано другое доказательство, в котором применяется обратная теорема о среднем значении, сформулированная и доказанная на стр. 282, 283 предыдущего пункта.

Сначала мы предположим, что функция $\mu(x, y, z)$ кусочно-непрерывна в G, и рассмотрим потенциал

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_G \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r} dg \tag{21}$$

с плотностью μ, где $dg = d\xi\, d\eta\, d\zeta$. Временно мы предположим, что плотность μ продолжена на внешность области G и там $\mu = 0$. Кроме того, пусть P_0 — произвольная точка пространства, а K — произвольный шар радиуса R с центром в P_0.

Так как функция $u(x, y, z)$ всюду непрерывна, мы можем проинтегрировать по этому шару обе части равенства (21); в правой части при этом можно переменить порядок интегрирования. Мы получим

$$\iiint\limits_K u(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_G \mu(\xi, \eta, \zeta) F(\xi, \eta, \zeta; P_0)\, dg,$$

где $F(\xi, \eta, \zeta; P_0) = \iiint\limits_K \frac{dx\, dy\, dz}{r}$ — потенциал шара K с равномерным распределением единичной массы, взятый в точке (ξ, η, ζ). Поэтому

$$F(\xi, \eta, \zeta; P_0) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{r} & (r \geqslant R), \\ 2\pi\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) & (r \leqslant R); \end{cases} \tag{22}$$

r обозначает здесь расстояние от точки (ξ, η, ζ) до P_0.

Подстановка в интеграл функции F из формулы (22) дает

$$\iiint\limits_K u(\xi, \eta, \zeta)\, dg = \frac{4\pi}{3} R^3 \iiint\limits_{G^*} \frac{\mu}{r} dg + 2\pi \iiint\limits_K \left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) \mu\, dg, \tag{23}$$

где G^* — подобласть G, не лежащая в шаре K. Так как

$$\iiint\limits_{G^*} \frac{\mu}{r} dg = u_0 - \iiint\limits_K \frac{\mu}{r} dg,$$

то мы получаем уравнение

$$\frac{4\pi}{3} R^3 u_0 = \iiint\limits_K u\, dg - 2\pi \iiint\limits_K \left(R^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{R^3}{r}\right) \mu\, dg,$$

или

$$u_0 = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_K u\, dg + \frac{1}{2R^3} \iiint\limits_K \frac{(R - r)^2 (2R + r)}{r} \mu\, dg,$$

т. е. мы получили как раз уравнение средних значений (5).

Потенциал кусочно-непрерывного распределения масс для любого шара удовлетворяет соотношению средних значений (5), *а следовательно, и эквивалентному соотношению* (4).

Принимая во внимание результат, полученный на стр. 282, 283, мы можем сделать следующий вывод:

Если функция μ *непрерывна в* G, *то для потенциала* (21) *всюду в* G *существует предел*

$$\Theta(u) = \lim_{R\to 0} \frac{6}{R^2} \left\{ \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R - u_0 \right\}$$

и

$$\Theta(u) = -4\pi\mu. \tag{24}$$

Если функция μ *кусочно-непрерывно дифференцируема в* G, *то* $\Theta(u) = \Delta u$ *и, следовательно,* $\Delta u = -4\pi\mu$.

4. Теоремы о среднем значении для других эллиптических уравнений. Теоремы о среднем значении для уравнений Лапласа и Пуассона могут сразу быть получены из тождества

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R = u_0 + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{K_R} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \Delta u\, dg; \tag{25}$$

это тождество справедливо для непрерывных функций u, обладающих непрерывными первыми и кусочно-непрерывными вторыми производными. Вместо этого тождества мы легко можем получить другое, более общее, приводящее к разложению среднего значения

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R$$

в ряд Тейлора, причем $M(R)$ рассматривается как функция R, а центр P_0 считается фиксированным.

Мы начнем с того, что рассмотрим формулу Грина

$$Cu_0 = \iiint\limits_{K} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, dg, \tag{26}$$

где K — произвольный шар радиуса R с центром в P_0, а функция v имеет вид

$$v(r) = \frac{C}{4\pi r} + w(r); \tag{26'}$$

функция $w(r)$ дважды непрерывно дифференцируема при $r \leqslant R$, а на поверхности Ω_R шара имеем

$$v = \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{26''}$$

В качестве u мы можем взять любую функцию с непрерывными вторыми производными.

Если мы предположим, что в $K+\Omega_R$ функция u имеет непрерывные производные до порядка $2m+2$, то для всех $\nu \leqslant m$ будет справедливо тождество

$$C\,\Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K \left(\Delta^\nu u\,\Delta v - v\,\Delta^{\nu+1} u\right) dg. \tag{27}$$

Под $\Delta^\nu u$ мы подразумеваем ν-ю степень оператора Лапласа; например, $\Delta^1 u = \Delta u$, $\Delta^2 u = \Delta\,\Delta u$ и т. д.

Кроме того, пусть $v_1, v_2, \ldots$ — последовательность функций типа (26′), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\Delta v_{\nu+1} \equiv v''_{\nu+1} + \frac{2}{r}\,v'_{\nu+1} = v_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{28}$$

и граничным условиям (26″), с начальной функцией

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{R-r}{Rr}. \tag{29}$$

Легко проверить, что решениями этой рекуррентной системы являются функции

$$v_\nu = \frac{1}{4\pi\,(2\nu+1)!}\,\frac{(R-r)^{2\nu+1}}{Rr} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots); \tag{30}$$

все они имеют вид (26′) с $C_\nu = \dfrac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$.

Заменяя в формуле (27) v на v_ν, получаем

$$C_\nu\,\Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K \left(v_{\nu-1}\,\Delta^\nu u - v_\nu \Delta^{\nu+1} u\right) dg; \tag{31}$$

если мы просуммируем эти уравнения для $\nu = 1, 2, \ldots, m$, то будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{m} C_\nu\,\Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K \left(v_0\,\Delta u - v_m\,\Delta^{m+1} u\right) dg.$$

Учитывая (25) и (30), мы легко получаем, что

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega_R = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\,\Delta^\nu u_0 + {}$$
$$+ \frac{1}{4\pi\,(2m+1)!}\iiint\limits_{K_R} \frac{(R-r)^{2m+1}}{Rr}\,\Delta^{m+1} u\,dg,$$

где $\Delta^0 u_0$ надо понимать как u_0. Это тождество справедливо для любой $(2m+2)$ раз непрерывно дифференцируемой функции u и любого шара K, содержащегося в G [1]).

Если функция u бесконечно дифференцируема в G и если остаточный член стремится к нулю при возрастании m, то формула (32) дает разложение в бесконечный ряд

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Omega_R}\int u \, d\Omega_R = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!} \Delta^\nu u_0. \tag{33}$$

Это имеет место, например, в случае, когда $\Delta^m u$ тождественно обращается в нуль в G, начиная с некоторого m. Тогда разложение (33) обрывается при $\nu = m - 1$ и мы можем сделать следующее утверждение.

Любое решение дифференциального уравнения $\Delta^m u = 0$, регулярное в G, т. е. имеющее в G непрерывные производные до порядка $2m$, удовлетворяет соотношению средних значений

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Omega}\int u \, d\Omega = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!} \Delta^\nu u_0 \tag{34}$$

для произвольной сферы, содержащейся в G.

Например, решения уравнения $\Delta\Delta u = 0$ удовлетворяют соотношению средних значений

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Omega}\int u \, d\Omega = u_0 + \frac{R^2}{6} \Delta u_0. \tag{35}$$

Другой пример дают решения уравнения $\Delta u + cu = 0$. Здесь

$$\Delta^{m+1} u = (-1)^{m+1} c^{m+1} u,$$

и так как остаточный член стремится к нулю при возрастании m, мы имеем

$$M(R) = u_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu c^\nu}{(2\nu+1)!} R^{2\nu} = u_0 \frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}.$$

Для любого решения уравнения $\Delta u + cu = 0$, регулярного в G, и произвольной сферы, лежащей в G, справедливо соотношение средних значений

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Omega}\int u \, d\Omega = u_0 \frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}. \tag{36}$$

---

[1]) В связи с этим см. Пицетти [1].

Аналогичные рассуждения можно провести на плоскости и, вообще, в n-мерном пространстве.

Так, на плоскости мы получаем тождество

$$M(R) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Omega} u\, ds = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Delta^{\nu} u_0}{(\nu!)^2} + \int_K\int v_m \Delta^{m+1} u\, dg, \quad (37)$$

где функции v_m определяются рекуррентными формулами

$$v_{\nu+1} = \int_r^R \rho v_\nu(\rho) \log \frac{\rho}{r}\, d\rho, \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r}. \quad (37')$$

В n-мерном пространстве мы имеем

$$M(R) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega}\int u\, d\Omega = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Delta^{\nu} u_0}{\nu!\, \Gamma\left(\nu + \frac{n}{2}\right)} + \int\int_K\int v_m \Delta^{m+1} u\, dg, \quad (38)$$

где функции $v_m(r)$ задаются рекуррентными формулами

$$v_{\nu+1} = \frac{1}{(n-2)\, r^{n-2}} \int_r^R \rho v_\nu(\rho) (\rho^{n-2} - r^{n-2})\, d\rho, \qquad v_0 = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right). \quad (38')$$

Как и раньше, эти формулы приводят к следующей теореме.

Любое решение дифференциального уравнения $\Delta u + cu = 0$, регулярное в G, для произвольной сферы, лежащей в G, удовлетворяет соотношению средних значений

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega}\int u\, d\Omega = u_0 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\, \Gamma\left(\nu + \frac{n}{2}\right)} = u_0 \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{(n-2)/2}(R\sqrt{c})}{\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{(n-2)/2}} = u_0 p(R). \quad (39)$$

Здесь $J_\nu(x)$ есть ν-я функция Бесселя.

В частности, на плоскости мы имеем

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\Omega} u\,ds = u_0 J_0(R\sqrt{c}). \tag{40}$$

Для нечетных n множитель $p(R)$ при u_0 в формуле (39) может быть выражен через производные функции $\sin R\sqrt{c}/R\sqrt{c}$. Действительно (см. т. I, гл. VII, § 2, п. 7, стр. 413),

$$p(R) = \frac{(-1)^{(n-3)/2}\,2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d^{(n-3)/2}}{d(R^2c)^{(n-3)/2}}\,\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}.$$

§ 4. Краевая задача

1. Предварительные замечания. Непрерывная зависимость от граничных значений и от области. Мы возвращаемся к главной задаче нашей теории — к *краевой задаче*. Мы доказали уже *единственность* решения этой задачи, т. е. следующую теорему.

Существует не более одной гармонической функции в G, принимающей на Γ заданные непрерывные значения.

Аналогично мы показали, что решение краевой задачи непрерывно зависит от граничных значений.

Если f_ν — последовательность непрерывных функций, равномерно сходящаяся к f на Γ, то последовательность гармонических функций u_ν, принимающих на границе значения f_ν, сходится внутри G к гармонической функции u, принимающей граничные значения f.

Доказательство немедленно получается из теорем сходимости § 2, п. 3. Поэтому достаточно доказать разрешимость краевой задачи для специальных граничных значений на Γ, например, для полиномов относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$; затем решения этой задачи для произвольных непрерывных граничных значений можно получить с помощью предельного перехода. В соответствии с соображениями, развитыми в § 2, п. 1, достаточно построить *функцию Грина K*.

При построении функции Грина мы ограничимся случаями $n=2$ и $n=3$ и получим следующий результат.

В случае $n=2$ функцию Грина можно построить для любой области G, граница Γ которой состоит из конечного числа непрерывных кривых, таких, что каждая точка Γ является концом прямолинейного отрезка, остальные точки которого лежат вне G.

В случае $n=3$ функцию Грина можно построить для любой области G, граница Γ которой состоит из конечного

числа непрерывных поверхностей, таких, что любая точка P является вершиной некоторого тетраэдра, остальные точки которого лежат вне G.

В томе III мы снова рассмотрим краевую задачу, но при существенно более общих предположениях и с другой точки зрения.

Следующее ниже рассуждение применимо к ограниченной области G. Для неограниченной области G, не совпадающей со всем пространством, мы получим функцию Грина, преобразовав область G в ограниченную область G' с помощью инверсии относительно некоторого круга или сферы. На основании теоремы из § 1, стр. 244, функция Грина для G сразу получается тогда из функции Грина для G'.

Чтобы упростить построение функции Грина для более общих областей, мы сначала докажем некоторые утверждения о непрерывной зависимости функции Грина от области. Мы рассмотрим монотонную последовательность подобластей G_ν, сходящуюся к G и такую, что G_ν содержит $G_{\nu-1}$ в качестве подобласти и, кроме того, любая фиксированная внутренняя точка области G содержится во всех G_ν, начиная с некоторого ν. Тогда справедлива следующая теорема:

а) *Если существует функция Грина K_ν для каждой области G_ν и существует функция Грина K для предельной области G, то последовательность K_ν равномерно сходится к K в $G+\Gamma$* [1]).

Однако большее значение имеет более общая теорема о сходимости для случая, когда заранее не известно, что существует функция Грина для предельной области G. Тогда функцию Грина K можно построить с помощью соответствующего предельного перехода. Обоснование этого дает следующее уточнение теоремы а).

б) *Если монотонная последовательность областей G_ν сходится к G и для каждой области G_ν существует функция Грина K_ν, то последовательность функций K_ν сходится в G к некоторой функции*

$$K = \lim_{\nu \to \infty} K_\nu;$$

эта предельная функция является функцией Грина для области G, если выполняются некоторые условия.

Эти условия таковы: в случае двух измерений *для каждой граничной точки P области G должен существовать конечный прямолинейный отрезок, лежащий вне G и имеющий один из концов*

---

[1]) В части области G, не принадлежащей G_ν, функция K_ν продолжается, например, тождеством $K_\nu \equiv 0$.

в точке P[1]); в случае трех измерений *для каждой граничной точки P должен существовать тетраэдр, лежащий вне G и имеющий вершину в точке P.*

Чтобы доказать теоремы а) и б), мы сделаем сначала следующее замечание. Функции K_ν, а также функции $K_\nu - \gamma$, которые получаются из них вычитанием фундаментального решения γ и являются в G регулярными гармоническими функциями, образуют монотонную последовательность. Действительно, если ν так велико, что особая точка Q лежит в G_ν, то для $\mu > \nu$ граничные значения гармонической функции $K_\mu - K_\nu$, регулярной в G_ν, неотрицательны на Γ_ν. Следовательно, эти функции неотрицательны всюду в G_ν.

Кроме того, по той же причине в случае а) мы имеем $K_\nu \leqslant K$, а следовательно, и $K_\nu - \gamma \leqslant K - \gamma$. В случае б) существует по крайней мере один шар, лежащий целиком вне G. Если $\widehat{K}$ — функция Грина для области, внешней по отношению к этому шару, то $K_\nu \leqslant \widehat{K}$ и $K_\nu - \gamma \leqslant \widehat{K} - \gamma$. Итак, в обоих случаях монотонно возрастающая последовательность $K_\nu - \gamma$ ограничена и, следовательно, сходится в G. Предельная функция $H = \lim\limits_{\nu\to\infty} K_\nu$, конечно, неотрицательна в G и, согласно теоремам сходимости из § 2, п. 3, функция $H - \gamma$ гармонична в G.

Для теоремы а) мы из неравенства $K_\nu \leqslant K$ заключаем, что $H \leqslant K$. Но так как функция K принимает на границе нулевые значения, то же справедливо и для предельной функции H. Другими словами, $H = K$ есть функция Грина для предельной области G.

Чтобы доказать теорему б), мы заранее воспользуемся фактом, который будет доказан в п. 2, а именно тем, что можно построить функцию Грина для внешности прямолинейного отрезка на плоскости и для внешности тетраэдра в пространстве. Пусть теперь K^* — функция Грина для такого отрезка (или для такого тетраэдра), который соответствует некоторой граничной точке P_0 области G, как это описано в условиях теоремы б). Для любой точки G наши рассуждения сразу дают

$$0 \leqslant H(P) \leqslant K^*(P);$$

так как $K^*(P_0) = 0$, то отсюда так же, как и раньше, следует, что граничное значение функции H в точке P_0 равно нулю. Таким образом, согласно нашим предположениям, функция H имеет всюду

[1]) Заметим, что для $n = 2$ наши рассуждения без труда можно распространить на тот более общий случай, когда точки можно достичь не с помощью отрезка, а с помощью ломаной, состоящей из конечного или счетного числа отрезков. В этом случае граница может быть произвольной жордановой кривой. Однако мы опускаем здесь это обобщение, так как краевая задача для такой общей границы будет решена прямым способом в т. III.

нулевые граничные значения и, следовательно, является функцией Грина для предельной области G.

Мы подчеркиваем тот факт, что эти рассуждения относятся не только к односвязным областям, но без всякого изменения могут быть применены к *многосвязным областям.*

В следующем пункте мы покажем с помощью *альтернирующего метода Шварца,* как можно, умея строить функцию Грина K для довольно специальных областей $G_\nu = G$, распространить это построение на более общие области G, монотонно приближая их областями G_ν.

2. Решение краевой задачи с помощью альтернирующего метода Шварца. Простой сходящийся процесс позволяет нам решить краевую задачу для области B, если она является объединением двух пересекающихся областей G и G' (или любого конечного числа

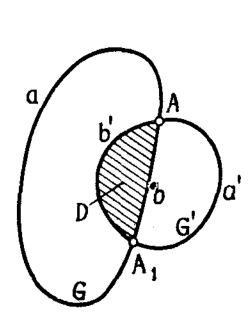


Рис. 14.

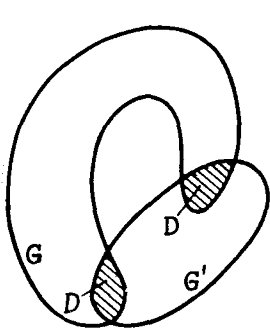


Рис. 15.

таких областей), для которых краевая задача предполагается разрешимой при любых непрерывных граничных значениях. Предположим, что границы Γ и Γ' областей G и G' состоят из конечного числа частей, обладающих непрерывно изменяющимися касательными или касательными плоскостями. Далее мы предположим, что границы областей G и G' пересекаются под углом, отличным от нулевого, и в таких точках Γ и Γ', которые не являются угловыми или коническими точками и не лежат на ребрах. Например, так как краевая задача для круга и полуплоскости или для шара и полупространства может быть решена с помощью интеграла Пуассона, то альтернирующий метод сразу позволяет решить задачу для областей, которые являются объединением конечного числа пересекающихся кругов и полуплоскостей на плоскости, или шаров и полупространств в пространстве. Построение такого объединения B показано на рис. 14 и 15.

Рисунок 15 показывает, как из односвязных областей могут получаться многосвязные и как в соответствии с этим может быть решена краевая задача для многосвязных областей.

Так как для этого метода не существенно, состоит ли пересечение из одной или из нескольких отдельных областей, мы рассмотрим случай, изображенный на рис. 14, где области G и G' имеют только одну общую область D. Пусть граница Γ области G состоит из частей a и b, причем b принадлежит области G'. Пусть a' и b' аналогичным образом определены для G'. Мы предположим, что на границе $a+a'=\Lambda$ области B заданы непрерывные граничные значения, по абсолютной величине меньшие некоторой константы M.

1) Альтернирующий метод состоит в следующем. Мы непрерывным образом дополняем граничные значения, заданные на a, задавая на b произвольные значения, меньшие M по абсолютной величине, и решаем краевую задачу для области G с таким образом определенными непрерывными значениями на Γ. Решение этой задачи u_1 принимает на b' некоторые значения, которые вместе со значениями, заданными на a', дают непрерывные значения на Γ'. С этими значениями мы решаем краевую задачу в области G' и получаем функцию u'_1. Эта функция принимает на b значения, которые вместе со значениями на a снова дают непрерывные значения на границе G. Обозначим решение соответствующей краевой задачи через u_2. Продолжая этот альтернирующий процесс, мы получим последовательность гармонических функций $u_1, u_2, \ldots$ в G и соответствующую последовательность $u'_1, u'_2, \ldots$ в G'. При этом

$$\text{на } b' : u'_\nu = u_\nu, \quad \text{следовательно, } u_{\nu+1} - u_\nu = u'_{\nu+1} - u'_\nu;$$
$$\text{на } b : u'_\nu = u_{\nu+1}, \quad \text{следовательно, } u_{\nu+1} - u_\nu = u'_\nu - u'_{\nu-1}.$$

Теперь мы утверждаем, что функции u_ν в G и u'_ν в G' равномерно сходятся к гармоническим функциям u и u', которые совпадают в пересечении D областей G и G'. Эти предельные функции во всей области B определяют некоторую регулярную гармоническую функцию, которая является решением краевой задачи для B.

Доказательство опирается на следующую лемму.

Пусть при указанных выше предположениях относительно G и G' функция v, регулярная и гармоническая в G, обращается в нуль на a и удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant |v| \leqslant 1$$

на b. Тогда существует такая положительная постоянная $q<1$, зависящая только от формы областей G и G', что v

удовлетворяет неравенству

$$|v| \leqslant q$$

всюду на b'.

Конечно, соответствующее утверждение справедливо и для G'. Ясно, что в качестве q мы можем взять постоянную, которая годится для обеих областей.

Мы докажем эту лемму в конце пункта; но сначала мы воспользуемся ею для завершения доказательства сходимости альтернирующего процесса. Через M_ν мы обозначим максимум модуля

$$|u_{\nu+1} - u_\nu| = |u'_{\nu+1} - u'_\nu| \quad \text{на} \quad b',$$

а через M'_ν — максимум модуля

$$|u_{\nu+1} - u_\nu| = |u'_\nu - u'_{\nu-1}| \quad \text{на} \ b.$$

Если в качестве функции v, о которой говорится в лемме, мы возьмем $(u_{\nu+1} - u_\nu)/M'_\nu$ в области G, то сразу получим

$$M_\nu \leqslant qM'_\nu.$$

Аналогично мы находим, что

$$M'_\nu \leqslant qM_{\nu-1}$$

и, следовательно,

$$M_\nu \leqslant q^2 M_{\nu-1}.$$

Поэтому величины M_ν и M'_ν стремятся к нулю, так как их можно мажорировать членами геометрической прогрессии со знаменателем $q^2 < 1$.

Это сразу влечет за собой равномерную сходимость ряда

$$u_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_{\nu+1} - u_\nu) = \lim_{n\to\infty} u_n = u$$

в $G + \Gamma$ и соответствующего ряда

$$u'_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u'_{\nu+1} - u'_\nu) = \lim_{n\to\infty} u'_n = u'$$

в $G' + \Gamma'$. В соответствии с этим функции u и u' являются гармоническими в областях G и G' и принимают на a и a' соответственно заданные граничные значения. Для пересечения D областей G и G', ограниченного кривыми b и b', мы имеем $u'_\nu - u_\nu = 0$ на b', в то время как на b разность $u'_\nu - u_\nu = u'_\nu - u'_{\nu-1}$ равномерно стремится к нулю. Поэтому предельные функции u и u' совпадают в D и в совокупности определяют в B регулярную гармоническую функцию, которая является решением краевой задачи.

Если мы конечное число раз применим этот метод, то мы получим следующую теорему.

Пусть G — объединение конечного числа пересекающихся областей $G_1, G_2, \ldots, G_n$, кусочно-гладкие границы которых пересекаются под углами, отличными от нулевых, и не пересекаются в угловых точках или по ребрам; тогда краевая задача разрешима для G, если она разрешима для каждой отдельной области G_ν.

В частности, краевая задача разрешима для любой области, которая может быть покрыта конечным числом кругов и полуплоскостей или шаров и полупространств. Например, если область G состоит из всей плоскости, за исключением отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, то мы можем рассматривать ее как объединение четырех полуплоскостей

$$x < 0, \quad x > 1, \quad y < 0, \quad y > 0$$

и решить краевую задачу отдельно для каждой из этих полуплоскостей с помощью интеграла Пуассона. Альтернирующий метод тогда немедленно дает решение для G. В трехмерном пространстве то же самое справедливо для внешности тетраэдра, которую можно рассматривать как объединение четырех полупространств.

Если мы заметим, что произвольную область можно рассматривать как предел монотонной последовательности областей G_ν, каждая из которых состоит из конечного числа кругов или шаров, то мы можем воспользоваться теоремой б) п. 1 и получить следующую общую теорему.

На плоскости функция Грина, а, следовательно, и решение краевой задачи, существует для любой области G, каждой точки границы которой можно достичь с помощью прямолинейного отрезка, лежащего вне G. В пространстве то же самое справедливо для любой области G, такой, что каждая точка ее границы является вершиной тетраэдра, все остальные точки которого лежат вне G[1]).

2) Доказательство леммы. Чтобы доказать лемму, мы сначала рассмотрим двумерный случай (см. рис. 16). Составим

---

[1]) Заметим попутно, что описанный нами альтернирующий метод, проведенный для нескольких областей, которые при повторении процесса циклически чередуются, по существу совпадает со знаменитым *методом выметания Пуанкаре* (см. многочисленные описания в литературе). Разница состоит в том, что Пуанкаре сразу предполагал наличие счетного количества кругов или шаров, которые чередуются в определенном порядке при повторении процесса. Но данное здесь доказательство отличается от обычного обоснования метода выметания.

потенциал двойного слоя по дуге b с плотностью 1, т. е. выражение

$$w(P)=w(x,\ y)=\int\limits_b \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu}\,ds,$$

которое представляет собой угол, заметаемый радиусом-вектором, направленным из точки P области G в точку границы, которая пробегает дугу b. Эта функция, регулярная и гармоническая внутри G, имеет непрерывные граничные значения на граничных дугах a и b. Когда точка границы приближается к конечной точке A вдоль дуги a, соответствующие граничные значения функции w стремятся к пределу R_{A_-}, равному углу между секущей AA_1 и касательной в точке A, направленной к дуге b. С другой стороны, соответствующий предел R_{A_+} граничных значений вдоль b равен углу между секущей AA_1 и касательной в точке A, но теперь касательная направлена к дуге a. Это приводит к соотношению

$$R_{A_+}-R_{A_-}=\pi.$$

Рис. 16.

Если к граничной точке A подходить изнутри области вдоль любого луча, образующего угол α с касательной в точке A, направленной к дуге b, то получится граничное значение, равное линейной комбинации

$$\frac{\alpha}{\pi}R_{A_+}+\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)R_{A_-}.$$

Из этой формулы мы, наконец, видим, что для произвольной последовательности точек P_ν области G, сходящейся к точке A, соответствующие значения функции $w(P_\nu)$ могут иметь только такие предельные значения, которые лежат между R_{A_+} и R_{A_-}. Аналогичные утверждения, конечно, можно сделать и относительно другого конца дуги A_1.

Теперь мы рассмотрим функцию ρ, определенную на границе $\Gamma=a+b$ и принимающую постоянные значения π на b и 0 на a. Пусть $\overline{w}$ — граничные значения функции w; тогда разность $\overline{w}-\rho$ является непрерывной функцией на Γ. Согласно предположению, в области G существует регулярная гармоническая функция Ω, принимающая эти граничные значения.

Мы определим функцию

$$S(P)=\frac{w-\Omega}{\pi};$$

она ограничена в $G+\Gamma$, регулярна и гармонична в G. На a она принимает граничное значение 0, а на b — граничное значение 1. Но из предыдущих замечаний, касающихся функции w, видно, что если мы приближаемся к точке A или A_1 изнутри, то функция S может иметь только предельные значения, лежащие между 0 и 1, а если мы приближаемся к этим точкам вдоль луча, образующего угол α с касательной, то мы получаем граничное значение, равное α/π, т. е. значение, меньшее 1.

В частности, если мы приближаемся к точкам A и A_1 по части b' границы области G', то предельное значение угла α равно одному из углов β или β_1, под которыми дуга b' пересекает границу Γ. Всюду на b' функция S удовлетворяет неравенству

$$S \leqslant q < 1.$$

Действительно, в противном случае существовала бы последовательность точек P_ν на b', такая, что $S(P_\nu) \to 1$. Так же, как при доказательстве теоремы о максимуме и минимуме, можно показать, что эта последовательность не может иметь предельной точки на внутренней части дуги b'. Но A или A_1 также не могут быть предельными точками, ибо, как мы видели, предельные значения в этих точках соответственно равны $\beta/\pi < 1$ и $\beta_1/\pi < 1$.

С помощью функции v из нашей леммы мы теперь построим разность $S - v = \Lambda$ и покажем, что $\Lambda \geqslant 0$; граничные значения этой функции равны нулю на a и безусловно неотрицательны на b. Эта функция регулярна и гармонична в G, следовательно, она не может принимать отрицательные значения в области G, равные $\inf \Lambda$ в G; она не имеет отрицательных предельных значений во внутренних точках дуг a и b. При приближении к концам A и A_1 разность Λ имеет те же предельные значения, что и S, и, следовательно, они должны быть между нулем и единицей. Поэтому $S - v \geqslant 0$ всюду в замкнутой области G и, в частности,

$$v \leqslant S \leqslant q$$

на дуге b'. То же рассуждение, примененное к сумме $S+v$, дает неравенство $S+v \geqslant 0$ в G; объединяя эти результаты, мы получаем на b'

$$|v| \leqslant S \leqslant q < 1.$$

Это доказывает нашу лемму.

Достоинством этого доказательства является то, что оно может быть непосредственно перенесено на случай трех и большего числа измерений. Чтобы сделать это, мы берем в качестве w потенциал двойного слоя с плотностью, равной на границе 0 или 1.

3. Метод интегральных уравнений для плоских областей с достаточно гладкой границей. Другой метод решения краевой

задачи в случае двух измерений для некоторых специальных областей, который существенно отличается от альтернирующего метода и от метода выметания Пуанкаре, — это метод интегральных уравнений Фредгольма. Он является обобщением ранее известного метода Неймана, применимого для выпуклых областей. Краевая задача сводится к уравнению Фредгольма второго рода. Мы не будем излагать этот метод в самых общих предположениях и будем считать, что граница Г может быть параметрически представлена с помощью функций $x(t)$ и $y(t)$, обладающих непрерывными производными до четвертого порядка включительно. Мы будем предполагать, что параметр t есть длина дуги на кривой Г.

Искомая гармоническая функция $u(x, y)$ будет отыскиваться в виде

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\, dt \qquad \left(\gamma = \log \frac{1}{r}\right), \tag{1}$$

т. е. в виде потенциала двойного слоя с плотностью $\sigma(s)$ на границе Г. Этот интеграл имеет смысл даже тогда, когда точка $P(x, y)$ лежит на границе Г; пусть этой точке соответствует значение s длины дуги, т. е. $P = (x(s), y(s))$. Тогда для любой точки $x(s)$, $y(s)$ на границе Г написанный выше интеграл принимает вид

$$u(x(s), y(s)) = u(s) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial \nu}\, dt, \tag{2}$$

причем выражение

$$K(s, t) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial \nu} = \frac{\cos \alpha}{\pi r} = \frac{1}{\pi} \frac{d\varphi}{dt} \tag{3}$$

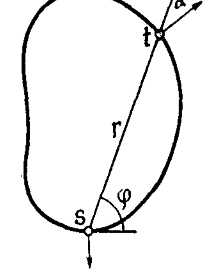


Рис. 17.

(углы α и φ показаны на рис. 17) имеет предел при $t \to s$, равный $(1/2\pi)/k(s)$, где $k(s)$ — кривизна граничной кривой в точке s, в силу наших предположений, дважды непрерывно дифференцируемая. Тогда можно видеть, что само ядро $K(s, t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка.

Мы предположим, что $\sigma(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция длины дуги t. Если точка P приближается к граничной точке P_0 изнутри области, то, согласно теореме о скачке[1]), полученной в § 1,

[1]) В § 1, п. 4 предполагалось, что функция σ дважды непрерывно дифференцируема, но подробное исследование данного там доказательства показывает, что для получения применяемого здесь частного результата было бы достаточно предположить, что $\sigma(t)$ только один раз непрерывно дифференцируема (этого достаточно для установления характера разрыва самого потенциала двойного слоя, но не его нормальной производной).

п. 4, потенциал $u(P)$ стремится к граничному значению $u_i(P_0) = u(P_0) - \pi\sigma(P_0)$, или, в силу (2), к значению

$$u_i(s) = -\pi \int\limits_\Gamma K(s, t)\sigma(t)dt - \pi\sigma(s). \tag{4}$$

Представляется разумным провести эти рассуждения в обратном порядке и определить плотность $\sigma(s)$ из интегрального уравнения

$$\sigma(s) = -\int\limits_\Gamma K(s, t)\sigma(t)\,dt - \frac{1}{\pi} f(s), \tag{5}$$

где функция $f(s) = u_i(P_0)$ — это заданные граничные значения. В силу п. 1 мы можем без ограничения общности предположить, что граничная функция $f(s)$ непрерывно дифференцируема. Если $\sigma(s)$ — решение этого интегрального уравнения, то потенциал

$$u = \int\limits_\Gamma \sigma(t)\frac{\partial\gamma}{\partial\nu}\,dt$$

внутри G удовлетворяет уравнению Лапласа. Вследствие дифференцируемости функций $f(s)$ и $K(s, t)$ решение $\sigma(s)$ также будет непрерывно дифференцируемым. Другими словами, выполняются условия теоремы о скачке (в случае плоскости) из § 1, п. 4. Поэтому при приближении к Г потенциал u стремится к граничным значениям

$$-\pi\int\limits_\Gamma K(s, t)\sigma(t)\,dt - \pi\sigma(s) = f(s).$$

Таким образом, мы можем решить поставленную краевую задачу, если мы можем решить интегральное уравнение (5).

Теперь к интегральному уравнению (5) можно применить *теоремы Фредгольма*, доказанные в т. I, гл. III. В терминах, применяемых в нашей задаче, эти теоремы утверждают, что для всякой непрерывно дифференцируемой функции $f(s)$ существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $\sigma(s)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (5), если соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\sigma(s) = -\int\limits_\Gamma K(s, t)\sigma(t)\,dt \tag{6}$$

имеет лишь тривиальное решение $\sigma \equiv 0$. Другими словами, доказательство существования для нашей специальной области будет завершено, если мы сможем показать, что $\lambda = -1$ не является собственным значением однородного уравнения

$$\lambda v(s) = \int\limits_\Gamma K(s, t)v(t)\,dt. \tag{7}$$

В случае выпуклой границы с непрерывной кривизной, имеющей длину L, этот факт является непосредственным следствием соотношения

$$\int_{\Gamma} K(s, t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{L} \frac{d\varphi}{dt}\, dt = 1$$

и неравенства

$$K(s, t) = \frac{\cos\alpha}{\pi r} \geqslant 0,$$

которое следует из выпуклости границы. Действительно, если M есть максимум $|v|$ на Γ, то мы имеем

$$|\lambda|\, |v| \leqslant M \int_{\Gamma} K(s, t)\, dt = M$$

и, следовательно, в точке, где $|v| = M$, получаем

$$|\lambda|\, M \leqslant M.$$

Равенство имеет место только тогда, когда v — константа. Если $v \not\equiv 0$, то $M \neq 0$ и, следовательно,

$$|\lambda| \leqslant 1,$$

причем $|\lambda| = 1$ только для постоянных v. Но собственное значение, соответствующее собственной функции $v = \text{const}$, есть $\lambda = +1$, так что мы получаем неравенство $-1 < \lambda \leqslant 1$, исключающее значение $\lambda = -1$.

В случае невыпуклой границы мы воспользуемся тем, что как мы уже замечали, ядро $K(s, t)$ в силу наших предположений дважды непрерывно дифференцируемо. Из этого следует, что тем же свойством обладают все собственные функции уравнения

$$\lambda v(s) = \int_{\Gamma} K(s, t)\, v(t)\, dt.$$

Но если $\sigma(s)$ есть решение уравнения (6), то вследствие соотношений на скачке из § 1, п. 4 потенциал

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial\gamma}{\partial\nu}\, dt \tag{8}$$

принимает изнутри граничные значения

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial\gamma(s, t)}{\partial\nu}\, dt - \pi\sigma(s) = 0$$

на кривой Г и, в силу теоремы единственности, тождественно обращается в нуль внутри G. Таким образом, производная функции $u(x, y)$ по внутренней нормали к Г также тождественно обращается в нуль.

Теперь мы рассмотрим потенциал (8) вне области G. Так как в нашем случае выполняются условия теоремы о скачке для случая плоскости (см. § 1, п. 4), то на Г мы получаем внешние граничные значения

$$u_e(s) = \int_\Gamma \sigma(t) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial \nu} dt + \pi\sigma = 2\pi\sigma(s),$$

и, так как функция $\sigma(s)$ дважды непрерывно дифференцируема, производная по внешней нормали $\partial u_e/\partial\nu$ равна 0. Но на бесконечности функция ru, как легко видеть из формулы (1), ограничена; поэтому u тождественно обращается в нуль также и вне G (это устанавливается с помощью леммы на стр. 325) и, в частности, принимает внешние граничные значения

$$u_e(s) = 2\pi\sigma(s) = 0$$

на Г. Таким образом, всякое решение уравнения (6) тождественно равно нулю: $\lambda = -1$ не является собственным значением однородного интегрального уравнения

$$\lambda v(s) = \int_\Gamma K(s, t) v(t) dt.$$

Теперь мы довели до конца доказательство существования решения краевой задачи для нашей специальной области G.

Аналогичные рассуждения применимы в пространственном случае, хотя там мы должны заменить ядро $\partial(1/r)/\partial\nu$, не интегрируемое с квадратом, на интегрируемое с квадратом итерированное ядро.

Надо, однако, заметить, что, несмотря на изящество метода интегральных уравнений, он дает худшие результаты, чем метод, рассмотренный ранее, так как даже наличие на границе обыкновенного угла приводит к особенностям в ядре K, что делает невозможным непосредственное применение теории Фредгольма.

4. Замечания о граничных значениях. Разработанные в п. 1 и 2 методы дают решение краевой задачи для любой плоской области, ограниченной произвольной жордановой кривой. Однако в случае трех или большего числа измерений дело обстоит сложнее, так как существуют области, для которых краевая задача неразрешима в сильном смысле; другими словами, нельзя ожидать, что при заданных непрерывных граничных значениях эти граничные значения всегда будут приниматься во всех точках границы. Иллюстрацией этого факта служит пример, построенный Лебегом.

Сначала мы вычислим потенциал массы, сосредоточенной на отрезке оси x между точками 0 и 1 с линейной плотностью $\tau(x)=x$:

$$u(x, y, z)=\int_0^1 \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2+\rho^2}}=A(x, \rho)-2x\log\rho,$$

где $\rho^2=y^2+z^2$ и

$$A(x, \rho)=\sqrt{(1-x)^2+\rho^2}-\sqrt{x^2+\rho^2}+ \\ + x\log\left|\left(1-x+\sqrt{(1-x)^2+\rho^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+\rho^2}\right)\right|.$$

Если к началу координат подходить со стороны положительных значений x, то функция $A(x, \rho)$ стремится к 1; однако предел выражения $-2x\log\rho$ существенно зависит от пути, по которому мы приближаемся. Например, если мы приближаемся к началу координат по поверхности $\rho=|x|^n$, то $-2x\log\rho$ стремится к нулю для всех n и u стремится к значению 1. С другой стороны, если мы возьмем поверхность $\rho=e^{-c/2x}$ $(c>0,\ x>0)$, имеющую „бесконечно тонкое" острие в начале координат, то $-2x\log\rho$ стремится к c и, следовательно, потенциал u стремится к $1+c$. Это значит, что все эквипотенциальные поверхности $u=1+c$ $(c>0)$ пересекаются в начале координат; кроме того, все производные функции $\rho=f(x)$, вращением графика которой вокруг оси x образуются эти поверхности, обращаются в нуль в начале координат. Такая поверхность $u=1+c$ изображена на рис. 18.

Если мы теперь возьмем в качестве основной области G область, ограниченную эквипотенциальной поверхностью $u=1+c$ $(c>0)$ и будем решать внешнюю краевую задачу для G с граничными значениями $u=1+c$, то решение будет задаваться указанной выше функцией $u(x, y, z)$[1]). Но из наших рассуждений следует, что если мы будем соответствующим способом приближаться к началу координат, то решение может стремиться к любому значению между 1 и $1+c$.

С помощью инверсии относительно сферы

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$$

и некоторого параллельного переноса мы можем из этого примера получить соответствующий пример для внутренней задачи. Область G отображается в область G' пространства ξ, η, ζ, имеющую в точке $\xi=-\frac{1}{2}$, $\eta=0$, $\zeta=0$ бесконечно тонкое острие, направленное внутрь

[1]) Здесь применяется принцип максимума для гармонических в G функций, ограниченных в G и непрерывных в $G+\Gamma$ всюду, за исключением конечного числа точек на границе; см. Петровский [1], изд. 3, стр. 261. — *Прим. ред.*

(см. рис. 19). Граничные значения $1+c$ переходят в граничные значения

$$v=\frac{1+c}{2r} \qquad \left(r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right),$$

непрерывные на Γ'; решением внутренней краевой задачи для области G' с этими граничными значениями является регулярная в G' гармоническая функция

$$v(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\frac{1}{2r}\,u\left(\frac{\xi}{4r^2}+\frac{1}{2},\ \frac{\eta}{4r^2},\ \frac{\zeta}{4r^2}\right).$$

Приближаясь к точке $\xi=-\frac{1}{2}$, $\eta=0$, $\zeta=0$ по соответствующему пути, мы можем снова получить в пределе для v любое значение между 1 и $1+c$.

В томе III для случая трех или большего числа измерений мы заменим требование, чтобы функция точно принимала заданные граничные значения в каждой точке границы, более слабым требованием, чтобы *граничные значения принимались в среднем*; это требование также достаточно для того, чтобы решение определялось однозначно. Только в частном случае двух измерений из этого требования следует, что граничные значения принимаются в каждой точке границы. Но граничные значения принимаются в точном смысле и производные непрерывны вплоть до границы, если граница и граничные значения достаточно гладки (см. замечание о более общих эллиптических уравнениях на стр. 345).

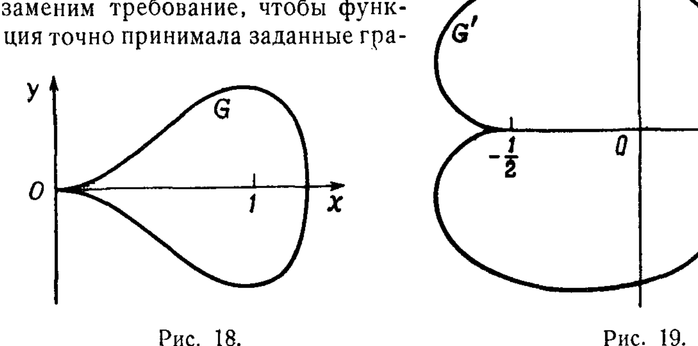


Рис. 18. Рис. 19.

4а. Емкость [1]) и выполнение граничных условий. Винер в работе [2] заметил, что вопрос о том, принимаются ли граничные зна-

[1]) Современное изложение этого вопроса можно найти в книге Брело [1]. [См. также Келдыш М. В., *Успехи матем. наук*, вып. VIII (1941), 171—232. — *Прим. ред.*]

чения, связан с понятием емкости, имеющим также самостоятельное значение.

Чтобы определить емкость замкнутой поверхности Γ в n-мерном пространстве (мы можем при этом подразумевать случай $n=3$), мы будем рассматривать Γ как внутреннюю границу оболочки S с внешней границей Γ^* и предположим, что для S решена краевая задача с граничными значениями $u=1$ на Γ и $u=0$ на Γ^*. Независимо от того, существуют ли производные функции u на границе, интеграл по любой гладкой поверхности Γ', лежащей внутри S и гомологичной Γ и Γ^*, вида

$$\int_{\Gamma'} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \varkappa$$

существует; он не зависит от выбора Γ', в чем легко убедиться, применив формулу Грина к внутренней оболочке, ограниченной двумя поверхностями Γ'. Величина $\varkappa$ определяет „емкость“ S относительно Γ, Γ^*; если Γ^* есть бесконечно удаленная точка, то $\varkappa$ называется просто емкостью Γ. Это понятие сохраняет смысл даже для обобщенных решений в указанном выше смысле; Γ может быть, в частности, конечным куском поверхности, который превращается в замкнутое многообразие, если отдельно считать каждую его сторону.

Физически $\varkappa$ означает полный электрический заряд, который надо распределить на проводнике Γ, чтобы на Γ образовался постоянный потенциал 1, а потенциал на Γ^* оставался бы равным нулю.

Теорема Винера характеризует те точки P границы области G, в которых решение не всегда принимает граничные значения, если краевая задача решается в обобщенном смысле [1]).

Такие „исключительные точки“ в примере п. 4 соответствуют концам острия или, проще, точкам отрезка, который направлен внутрь области и искусственно считается частью границы.

На малой сфере радиуса λ вокруг точки P мы рассмотрим часть H_λ, лежащую в G и ограничивающую вместе с Γ малую подобласть G, содержащую P в качестве граничной точки. Емкость множества H_λ в описанном выше смысле обозначим через $\varkappa_\lambda$. Теорема Винера утверждает, что *граничная точка P является исключительной тогда и только тогда, когда емкость* $\varkappa_\lambda$

---

[1]) Такую обобщенную постановку задачи можно дать, если рассматривать G как монотонный предел областей G_n с гладкой границей, состоящей из регулярных точек, таких, что область G_{n+1} содержит область G_n и что любая замкнутая подобласть области G содержится во всех областях G_n, кроме, может быть, конечного их числа. Тогда можно показать, что решения u^n соответствующих областям G_n краевых задач сходятся к гармонической функции u в G и что u не зависит от способа приближения G областями G_n. Таким образом определенную функцию u естественно считать решением краевой задачи для G (см. Винер [1]). (См. также статью М. В. Келдыша, указанную в примечании на стр. 304. — *Прим. ред.*)

достаточно быстро стремится к нулю вместе с λ, а именно когда сходится ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_{\lambda}^{2} \quad \text{для} \quad \lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}.$$

Напомним, что в § 4, п. 1 были приведены достаточные условия регулярности граничной точки.

5. Метод субгармонических функций Перрона. В этом пункте мы рассмотрим изящный метод, принадлежащий Перрону [1]. Метод не содержит конструктивных элементов и является чистым доказательством существования решения. Он связан с существенными общими понятиями и в той форме, в которой он рассматривается здесь, имеет то преимущество, что его можно обобщать на другие эллиптические уравнения второго порядка (см. замечания в § 7).

Чтобы найти функцию, гармоническую в заданной ограниченной области G, непрерывную в ее замыкании $G+\Gamma$ и принимающую заданные непрерывные граничные значения φ на границе Γ, Перрон применяет понятие субгармонических и супергармонических функций, которые являются для пространств высших размерностей обобщением вогнутых и выпуклых функций одного переменного, так же как гармонические функции являются обобщением линейных функций одного переменного (т. е. решений одномерного уравнения Лапласа). Сейчас мы определим эти функции, а также некоторые другие основные понятия.

Пусть v — непрерывная функция в области D, а C — шар в D. (C на протяжении всего этого пункта будет обозначать шар в D.) Через $M_C[v]$ мы будем обозначать однозначно определенную непрерывную функцию, гармоническую внутри C и равную v в остальной части области D. Мы говорим, что функция v *субгармоническая* (*супергармоническая*) в D, если для любого шара C в D функция v удовлетворяет неравенству

$$v \leqslant M_C[v] \quad (v \geqslant M_C[v]).$$

Например, любая функция w, удовлетворяющая соотношению $\Delta w \geqslant 0$ — субгармоническая, что следует из принципа максимума в § 6, п. 4.

Субгармонические (супергармонические) функции обладают следующими очевидными свойствами. Во-первых, из того, что $v \geqslant 0$, следует $M_C[v] \geqslant 0$ (так как минимум функции $M_C[v]$ в C достигается на границе C); следовательно, если $v \geqslant w$, то $M_C[v] - M_C[w] = M_C[v-w] \geqslant 0$. Во-вторых, если функция v субгармоническая (супергармоническая), то $-v$ супергармоническая (субгармоническая); и, наконец, любая линейная комбинация субгармонических (супергармонических) функций с неотрицательными коэффициентами также является субгармонической (супергармонической) функцией.

Нам понадобятся также некоторые дополнительные свойства, которые будут сформулированы только для субгармонических функций; аналогичными свойствами обладают и супергармонические функции, поскольку изменение знака превращает супергармоническую функцию в субгармоническую.

1. Принцип максимума для субгармонических функций: *Если v — субгармоническая функция в замкнутой области D и имеет точку максимума внутри D, то $v = \text{const}$*; отсюда следует, что если функция v субгармонична в некоторой замкнутой области и непрерывна в ее замыкании, то v принимает свое максимальное значение на границе области.

Чтобы доказать это, мы рассмотрим функцию $w = M_C[v]$, где C — шар в области D с центром в точке максимума P. Обозначим через V максимум функции v на границе C; мы имеем $V \leqslant v(P) \leqslant w(P)$. Таким образом, оказывается, что гармоническая в C функция w имеет внутреннюю точку максимума; из этого следует (как мы показали в § 1, п. 3, стр. 25), что $w = \text{const}$ в C, так что $v = w = v(P)$ на границе C. Так как это рассуждение можно провести для любого шара меньшего радиуса с центром в P, то мы имеем $v = v(P)$ всюду в C. Это показывает, что множество точек максимума в области D открыто. Но в силу непрерывности v это множество также и замкнуто в D и, так как область D связна, оно совпадает со всей D. Из этих рассуждений следует свойство

1′. *Если функция v непрерывна и субгармонична в окрестности любой точки области, то она субгармонична во всей области*, т. е. субгармоничность является локальным свойством. Чтобы убедиться в этом, мы сначала заметим, что, выбирая достаточно малые шары C, мы можем распространить доказательство принципа максимума, данное выше, на функции, которые субгармоничны только локально. Пусть теперь C — любой шар в области; положим $w = M_C[v]$. Тогда функция $v - w$ локально субгармонична в $\bar{C}$ и, согласно нашему замечанию, удовлетворяет принципу максимума. Так как $v - w = 0$ на границе C, то $v \leqslant w$ в C, из чего следует субгармоничность функции v.

2. *Если $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — субгармонические функции в области D, то функция $v = \max(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ также субгармонична.* Заметим, что для любого шара C из D, согласно предыдущему замечанию,

$$v_i \leqslant M_C[v_i] \leqslant M_C[v], \qquad i = 1, \ldots, m,$$

так что $v \leqslant M_C[v]$.

3. *Если функция v субгармонична в D, то функция $w = M_C[v]$ также субгармонична в D.* Пусть C' — произвольный шар в D. Нам надо показать, что

$$w = M_C[v] \leqslant M_{C'}[w].$$

Несомненно, это справедливо, если шар C' лежит либо целиком в C, либо целиком вне C. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда C' находится частично внутри, а частично вне C. Если P — точка области $C'-C$ (заштрихованная область на рис. 20), то в точке P

$$w = M_C[v] = v \leqslant M_{C'}[v] \leqslant M_{C'}[w],$$

так как $v \leqslant w$. Предположим теперь, что P принадлежит пересечению C и C'. В этой области функции w и $M_{C'}[w]$ гармоничны, а на границе $w - M_{C'}[w] \leqslant 0$ в силу только что полученных результатов для заштрихованной области. Согласно принципу максимума, это неравенство справедливо для гармонических функций во всей области.

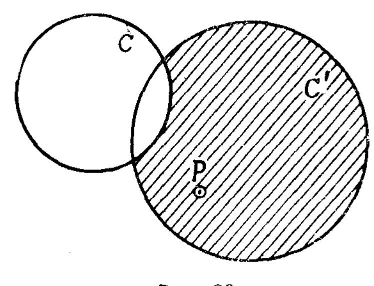


Рис. 20.

Краевая задача будет решена с помощью специальных субгармонических и супергармонических функций.

Функция v, непрерывная в $G+\Gamma$, называется *нижней* (*верхней*) функцией, если она субгармонична (супергармонична) в G и если на границе Γ области G имеем $v \leqslant \varphi$ ($v \geqslant \varphi$), где φ — заданные граничные значения. Ясно, что постоянные $\min \varphi$ и $\max \varphi$ являются соответственно нижней и верхней функциями.

Свойства субгармонических функций можно распространить на нижние функции. Мы сформулируем следующую лемму.

Лемма. *Пусть F — класс всех нижних функций. Тогда*

а) *все функции класса F равномерно ограничены сверху (величиной* $\max \varphi$);

б) *если* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *принадлежат* F, *то функция* $\max(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *также принадлежит* F;

в) *если v принадлежит F и C — любой шар в G, то функция $M_C[v]$ также принадлежит F.*

Заметим далее, что, в силу принципа максимума, ни одна нижняя функция ни в одной точке G не может быть больше никакой верхней функции.

Метод решения краевой задачи опирается на следующие соображения. Предположим, что w есть решение. Тогда, если v — произвольная нижняя функция, то $v \leqslant w$ всюду в $G+\Gamma$. Это следует из того, что функция $v-w$ субгармонична в G и неположительна на Γ, так как для субгармонических функций справедлив принцип максимума. Кроме того, сама функция w является нижней функцией. Поэтому, если мы введем функцию u, в каждой точке $G+\Gamma$ равную верхней грани значений всех нижних функций в этой точке, то

$w=u$. Метод Перрона состоит в доказательстве того, что таким образом определенная функция u (которая всегда существует) гармонична в G, непрерывна и совпадает с φ в „регулярных" точках границы (они будут определены ниже).

Теорема. *Функция u, определенная в $G+\Gamma$ формулой*

$$u(P)=\sup_{v\in F} v(P),$$

гармонична в G.

Доказательство[1]). Пусть K — шар в области G, а K_1 — концентрический шар половинного радиуса. Мы докажем, что функция u гармонична в K_1.

Выберем подмножество F^* множества F, состоящее из функций, равномерно ограниченных снизу и обладающих свойствами б и в. (Любое подмножество множества F обладает свойством а.) Например, мы можем построить подмножество F^*, выбрав в качестве нижней грани некоторую функцию v_1 из F и составляя $\max(v, v_1)$ для всех функций v из F. Ясно, что

$$u(P)=\sup_{v\in F^*} v(P).$$

Далее, пусть Q_j — плотная в K последовательность точек, и пусть $v_{j,k}$ — функции из F^*, такие, что

$$0\leqslant u(Q_j)-v_{j,k}(Q_j)\leqslant \frac{1}{k} \qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Кроме того, для всех точек $G+\Gamma$ мы положим

$$v_k=M_k[\max(v_{1,k},\ v_{2,k},\ \ldots,\ v_{k,k})].$$

Функции v_k принадлежат F^* и $v_k\to u$ во всех точках Q_j. Чтобы показать, что функция u гармонична в K_1, согласно теореме Харнака (см. § 2, п. 3), достаточно показать, что функции v_k сходятся к u равномерно в K_1. Заметим сначала, что равномерная ограниченность абсолютных величин функций v_k, гармоничных внутри K, влечет за собой, в силу теоремы на стр. 274, равномерную ограниченность их первых производных в K_1 и, следовательно, равностепенную непрерывность функций v_k в K_1. Согласно сформулированной ниже лемме $v_k\to u$ равномерно в K_1.

Лемма. *Если последовательность равностепенно непрерывных функций, определенных на ограниченном множестве A, сходится на некотором плотном подмножестве из A, то она равномерно сходится на всем множестве A.*

---

[1]) Этот вариант доказательства был предложен В. Литтманом.

Чтобы доказать это, действуют так же, как в последней части доказательства теоремы Арцела (см. т. I, гл. II, § 2, п. 1, стр. 56).

Таким образом, мы установили, что функция u гармонична в G. Теперь мы хотим найти условия на границу Γ области G, достаточные для того, чтобы функция u была непрерывна в $G+\Gamma$ и принимала заданные граничные значения. С этой целью мы введем определение *барьера* w_Q для точки Q границы области G: барьером называется функция, супергармоническая в G, непрерывная в $G+\Gamma$ и положительная всюду в $G+\Gamma$, за исключением точки Q, где она обращается в нуль. Граничная точка области G, для которой существует такой барьер, называется *регулярной*.

Заметим, что граничная точка Q регулярна, если для нее существует „локальный барьер", т. е. функция W_Q, непрерывная в пересечении $(G+\Gamma)\cap S$ области $G+\Gamma$ и некоторого шара S с центром в точке Q, супергармоническая внутри $G\cap S$ и положительная в $(G+\Gamma)\cap S$, за исключением точки Q, где она обращается в нуль. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим концентрический с S шар S_1 половинного радиуса; функция W_Q достигает в $(G+\Gamma)\cap(S-S_1)$ положительный минимум m. Положим

$$w_Q=\begin{cases} \min\{m, W_Q\} & \text{в} \quad S\cap(G+\Gamma), \\ m & \text{в} \quad (G+\Gamma)-S. \end{cases}$$

Ясно, что функция w_Q имеет все свойства барьера, кроме, может быть, супергармоничности. Однако легко видеть, что w_Q супергармонична в двух перекрывающихся областях, так как она равна постоянной m в $G-\bar{S}_1$ (где $\bar{S}_1$ — замыкание S_1) и является минимумом двух супергармонических функций в $S\cap G$. Таким образом, функция w_Q локально супергармоническая; из 1′ следует, что она супергармоническая.

Мы докажем, что *в каждой регулярной точке Q функция u непрерывна и $u(Q)=\varphi(Q)$*. Так как функция φ непрерывна, то для любого $\varepsilon>0$ можно найти настолько большую положительную константу k, что функции

$$v(P)=\varphi(Q)-\varepsilon-kw_Q(P)$$

и

$$V(P)=\varphi(Q)+\varepsilon+kw_Q(P)$$

являются нижней и верхней функцией соответственно. Так как никакая нижняя функция не может быть больше верхней функции, мы имеем

$$\varphi(Q)-\varepsilon-kw_Q(P)\leqslant u(P)\leqslant\varphi(Q)+\varepsilon+kw_Q(P)$$

для всех точек P области $G+\Gamma$, т. е.

$$|u(P)-\varphi(Q)| \leqslant \varepsilon + k w_Q(P).$$

Когда точка P стремится к Q, тогда $w_Q(P)\to 0$; таким образом, мы имеем

$$|u(P)-\varphi(Q)| < 2\varepsilon,$$

если точка P достаточно близка к Q.

Чтобы завершить построение решения краевой задачи, мы выведем некоторые условия, достаточные для существования барьеров. Сначала мы рассмотрим случай, когда число измерений n больше 2. Во всякой граничной точке Q, для которой существует шар S, имеющий с областью $G+\Gamma$ единственную общую точку Q, мы можем взять в качестве барьера гармоническую функцию

$$w_Q(P)=\frac{1}{R^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}},$$

где R — радиус шара S, а r — расстояние от точки P до центра S. Ясно, что эта функция удовлетворяет всем условиям.

Для $n=2$ мы можем построить барьер во всякой граничной точке Q, которая является концом дуги кривой A, целиком, за исключением точки Q, лежащей вне $G+\Gamma$, и не имеющей точек самопересечения.

Пусть C — круг радиуса меньшего, чем 1, с центром в Q, настолько малый, что его граница пересекает A. Предположим, что точки кривой A упорядочены, начиная с Q, с помощью некоторой параметризации; пусть z_0 — первая точка A, лежащая на границе C, а A' — часть A, состоящая из точек, „предшествующих“ z_0. Тогда область $C-A'$ односвязна и функция

$$w_Q(P)=-\operatorname{Re}\frac{1}{\log z}=-\frac{\log\rho}{|\log\rho|^2+\theta^2}$$

(ρ, θ — полярные координаты точки P относительно Q) однозначна в $(G+\Gamma)\cap C$ и является там локальным барьером.

Таким образом, *задача Дирихле при $n=2$ разрешима, если область G обладает тем свойством, что каждая ее граничная точка Q является концом дуги кривой, не имеющей самопересечений и, за исключением точки Q, лежащей вне $G+\Gamma$* (в частности, внутренность любой замкнутой жордановой кривой является такой областью G[1])); *для $n>2$ задача безусловно разрешима, если для каждой граничной точки Q области G существует шар, имеющий с $G+\Gamma$ только одну общую точку Q.*

---

[1]) См. Ньюмен [1], гл. VI, § 4.

§ 5. Приведенное волновое уравнение. Рассеяние.

1. Предмет изложения. Мы рассмотрим „приведенное волновое уравнение" (см. также гл. III, § 3, п. 2)

$$L[U] = \Delta U + \omega^2 U = 0 \tag{1}$$

с неизвестной функцией $U(x_1, x_2, x_3)$ (мы ограничимся случаем трех пространственных переменных x). Уравнение (1) является уравнением эллиптического типа и его можно изучать так же, как и уравнение Лапласа. Оно получается из волнового уравнения

$$\Delta u - u_{tt} = 0, \tag{2}$$

если мы предполагаем, что волна $u(x, t)$ есть простое гармоническое колебание по t с частотой ω, т. е.

$$u_{tt} = -\omega^2 u.$$

Тогда u имеет вид

$$u = V_1(x)\cos\omega t + V_2(x)\sin\omega t,$$

где $L[V_1] = L[V_2] = 0$. Вводя функцию

$$U = V_1 + iV_2,$$

Рис. 21.

мы получаем следующее представление для действительной волны u через комплексное решение типа „стоячей волны":

$$u = \operatorname{Re}[U(x)\,e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2}(Ue^{-i\omega t} + \overline{U}e^{i\omega t}).$$

Здесь U — общее комплексное решение уравнения (1). Мы будем также рассматривать более общие уравнения

$$\Delta U + \omega^2 U + gU = 0, \tag{1a}$$

$$\Delta u - u_{tt} + gu = 0, \tag{2a}$$

причем будем предполагать, что коэффициент g не зависит от t и обращается в нуль вне области R с гладкой границей B, так что вне R выполняются уравнения (1) и (2) (см. рис. 21).

Уравнение (1) встречалось в томе I как уравнение колебаний. В этом параграфе рассматривается совершенно другое физическое явление, подчиняющееся тому же уравнению, а именно *рассеяние* бегущих волн. Математическая задача рассеяния будет рассматриваться в п. 3 после некоторых подготовительных замечаний в п. 1 и 2. При исследовании бегущих волн применение комплексных обозначений является существенным, так как эти волны нельзя представить с помощью отдельных членов вида $U\cos\omega t$ или $U\sin\omega t$ с действительной функцией U.

Мы введем расстояние $r = |x - x'|$ между точкой x и точкой-параметром x' и вспомним введенные в гл. III „фундаментальные решения" (в несколько иных обозначениях)

$$K(x, x') = K(r) = -\frac{e^{i\omega r}}{4\pi r} \quad \text{и} \quad \overline{K}(r) = -\frac{e^{-i\omega r}}{4\pi r}.$$

K соответствует расходящейся сферической волне, а $\overline{K}$ — сходящейся:

$$u = -\frac{e^{-i\omega(t-r)}}{4\pi r}, \quad u = -\frac{e^{-i\omega(t+r)}}{4\pi r},$$

причем поверхности постоянной фазы — сферы с центром в x' — передвигаются с единичной скоростью или вовне, к бесконечности, или внутрь, по направлению к центру.

Основное свойство фундаментальных решений таково: для любой дифференцируемой функции $f(x')$ интегралы

$$J(x) = \int\int\int f(x') K(r)\, dx' \quad \text{или} \quad \int\int\int f(x') \overline{K}(r)\, dx'$$

$$(dx' = dx_1'\, dx_2'\, dx_3'),$$

взятые по области переменных x', содержащей точку x, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$L[J] = f(x).$$

Доказательство такое же, как в случае $\omega = 0$, т. е. в случае уравнения Лапласа, и может быть опущено.

При больших r фундаментальные решения K и $\overline{K}$ удовлетворяют соотношениям

$$\left| \frac{\partial K}{\partial r} - i\omega K \right| = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \left| \frac{\partial \overline{K}}{\partial r} + i\omega \overline{K} \right| = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{4'}$$

где, как обычно, символ $O(1/r^2)$ обозначает функцию, убывающую не медленнее $1/r^2$.

Согласно А. Зоммерфельду, условия такого типа характеризуют излучение, соответствующее расходящейся или сходящейся волне.

2. Условие излучения Зоммерфельда. Любое комплекснозначное решение U уравнения (1), регулярное вне некоторой поверхности B, может быть единственным образом разложено в сумму

$$U = U_1 + U_2,$$

где U_1 — регулярное решение уравнения (1) во всем пространстве, а U_2 удовлетворяет *условию излучения Зоммерфельда, соответствующему расходящейся волне*, вида[1])

$$\lim_{\rho\to\infty} \iint\limits_{r=|x-x'|=\rho} \left|\frac{\partial U_2}{\partial r} - i\omega U_2\right|^2 dS_\rho = 0; \tag{4}$$

dS_ρ обозначает элемент поверхности большой сферы S_ρ радиуса ρ с центром в фиксированной точке x'. Формула (4) будет обоснована ниже. Соответственно, если в формуле (4) i заменить на $-i$, то мы получим условие, характеризующее *излучение, соответствующее сходящейся волне.*

Для доказательства мы рассмотрим большую сферу S_ρ радиуса ρ с центром в точке x', содержащую поверхность B. Для точек x, принадлежащих кольцу D_ρ между B и S_ρ, решение U может быть представлено так же, как гармоническая функция (см. § 1). Мы имеем

$$U(x) = \iint\limits_{S_\rho} \left(U\frac{\partial K}{\partial n} - K\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS_\rho - \iint\limits_{B} \left(U\frac{\partial K}{\partial n} - K\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS = U_1 + U_2,$$

где

$$K = -\frac{1}{4\pi R} e^{i\omega R}, \quad R = |x - x''|,$$

причем точка x'' пробегает соответственно поверхности S_ρ и B, а $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование по внешней нормали в пространстве x''. Вне поверхности B обе подинтегральные функции являются решениями уравнения (1) как функции x, так как K и $\partial K/\partial n$ удовлетворяют этому уравнению. Очевидно, что так же, как и в случае гармонических функций, функция U_1 регулярна всюду внутри S_ρ. Кроме того, U_1 не зависит от радиуса ρ, так как рассматриваемое решение U и слагаемое U_2 не зависят от ρ. Поэтому функция U_1 регулярна во всем пространстве.

Чтобы показать, что функция U_2 удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда (4), мы заметим, что если точка x' фиксирована, точка x'' лежит на B и $x - x' = r\eta$, $x'' - x' = \sigma\zeta$, $|\eta| = |\zeta| = 1$, то

$$R = |x - x''| = \sqrt{r^2 - 2r\sigma\eta\zeta + \sigma^2} = r - \sigma\eta\zeta + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$K = -\frac{e^{ir\omega}}{4\pi r} e^{-i\omega\eta(x''-x')} + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial K}{\partial n} = -i\omega K\eta\frac{\partial x''}{\partial n} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

[1]) Этот вид условия, предложенный Магнусом, более слабый, чем предшествующая формулировка (4'); однако он оказывается достаточным для характеристики излучения, соответствующего расходящейся волне.

Как и ранее, символ $O(f(\lambda))$ обозначает величину, порядок которой не выше $f(\lambda)$ для больших положительных λ, т. е. величину, модуль которой не превышает $cf(\lambda)$ с некоторой константой c. Следовательно,

$$U_2 = -\frac{e^{ir\omega}}{4\pi r}\psi(\eta) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{5}$$

где „множитель формы“

$$\psi(\eta) = \iint\limits_B e^{-i\omega\eta(x''-x')}\left(\frac{\partial U}{\partial n} + i\omega\eta\frac{\partial x''}{\partial n}U\right)dS$$

— регулярная аналитическая функция единичного вектора η. Для $\partial U_2/\partial r$ получается аналогичное выражение, совпадающее с тем, которое возникает при формальном дифференцировании формулы (5) по r. Поэтому для U_2 выполняется условие Зоммерфельда даже в более сильной форме, а именно

$$\frac{\partial U_2}{\partial r} - i\omega U_2 = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

равномерно по η.

Чтобы обосновать тот факт, что условие Зоммерфельда (4) характеризует излучение, направленное вовне, мы покажем, что если выполняется условие (4), то через поверхность большой сферы S_ρ проходит положительный поток энергии во внешнем направлении.

Энергия E, содержащаяся в области Σ с границей S в момент t, определяется выражением

$$E = \frac{1}{2}\iiint\limits_\Sigma \left(u_t^2 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2\right)dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Применяя формулу Грина и учитывая уравнение (2), мы легко получаем

$$\frac{dE}{dt} = \iint\limits_S u_t\frac{\partial u}{\partial n}\,dS.$$

Мы берем в качестве Σ кольцо между большой сферой S_0 и еще большей сферой S_ρ; тогда интеграл

$$F(t) = \iint\limits_{S_\rho} u_t\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

представляет *поток энергии* через поверхность S_ρ во внешнем направлении, а $\int\limits_t^{t+2\pi/\omega} F(t)\,dt = \Gamma$ — полный поток через S_ρ за период.

Учитывая, что $u=\frac{1}{2}(Ue^{-i\omega t}+\overline{U}e^{i\omega t})$, мы легко получаем, что

$$\Gamma=\frac{\pi i}{2}\iint\limits_{S_\rho}\left(\overline{U}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial\overline{U}}{\partial n}\right)dS.$$

Этот поток не зависит от ρ; это можно сразу установить, применив формулу Грина для кольца между S_ρ и $S_{\rho'}$ к двум решениям U и $\overline{U}$ приведенного волнового уравнения.

Предположим теперь, что условие Зоммерфельда (4) для функции U записано в виде

$$\iint\limits_{S_\rho}(U_n\overline{U}_n+\omega^2U\overline{U}+i\omega(\overline{U}U_n-U\overline{U}_n))\,dS\to 0$$

или

$$\frac{2\omega}{\pi}\Gamma+\iint\limits_{S_\rho}(|U_n|^2+\omega^2|U|^2)\,dS\to 0 \quad \text{при} \quad \rho\to\infty;$$

здесь U_n обозначает $\partial U/\partial n$. Так как величина Γ не зависит от ρ, то мы можем сделать вывод, что $\Gamma\leqslant 0$, т. е. за период энергия теряется, или, во всяком случае, не увеличивается, за счет потока через S_ρ, направленного вовне. Таким образом, условие (4) характеризует явление излучения, направленного вовне.

Наконец, мы докажем, что *разложение функции U на всюду регулярное решение и решение, удовлетворяющее условию Зоммерфельда, единственно*. Достаточно доказать, что всюду регулярное решение U, удовлетворяющее условию (4), тождественно равно нулю. Пусть U такое решение. Тогда $\Gamma=0$, так как U и $\overline{U}$ — регулярные решения внутри S_ρ. Следовательно,

$$\iint\limits_{S_\rho}(|U_n|^2+\omega^2|U|^2)\,dS\to 0 \quad \text{при} \quad \rho\to\infty.$$

Тогда для любой точки x, лежащей внутри сферы S_ρ с центром в x', мы имеем

$$|U(x)|=\left|\iint\limits_{S_\rho}(UK_n-KU_n)\,dS\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\iint\limits_{S_\rho}(|U_n|^2+|U^2|)\,ds\right)^{1/2}\left(\iint\limits_{S_\rho}(|K_n|^2+|K|^2)\,dS\right)^{1/2}\to 0$$

$$\text{при } \rho\to\infty,$$

так как K и K_n имеют порядок $1/\rho$. Следовательно, $U(x)=0$.

3. Рассеяние. Явление рассеяния может быть описано следующим образом. Дана „входящая“ волна, т. е. всюду регулярное решение $U_1(x) = \chi(x)$ уравнения (1). (Например, входящая волна может быть просто плоской волной $e^{i\omega(\alpha x)}$ или пучком волн, полученным из плоской волны с помощью интегрирования по координатам единичного вектора α в пределах некоторого телесного угла.) Входящая волна U_1 подвергается изменению из-за наличия некоторого препятствия, порождающего *рассеянную волну* U_2, и в результате получается волна $U = U_1 + U_2$. Препятствие можно задать с помощью одного из двух условий: а) на границе B задается условие, такое, как $U = 0$ или $\partial U/\partial n = 0$, а решение рассматривается только на и вне B; б) препятствие задается с помощью члена g в уравнении (2а) или (1а), который обращается в нуль вне B. В случае б) решение рассматривается во всем пространстве x.

В обоих случаях решение $U = U_1 + U_2$ отличается от заданной первоначально входящей волны $U_1 = \chi(x)$, которая считается известной; дополнительный член U_2 учитывает действие препятствия. Кроме того, мы требуем, чтобы компенсирующая волна U_2 была расходящейся рассеянной волной, т. е. удовлетворяла условию Зоммерфельда (4). Нахождение U_2 для заданной входящей волны $U_1 = \chi$ есть математическая задача рассеяния.

Мы вкратце остановимся на ее решении, основанном на представлении решений уравнений (1) и (1а), описанном в п. 1.

В случае а) мы должны определить функцию U_2 вне B с помощью граничных условий, если на B известна функция $U_1 = \chi$.

В случае б) мы должны найти функцию U_2 из уравнения (1а).

Задача сразу сводится к интегральному уравнению Фредгольма. В случае а) это уравнение связывает значения $U = U_2$ на границе B и значения нормальной производной $U_n = \partial U/\partial n$ на границе B. Интегральное уравнение получается из формулы, справедливой для точек x, *лежащих на* B,

$$\frac{1}{2} U_2 = \int_B\int (U_2 K_n - K(U_2)_n)\, dS,$$

причем либо величина

$$U_2 = U - U_1 = U - \chi,$$

либо нормальная производная

$$(U_2)_n = U_n - \chi,$$

задается на B, а вторая величина подлежит определению.

В случае б) интегральное уравнение для функции U_2 получается непосредственно:

$$U_2(x) = \chi(x) - \int_R\int g(x') K(x' - x)\, U(x')\, dx',$$

или

$$U_2(x) = G(x) + \iint\limits_R K^*(x, x') U_2(x') dx',$$

где ядро K^* равно

$$K^*(x, x') = g(x') K(x - x'),$$

а свободный член равен

$$G(x) = \chi(x) + \iint\limits_R \chi(x') g(x') K(x - x') dx'.$$

В соответствии с теорией, изложенной в т. I, гл. IV, § 3, п. 8, это интегральное уравнение для рассеянной волны U_2 можно свести к следующей вариационной задаче: найти экстремум функционала относительно функции φ

$$J(\varphi) = \iint g\varphi^2 dx' + \iint g(x) g(x') K(x - x') \varphi(x) \varphi(x') dx\, dx' -$$
$$- 2 \iint g(x) g(x') \varphi(x) dx,$$

или к эквивалентным ей задачам. Такое сведе́ние оказывается очень полезным при численном решении задач рассеяния[1]).

Наконец, легко видеть, что мы могли бы также рассмотреть задачу, в каком-то смысле дополнительную к задаче рассеяния входящей волны за счет излучения: предположим, что задана сходящаяся волна U_2', удовлетворяющая условию Зоммерфельда. Тогда задача состоит в том, чтобы найти регулярную расходящуюся волну U_1', возникающую на препятствии R или в результате наличия члена g. Математически это означает, что надо разложить заданное решение U в сумму $U = U_2' + U_1'$, где отдельные слагаемые удовлетворяют указанным условиям.

Так как заданное решение U уравнения (1) может быть разложено каждым из этих способов, то мы приходим к задаче об определении получающейся в результате рассеяния расходящейся волны U_1', если известна сходящаяся волна U_2'.

---

[1]) Множитель формы $\overline{\psi}(\eta)$ (см. п. 2) можно было бы легко охарактеризовать при помощи аналогичного интегрального уравнения или вариационной задачи.

Подробности об этих вариационных задачах и многочисленные практические приложения см. в работах Швингера [1, 2], а также Липпмана и Швингера [1].

§ 6. Краевые задачи для более общих эллиптических уравнений. Единственность решения

Хотя уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ типично для эллиптических уравнений, построение более общей теории даже для уравнений второго порядка потребовало бы большой дополнительной работы и вышло бы за пределы этой книги; кроме того, эта теория еще не развита полностью. Поэтому мы отсылаем читателя к соответствующей литературе[1]), а здесь ограничимся кратким изложением некоторых основных фактов, относящихся к краевой задаче и построению частных решений. В третьем томе мы снова рассмотрим теорию линейных эллиптических задач с более общей точки зрения, в связи с вариационным исчислением. Теперь мы рассмотрим задачу о единственности: при каких условиях решение краевой задачи определяется однозначно?

1. Линейные дифференциальные уравнения. Пусть $L[u] = 0$ — эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L[u] = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu \equiv M[u] + cu = 0, \qquad (1)$$

где $u_{ik} = \partial^2 u/\partial x_i \, \partial x_k$, $u_i = \partial u/\partial x_i$. Пусть коэффициенты $a_{ik} = a_{ki}$, b_i, c — непрерывные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в ограниченной области G n-мерного пространства R_n. Квадратичная форма

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xi_i \xi_k$$

предполагается положительно определенной относительно параметров ξ во всех точках x области G. Тогда мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема единственности. *Если $c \leqslant 0$, то для уравнения*

$$L[u] \equiv M[u] + cu = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu = 0 \qquad (c \leqslant 0) \qquad (1')$$

существует не более одного решения, имеющего в G непрерывные производные до второго порядка включительно, непрерывного в $G + \Gamma$ и принимающего заданные граничные значения

---

[1]) См. ссылки в примечании к стр. 242. В частности, книга Миранды [1] содержит подробную и обширную библиографию.

на границе области G[1]). Другими словами, решение уравнения (1′), равное нулю на Γ, тождественно обращается в нуль в G.

Сначала мы докажем, что *если дважды непрерывно дифференцируемая функция* u *имеет максимум во внутренней точке* P, *то в этой точке* $M[u] \leqslant 0$. *Отсюда следует, что если к тому же* $c(P) < 0$ *и* $u(P) > 0$, *то* $L[u] < 0$ *в точке* P. (Более сильную формулировку принципа максимума см. в п. 4.)

Действительно, если функция u имеет максимум в точке P, то все первые производные u_i в этой точке обращаются в нуль, а матрица вторых производных

$$u_{ik}(P) = b_{ik}$$

является матрицей неположительной квадратичной формы. Таким образом, в точке P сумма $M[u]$ равна $S = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}b_{ik}$, т. е. следу произведения двух матриц (a_{ik}) и (b_{ik}). Этот след не может быть положительным. Действительно, если мы ортогональным преобразованием приведем матрицу (a_{ik}) к диагональному виду (p_i), $p_i > 0$, а матрицу (b_{ik}) тем же самым преобразованием приведем к виду (β_{ik}), то значение величины S не изменится и мы будем иметь

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i \beta_{ii}.$$

Так как матрица (β_{ik}) так же, как (b_{ik}), является матрицей неположительной квадратичной формы, то $\beta_{ii} \leqslant 0$ и, следовательно, $S \leqslant 0$. Это доказывает наше утверждение.

Предположим теперь, что u есть решение уравнения $L[u] = 0$, равное нулю на Γ, и что $c < 0$. Применяя наш результат к функциям u и $-u$, мы убедимся, что функция u не может достигать в G ни положительного максимума, ни отрицательного минимума; вместе с условием $u = 0$ на Γ это приводит к выводу, что *u тождественно обращается в нуль в G.*

Случай $c \leqslant 0$ можно свести к случаю $c < 0$ с помощью следующего приема, предложенного Пикаром. Положим

$$u = z(x)\,v(x)$$

и получим для функции v дифференциальное уравнение вида

$$z \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}v_{ik} + z \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i + v\left(cz + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i\right) = 0, \qquad (2)$$

[1]) Если условие $c \leqslant 0$ не выполняется, то мы не можем, вообще говоря, рассчитывать на единственность, что сразу видно, если рассмотреть уравнение $\Delta u + cu = 0$ в случае, когда c есть одно из положительных собственных значений, соответствующих граничному условию $u = 0$.

где β_i — некоторые функции точки, непрерывные в области G. Если в качестве z мы выберем функцию

$$z = C - e^{\mu x_1},$$

то получим

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} v_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i + c^* v = 0, \tag{3}$$

где

$$c^* = c - \frac{1}{z} (a_{11}\mu^2 + b_1\mu) e^{\mu x_1}.$$

Поскольку $a_{11} > 0$, мы можем подобрать постоянные C и μ таким образом, чтобы всюду в G было $c^* < 0$ и $z > 1$. Из ранее полученных результатов вытекает, что функция v, а следовательно, и $u = zv$, тождественно обращается в нуль в G. Это завершает доказательство нашей теоремы единственности.

2. Нелинейные уравнения. Теорему единственности для решений уравнения (1′) можно применить при доказательстве единственности для некоторых нелинейных уравнений второго порядка

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_{nn}) = 0,$$

если выполняются следующие условия: для всех точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из G и *для всех значений остальных аргументов функции* F уравнение является эллиптическим, т. е. квадратичная форма

$$\sum_{i, k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \xi_i \xi_k$$

положительно определена и $\partial F / \partial u \leqslant 0$. (Эти условия можно слегка ослабить.) Если u и v — решения, соответствующие одинаковым граничным значениям, то разность $w = u - v$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i, j=1}^{n} \tilde{F}_{u_{ij}} w_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{F}_{u_i} w_i + \tilde{F}_u w = 0,$$

где $\tilde{\varphi}$ обозначает среднее значение

$$\tilde{\varphi} = \int_0^1 \varphi(x_1, \ldots, x_n, tu + (1-t)v, tu_1 + (1-t)v_1, \ldots \\ \ldots, tu_{nn} + (1-t)v_{nn})\, dt.$$

Это уравнение для w получается, если выражение

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, \ldots, u_{nn}) - F(x_1, \ldots, x_n, v, \ldots, v_{nn})$$

представить в виде интеграла. Уравнение для w имеет вид (1′), причем $c = \tilde{F}_u \leqslant 0$; поэтому мы можем сделать вывод, что $w = 0$.

Рассмотрим теперь квазилинейное уравнение

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + d = 0$$

и предположим, что коэффициенты a_{ik} и d являются функциями только от $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_n$ (т. е. не зависят от u). Тогда мы можем доказать единственность решения краевой задачи при более слабых предположениях.

Если u — такое решение этого уравнения, что соответствующая матрица (a_{ik}) является положительно определенной всюду в G, то любое решение v этого уравнения, совпадающее с u на границе, совпадает с u всюду в G. Заметим, что нет необходимости заранее *предполагать*, что уравнение является эллиптическим для функции v.

Чтобы доказать это, мы снова положим $u - v = w$ и рассмотрим тождество

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}[u]\, u_{ik} - \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}[v]\, v_{ik} + d[u] - d[v] = 0,$$

где мы применяем сокращенные обозначения

$$a_{ik}[u] = a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

и т. д. Это тождество можно записать в виде

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}[u]\, w_{ik} + \sum_{i, k=1}^{n} v_{ik}(a_{ik}[u] - a_{ik}[v]) + d[u] - d[v] = 0.$$

Применяя теорему о конечных приращениях ко второй сумме и следующему за ней члену, получаем

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}[u]\, w_{ik} + \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0,$$

где $a_i = a_i[u, v]$ — некоторые функции от $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$. Теперь, если мы подставим те частные значения u и v, которые мы рассматриваем, в функции $a_{ik}[u]$ и $a_i[u, v]$, то получим линейное уравнение относительно w; это уравнение будет эллиптическим уравнением вида (1′). Таким образом, $w = 0$.

3. Теорема Реллиха для дифференциального уравнения Монжа — Ампера. Наконец, в качестве примера нелинейного уравнения, не удовлетворяющего условиям теорем предыдущего пункта, мы рассмотрим краевую задачу для (нелинейного) *уравнения Монжа — Ампера*

$$L[u] = E\left(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2\right) + Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + D = 0. \qquad (4)$$

Пусть коэффициенты A, B, C, D, E — непрерывные функции x и y в области G, удовлетворяющие неравенству

$$AC-B^2-DE>0. \tag{5}$$

Тогда мы можем сформулировать теорему единственности[1]):

Существует не более двух решений уравнения (4), *принимающих одинаковые граничные значения на* Г.

Доказательство. Если u — решение уравнения (4), то, согласно (4) и (5), мы имеем неравенство

$$(Eu_{xx}+C)(Eu_{yy}+A)-(Eu_{xy}-B)^2>0. \tag{6}$$

Из него следует, что произведение $(Eu_{xx}+C)(Eu_{yy}+A)$ должно быть больше нуля; поэтому ни один из этих двух множителей не должен обращаться в нуль в G. Следовательно, оба они либо всюду положительны, либо всюду отрицательны. Поэтому наша теорема будет доказана, если мы сумеем показать, что существует не более одного решения краевой задачи, для которого всюду в G

$$Eu_{xx}+C>0 \qquad (\text{следовательно, и } Eu_{yy}+A>0), \tag{7}$$

и не более одного решения, для которого

$$Eu_{xx}+C<0 \qquad (\text{следовательно, и } Eu_{yy}+A<0). \tag{8}$$

Достаточно рассмотреть случай (7).

Если мы предположим, что существуют два решения u и v краевой задачи, для каждого из которых выполняется неравенство (7), то разность $w=u-v$ должна удовлетворять двум уравнениям

$$0=L[w+v]-L[v]=E\left(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2\right)+\left(Ev_{xx}+C\right)w_{yy}+$$
$$+(Ev_{yy}+A)w_{xx}-2(Ev_{xy}-B)w_{xy},$$
$$0=L[u]-L[u-w]=-E\left(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2\right)+\left(Eu_{xx}+C\right)w_{yy}+$$
$$+(Eu_{yy}+A)w_{xx}-2(Eu_{xy}-B)w_{xy},$$

в результате сложения которых получается уравнение

$$Pw_{xx}-2Qw_{xy}+Rw_{yy}=0. \tag{9}$$

Здесь коэффициенты

$$P=Ev_{yy}+A+Eu_{yy}+A,$$
$$Q=Ev_{xy}-B+Eu_{xy}-B,$$
$$R=Ev_{xx}+C+Eu_{xx}+C$$

[1]) См. Реллих [1].

являются непрерывными функциями точки в области G. Квадратичная форма

$$P\xi^2 - 2Q\xi\eta + R\eta^2$$

является положительно определенной, так как, в силу формул (6) и (7), она состоит из двух положительно определенных слагаемых. Так же, как в п. 1 и 2, из равенства (9) и граничного условия $w = 0$ мы делаем вывод, что w тождественно обращается в нуль в G, доказывая тем самым теорему единственности.

Из простых примеров видно, что *в общем случае* мы должны ожидать *существования двух различных решений*. Так, например, краевая задача для уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 4$$

с граничным условием

$$u = 0 \tag{10}$$

в единичном круге имеет решения

$$u = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{и} \quad v = 1 - x^2 - y^2;$$

для первого решения $Eu_{xx} + C = 2$, для второго $Ev_{xx} + C = -2$.

С другой стороны, если функция E обращается в нуль в некоторой точке P области G, то граничная задача не может иметь более одного решения.

Действительно, если в точке P мы имеем $Eu_{xx} + C = C(P)$, то всюду $\operatorname{sign}(Eu_{xx} + C) = \operatorname{sign} C(P)$, так как $Eu_{xx} + C$ не меняет знака в области G. Это значит, что знак выражения $Eu_{xx} + C$ один и тот же для всех решений u[1]).

4. Принцип максимума и его применения. Возвращаясь к линейному уравнению (1) с $c \leqslant 0$, мы сформулируем теперь усиленную форму принципа максимума

Принцип максимума[2]). *Если функция u удовлетворяет условию $M[u] \geqslant 0$ и принимает максимальное значение во внутренней точке, то* $u = \text{const}$.

---

[1]) Надо отметить, что дифференциальное уравнение Монжа — Ампера может быть получено из простой *вариационной задачи*. При этом мы пренебрегаем дополнительным членом $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$ и рассматриваем уравнение

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = p(x, y).$$

Как легко проверить, оно является уравнением Эйлера для функционала

$$J[u] = \iint\limits_G \left[u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx} + 6pu\right] dx\, dy.$$

[2]) В этой формулировке теорема принадлежит Хопфу [2]. Здесь дано слегка измененное доказательство Хопфа.

Следовательно, максимум любой функции u, непрерывной в $G+\Gamma$ и удовлетворяющей условию $M[u]\geqslant 0$ в G, достигается на границе Γ. (Это утверждение называется слабой формой принципа максимума.) Ясно, что можно сформулировать аналогичный принцип минимума.

Теорема единственности п. 1 вытекает также из указанного ниже следствия принципа максимума.

Следствие. Пусть функция u удовлетворяет в G уравнению (1′); если u достигает внутри области *положительного максимума*, то $u\equiv\text{const}$. Следовательно, если функция u непрерывна в $G+\Gamma$, неположительна на Γ и удовлетворяет условию $L[u]\geqslant 0$ в G, то $u\leqslant 0$ в G.

Для доказательства этого следствия предположим, что u имеет положительный максимум во внутренней точке P. Поскольку функция u непрерывна, то она положительна в некоторой окрестности точки P; но в этой окрестности $M[u]=L[u]-cu\geqslant 0$, так как $c\leqslant 0$ и, поэтому, в силу принципа максимума, $u\equiv\text{const}$. Таким образом, множество точек, где принимается максимум, открыто в G. С другой стороны, в силу непрерывности u, оно одновременно замкнуто в G и, следовательно, совпадает с G. Отсюда следует, что функция u всюду в G равна некоторой положительной постоянной.

Доказательство принципа максимума опирается на следующую лемму.

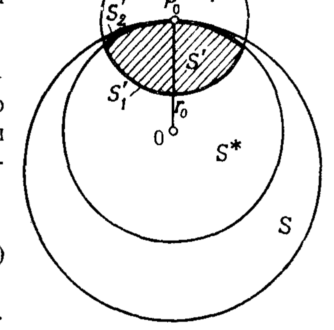


Рис. 22.

Лемма. Пусть S—открытый шар и P_0—точка на его границе. Предположим, что коэффициенты оператора $M[u]$ ограничены в S и что существует положительная постоянная m, такая, что неравенство

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant m\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \qquad (11)$$

выполняется для всех ξ и для всех точек x из S. Далее, предположим, что функция u дважды непрерывно дифференцируема в S, непрерывна в $S+P_0$ и удовлетворяет в S условиям $M[u]\geqslant 0$ и $u<u(P_0)$. Тогда производная по внешней нормали du/dn в точке P_0, понимаемая как нижний предел выражения $\Delta u/\Delta n$, положительна.

Доказательство. Пусть S^*—меньший шар, касающийся S в точке P_0 изнутри (см. рис. 22). Тогда P_0 является единственной точкой максимума функции u в замыкании $\bar{S}^*$ шара S^*. Возьмем

начало координат в центре шара S^* и положим $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$; r_0 обозначает расстояние между точкой P_0 и началом координат. Обозначим через S' пересечение $\overline{S}^*$ с фиксированным шаром S_1 с центром в точке P_0 и радиусом, меньшим чем r_0. Граница S' состоит из сферических сегментов границ S_1 и $\overline{S}^*$, которые мы обозначим через S_1' и S_2' соответственно,

Теперь мы введем вспомогательную функцию

$$h = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r_0^2},$$

положительную в S^* и равную нулю на границе этого шара. При достаточно больших α мы можем сделать выражение

$$M[h] = e^{-\alpha r^2}\left[4\alpha^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k - 2\alpha \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_i x_i)\right]$$

положительным внутри S'; действительно, в силу (11) форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ строго положительна в S', так как r строго положительно. На S_1' функция u меньше, чем $u(P_0)$, и, следовательно, она строго меньше, чем $u(P_0)$. Поэтому для достаточно малого фиксированного ε функция

$$v = u + \varepsilon h$$

на S_1' меньше, чем $u(P_0)$. Рассмотрим теперь функцию v в области S'. Внутри S' мы имеем $M[v] = M[u] + \varepsilon M[h] > 0$. В силу утверждения на стр. 320 в п. 1, $\max_{S'} v$ достигается на границе области S'. Но $v < u(P_0)$ на S_1' и $v = u < u(P_0)$ на S_2' (за исключением точки P_0); кроме того, $v(P_0) = u(P_0)$. Таким образом, $\max_{S'} v$ достигается в точке P_0. Отсюда следует, что в P_0

$$\frac{dv}{dn} = \frac{du}{dn} + \varepsilon \frac{dh}{dn} \geqslant 0,$$

и поскольку $dh/dn < 0$, то

$$\frac{du}{dn} > 0;$$

лемма доказана.

Теперь легко получить принцип максимума. Пусть функция u в G удовлетворяет условию $M[u] \geqslant 0$. Если $u \not\equiv \text{const}$ имеет внутреннюю точку максимума, то можно найти шар, целиком лежащий в G и такой, что на его границе лежит точка максимума функции u, а внутри точек максимума нет. В силу леммы, в этой точке $du/dn > 0$, а это

противоречит тому факту, что первые производные функции u обращаются в нуль во внутренней точке максимума.

Как мы замечали ранее, из принципа максимума следует, что любая функция, удовлетворяющая в G условию $M[u] \geqslant 0$, принимает максимальное значение в граничной точке. Если в G существует шар S, такой, что точка максимума P_0 лежит на его границе, и если в шаре S коэффициенты оператора M ограничены и удовлетворяют условию (11), то лемма и принцип максимума дают следующий полезный результат: *либо* $u \equiv \text{const}$ *в* G, *либо производная по внешней нормали* du/dn в точке P_0 положительна[1]). Например, для таких областей из этого результата следует, что функция Грина для уравнения $M[u] = 0$ (она обращается в нуль на границе области G и имеет особенность во внутренней точке) в любой точке границы удовлетворяет условию $du/dn < 0$, так как эта функция достигает минимума на границе.

Этот результат дает нам также простое доказательство единственности решения второй краевой задачи, или задачи Неймана, для уравнения $M[u] = 0$, причем это доказательство легко распространить на уравнения вида (1'). Задачу лучше всего сформулировать следующим образом. На границе Γ области G, обладающей непрерывно изменяющейся нормалью, задана непрерывная функция φ; требуется найти решение u уравнения $M[u] = 0$, непрерывное и обладающее непрерывными первыми производными в $G + \Gamma$, принимающее заданное значение в некоторой фиксированной точке P и такое, что его производная по внешней нормали на Γ равняется функции φ с точностью до аддитивной постоянной:

$$\frac{du}{dn} = \varphi + C.$$

---

[1]) См. Хопф [1]. Надо отметить, что утверждение леммы и последнее утверждение остаются справедливыми даже в том случае, когда наименьшее собственное значение матрицы (a_{ik}) может обращаться в нуль в точке P_0, т. е. когда в точке P_0 нарушается эллиптичность уравнения, если направление границы S в точке P_0 не является характеристическим. В этом случае сумма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$, используемая в доказательстве леммы, также строго больше нуля в окрестности точки P_0; следовательно, можно провести и остальную часть доказательства. Аналогичные результаты см. в работе Пуччи [1]. [См. также работу Г. Фикера (Fichera G., On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order, Boundary problems in differential equations, Univ. Wisconsin Press, Madison, 1960, 97—120; русский перевод: сб. „Математика“, № 6 (1963)), а также цикл статей А. Д. Александрова (Александров А. Д., Исследования о принципе максимума, *Изв. высш. учебн. завед.*, матем., № 5 (1958), 126—157; № 3 (1959), 3—12; № 5 (1959), 6—32; № 3 (1960), 3—15; № 5 (1960), 16—26; № 1 (1961), 3—20). — *Прим. ред.*]

Чтобы доказать единственность, мы должны показать, что любое решение u уравнения $M[u]=0$, удовлетворяющее на Γ условию $du/dn = \text{const} = k$ и обращающееся в нуль в точке P, тождественно обращается в нуль и, следовательно, $k=0$. Мы предположим, что коэффициенты оператора $M[u]$ ограничены в G и удовлетворяют условию (11) и что в любой точке P_0 на Γ мы можем найти открытый шар S, целиком лежащий в G и такой, что точка P_0 находится на границе этого шара. Если u есть решение, то из принципа максимума следует, что u принимает максимальное и минимальное значения в некоторых точках границы Γ. В силу наших предыдущих рассуждений в этих точках производная du/dn соответственно положительна или отрицательна, если u не является тождественной константой. Но $du/dn = k$, следовательно, $u = \text{const}$ в G; кроме того, u тождественно обращается в нуль, так как $u=0$ в P.

Принцип максимума можно применять не только для доказательства единственности решения u уравнения (1′) (а, следовательно, и уравнения $L[u]=f$), принимающего заданные граничные значения $u=\varphi$ на границе Γ области G, но и для оценки функции u.

Мы утверждаем, что если функция g удовлетворяет условиям

$$-L[g] \geqslant \max|f| \quad \text{в} \quad G$$

и

$$g \geqslant \max|\varphi| \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

то

$$|u| \leqslant g.$$

Для доказательства достаточно показать, что функции $v = u - g$ и $-u-g$ неположительны. Но это вытекает из следствия принципа максимума, так как функция v удовлетворяет условию

$$L[v] = L[u] - L[g] = f - L[g] \geqslant 0$$

и так как на границе $v = \varphi - g \leqslant 0$. Аналогично доказывается, что $-u-g \leqslant 0$.

Теперь мы построим такую функцию g, предполагая для удобства, что область G лежит в полупространстве $x_1 \geqslant 0$. Мы будем считать, что существуют такие положительные постоянные m, b, что всюду в G

$$a_{11} \geqslant m, \qquad -b_1 \leqslant b.$$

Положим

$$g = \max|f|\,(e^{\alpha\bar{x}} - e^{\alpha x_1}) + \max|\varphi|,$$

причем $x_1 \leqslant \bar{x}$ в G, а α — положительная постоянная, выбранная так, чтобы функция g удовлетворяла поставленным условиям. Ясно,

что $g \geqslant \max|\varphi|$. Кроме того, при *достаточно больших* α

$$-L[g] = \max|f|\,[e^{\alpha x_1}(a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha) - c(e^{\alpha\bar{x}} - e^{\alpha x_1}) - c\max|\varphi| \geqslant$$
$$\geqslant \max|f|\,(a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha) \geqslant \max|f|.$$

Выбор α зависит только от m и b.

Таким образом, мы получили следующую *априорную* оценку. *Для решения и уравнения* (1′), *удовлетворяющего граничным условиям* $u = \varphi$, *справедлива оценка*

$$|u| \leqslant \max|\varphi| + \max|f|\,(e^{\alpha\bar{x}} - 1), \tag{12}$$

где α — *постоянная, зависящая только от* b *и* m, *а* $\bar{x}$ — *такая постоянная, что* $|x_1| \leqslant \bar{x}$ *в* G.

Даже не предполагая, что $c \leqslant 0$, можно получить оценку вида

$$|u| \leqslant k(\max|\varphi| + \max|f|), \tag{13}$$

если область G — достаточно узкая в некотором направлении, например x_1, или, более точно, если

$$(\max c)(e^{\alpha\bar{x}} - 1) < 1. \tag{14}$$

(Тогда постоянная k зависит от m, b, $\max c$ и $\bar{x}$.) Действительно, в этом случае мы можем записать уравнение в виде

$$M[u] + c^- u = (c^- - c)\,u + f = \bar{f},$$

где $c^- = \min(c, 0)$, и применить априорную оценку (12). Получим

$$\max|u| \leqslant \max|\varphi| + \max|\bar{f}|\,(e^{\alpha\bar{x}} - 1) \leqslant$$
$$\leqslant \max|\varphi| + (e^{\alpha\bar{x}} - 1)(\max|f| + \max|u|\max c),$$

или

$$\max|u| \leqslant \frac{\max|\varphi| + \max|f|\,(e^{\alpha\bar{x}} - 1)}{1 - \max c\,(e^{\alpha\bar{x}} - 1)}.$$

Заметим, что из оценки (13) *следует единственность решения краевой задачи.*

§ 7. Априорные оценки Шаудера и их приложения

Первые систематические исследования краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений принадлежат Бернштейну. В своих фундаментальных работах он выяснил, что основным и, как правило, наиболее трудным этапом при решении нелинейных эллиптических задач является получение достаточно сильных априорных оценок для

решения. Шаудер [1, 2] [1]) получил некоторые априорные оценки решений $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ линейных эллиптических уравнений вида

$$L[u] \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu = f \tag{1}$$

в ограниченной области G. Применяя эти оценки, он прямым методом решил краевую задачу (для $c \leqslant 0$), не прибегая к построению фундаментального решения уравнения.

Оценки Шаудера справедливы для равномерно эллиптических уравнений вида (1) с ограниченными коэффициентами, удовлетворяющими условию Гёльдера, т. е. для уравнений, удовлетворяющих следующим условиям. Существуют такие положительные постоянные m, M и α $(0 < \alpha < 1)$, что в области G

а) для любых действительных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi_k \geqslant m \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

б) $$|a_{ik}|, \ |b_i|, \ |c| \leqslant M \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

в) коэффициенты a_{ik}, b_i, c удовлетворяют условию Гёльдера (см. § 1, п. 2) с показателем α и коэффициентом M.

Мы приведем оценки Шаудера без доказательства (см. ссылки на литературу в примечании 1) и изложим метод Шаудера решения краевой задачи для уравнения (1). Кроме того, мы укажем некоторые применения этих оценок; в частности, можно доказать, что решения (1) обладают свойствами, аналогичными многим свойствам гармонических функций.

1. Оценки Шаудера. Чтобы придать сжатую форму оценкам, которые дают границы для производных решений уравнения (1), удобно ввести классы функций, имеющих производные различных порядков, и подходящие „нормы“, выражающие „величину“ функций этих классов. Для этой цели мы определим класс C_m (m — неотрицательное целое число) — класс функций $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющих частные производные до порядка m, непрерывные в $G + \Gamma$, и класс $C_{m+\alpha}$ (m — неотрицательное целое число, $0 < \alpha < 1$) функций u из C_m, таких, что их производные порядка m удовлетворяют в $G + \Gamma$ условию Гёльдера с показателем α (см. § 1, п. 2). Класс C_0, который иногда называют C, — это класс функций, непрерывных в $G + \Gamma$.

---

[1]) Более простые доказательства дали Миранда [1], Дуглис, Ниренберг и другие. Агмон, Дуглис и Ниренберг [1] получили аналогичные оценки решений общих краевых задач для эллиптических уравнений любого порядка; см. особенно стр. 650—663. В этой же работе приведена библиография.

Обозначая любую из производных функции u порядка m через $D^m u$, мы введем „норму“ в C_m:

$$\|u\|_m = \max_{P\in G+\Gamma} |u(P)| + \max_{P\in G+\Gamma} |D^1 u(P)| + \ldots + \max_{P\in G+\Gamma} |D^m u(P)|,$$

где максимум берется также по всем производным указанного порядка. Обозначая через $H_\alpha[D^m u]$ наименьшую константу K, такую, что все производные функции u порядка m удовлетворяют в $G+\Gamma$ условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом K, мы введем в $C_{m+\alpha}$ норму

$$\|u\|_{m+\alpha} = \|u\|_m + H_\alpha[D^m u].$$

Теперь классы C_a определены для всех чисел $a \geqslant 0$. Ясно, что класс C_a является линейным классом, т. е. любая конечная линейная комбинация функций из C_a с действительными коэффициентами также принадлежит C_a. Кроме того, легко видеть, что норма $\|u\|_a$ обладает следующими свойствами:

$$\|u\|_a \geqslant 0 \qquad (\|u\|_a = 0 \quad \text{только при } u \equiv 0);$$

$$\|cu\|_a = |c|\,\|u\|_a \qquad \text{для любой действительной постоянной } c;$$

$$\|u+v\|_a \leqslant \|u\|_a + \|v\|_a \qquad \text{(неравенство треугольника)}.$$

Следовательно, класс C_a можно рассматривать как линейное пространство, элементами, или „точками“, которого являются функции u, и в котором норма $\|\ \|_a$ определяет метрику, или расстояние между двумя функциями u и v: $\|u-v\|_a$. В этом пространстве мы следующим образом определяем сходимость последовательности функций $\{u_n\}$:

$$u_n \to u, \text{ или } \lim u_n = u, \text{ тогда и только тогда, когда } \|u_n - u\|_a \to 0.$$

(Сходимость по норме $\|u\|_m$, где m — целое число, эквивалентна равномерной сходимости в $G+\Gamma$ функции u и ее производных до порядка m.) Ясно, что любая сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ является последовательностью Коши, т. е. обладает тем свойством, что

$$\|u_m - u_n\|_a \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$

Кроме того, линейное нормированное пространство C_a полно, т. е. в C_a любая последовательность Коши сходится. Доказательство этого утверждения предоставляется читателю. Таким образом, C_a есть полное линейное нормированное пространство, т. е. пространство Банаха [1]). Для функций, определенных в некоторой замкнутой

---

[1]) См., например, Банах [1], где изучаются такие пространства, а также Данфорд и Шварц [1] и дополнение (§ 15) к этой главе [см. также Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1951. — *Прим. ред.*]

подобласти B области G, мы будем обозначать соответствующие пространства и нормы через C_a^B и $\| \ \|_a^B$.

Кроме пространств C_a, нам понадобятся пространства непрерывно дифференцируемых функций, производные которых могут заранее указанным образом обращаться в бесконечность на границе Γ. Пусть d_P обозначает расстояние от точки P в G до границы области Γ, и пусть $d_{P,Q} = \min(d_P, d_Q)$ для любой пары точек P, Q. Для любой функции u, непрерывной в $G+\Gamma$ и обладающей в G непрерывными производными до порядка m, мы определим

$$\widehat{\| u \|}_m = \sup_{P \in G} | u(P) | + \sup_{P \in G} d_P | D^1 u(P) | + \ldots + \sup_{P \in G} d_P^m \left| D^m u(P) \right|,$$

где верхняя грань берется также по всем производным указанного порядка; норма $\widehat{\| u \|}_m$ может быть бесконечной. Для функций u, производные которых порядка m удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α в любой замкнутой подобласти области G, мы положим

$$\hat{H}_\alpha \left[D^m u \right] = \sup_{P, Q \in G} d_{P, Q}^{m+\alpha} \frac{| D^m u(P) - D^m u(Q) |}{| P - Q |^\alpha},$$

где верхняя грань берется также по всем производным порядка m, а $|P-Q|$ обозначает расстояние между P и Q; кроме того, мы положим

$$\widehat{\| u \|}_{m+\alpha} = \widehat{\| u \|}_m + \hat{H}_\alpha \left[D^m u \right].$$

Пусть $\hat{C}_m$ — класс функций u, непрерывных в $G+\Gamma$, обладающих непрерывными производными до порядка m в G и таких, что норма $\widehat{\| u \|}_m$ конечна. Пусть $\hat{C}_{m+\alpha}$ — подкласс класса $\hat{C}_m$, состоящий из функций, для которых конечна норма $\widehat{\| u \|}_{m+\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$. Таким образом, классы $\hat{C}_a$ и соответствующие „нормы“ $\widehat{\| \ \|}_a$ определены для всех $a \geqslant 0$. Кроме того, нормы $\widehat{\| \ \|}_a$ обладают свойствами, указанными выше для норм $\| \ \|_a$, и класс $\hat{C}_a$ образует линейное пространство, которое, как легко видеть, *полно* относительно нормы $\widehat{\| \ \|}_a$. Таким образом, $\hat{C}_a$ — банахово пространство. Ясно, что если функция u принадлежит $\hat{C}_a$, то она принадлежит пространству C_a для любой замкнутой подобласти G.

Теперь мы можем сформулировать априорные оценки. Сначала мы заметим, что требования типа б) и в), наложенные на коэффициенты, можно в наших новых обозначениях записать короче, так

что вместо требований а), б) и в) мы теперь имеем

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant m \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{2}$$

и

$$\|a_{ik}\|_\alpha, \quad \|b_i\|_\alpha, \quad \|c\|_\alpha \leqslant 2M. \tag{3}$$

Оценки бывают двух типов: „внутренние“ оценки (в любой замкнутой подобласти B области G) и оценки „вплоть до границы“ (во всей области $G+\Gamma$). Мы соответственно будем считать, что f принадлежит пространству $\widehat{C}_\alpha$ или C_α.

Внутренние оценки. Если u — решение уравнения (1), вторые производные которого удовлетворяют условию Гёльдера (с показателем α) в любой замкнутой подобласти области G, то норма $\widehat{\|u\|}_{2+\alpha}$ конечна и

$$\widehat{\|u\|}_{2+\alpha} \leqslant K(\widehat{\|u\|}_0 + \widehat{\|f\|}_\alpha). \tag{4}$$

Здесь K — постоянная, зависящая только от m, α, M и диаметра области G.

Для вывода оценок вплоть до границы мы требуем, чтобы область G и граничные значения φ функции u были достаточно *гладкими*. Мы называем область G гладкой, если она имеет гладкую границу, т. е. если мы можем покрыть Γ конечным числом шаров, таких, что часть поверхности Γ, заключенная в каждом из этих шаров, с помощью выделения одной из координат, например x_n, может быть задана в виде

$$x_n = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

причем предполагается, что функция g имеет вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α. Кроме того, граничные значения φ также предполагаются гладкими относительно локальных параметров $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, т. е. и они должны иметь вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α. Используя фиксированное конечное число систем локальных параметров на границе и норм $\|\varphi\|_{2+\alpha}$ в каждом шаре, можно определить для функции φ норму $\|\varphi\|'_{2+\alpha}$ как максимум норм $\|\varphi\|_{2+\alpha}$.

Оценки вплоть до границы. Пусть u — принадлежащее классу $C_{2+\alpha}$ решение уравнения (1) в гладкой области G с гладкими граничными значениями φ. Тогда

$$\|u\|_{2+\alpha} \leqslant K_1(\|u\|_0 + \|f\|_\alpha + \|\varphi\|'_{2+\alpha}), \tag{5}$$

где K_1 — постоянная, зависящая только от m, α, M и области G.

Вывод оценок Шаудера слишком длинен, чтобы его приводить здесь. Он основан на оценке вторых производных решений уравнения частного вида, а именно, уравнения Пуассона $\Delta u = f$. Одна из этих оценок, которую мы будем применять при решении краевой задачи, утверждает, что *если u есть решение уравнения $\Delta u = f$ в области, где f принадлежит C_α, $0 < \alpha < 1$, то функция u в каждой замкнутой подобласти принадлежит $C_{2+\alpha}$*. В свою очередь, утверждения, касающиеся уравнения Пуассона, получаются из интегральных выражений для этих вторых производных, которые определяются формулой (2′) из § 1 и для получения которых применялось фундаментальное решение уравнения Лапласа. (В § 1, п. 2 мы только показали, что если f принадлежит C_α, то функция u, заданная формулой (14) из § 1, принадлежит в каждой замкнутой подобласти пространству C_2.)

При решении краевых задач мы применяем также следующую теорему о гармонических функциях, принадлежащую Келлогу [2].

Пусть u — гармоническая функция, определенная в гладкой области G и имеющая гладкие граничные значения. Тогда u принадлежит пространству $C_{2+\alpha}$.

Прежде чем решать краевую задачу, мы заметим, что если в уравнении (1) $c \leqslant 0$, то справедлива оценка (13) из § 6 и оценки Шаудера (4) и (5) можно записать в виде

$$\widehat{\|u\|}_{2+\alpha} \leqslant K' \left(\widehat{\|f\|}_\alpha + \|\varphi\|_0'\right), \tag{4′}$$

$$\|u\|_{2+\alpha} \leqslant K_1' \left(\|f\|_\alpha + \|\varphi\|_{2+\alpha}'\right), \tag{5′}$$

где K' и K_1' — постоянные, зависящие только от m, α, M и от диаметра области G.

2. Решение краевой задачи. Мы опишем метод Шаудера решения краевой задачи для уравнения (1) с $c \leqslant 0$ и коэффициентами, удовлетворяющими условиям а), б), в) или (2) и (3). Предположим сначала, что ограниченная область G и граничные значения φ гладкие и что f принадлежит C_α. Тогда мы имеем следующую теорему.

Теорема. *Существует единственное решение уравнения* (1), *принадлежащее пространству $C_{2+\alpha}$ и принимающее граничные значения φ.*

При доказательстве теоремы достаточно рассмотреть случай $\varphi \equiv 0$, так как предположения о гладкости обеспечивают существование функции $\bar{\varphi}$ из $C_{2+\alpha}$, принимающей на Γ граничные значения φ. Тогда функция $u - \bar{\varphi}$ обращается в нуль на границе и является решением уравнения $L[u] = f - L[\bar{\varphi}]$. Наша цель состоит в том, чтобы в несколько этапов доказать, что оператор L обратим.

Мы будем для этого применять метод *продолжения по параметру*. Построим однопараметрическое семейство эллиптических операторов

$$L_t[u] \equiv tL[u] + (1-t)\Delta u, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $L_0 = \Delta$ и $L_1 = L$. Мы покажем, что все операторы L_t, и в частности L_1, обратимы. Обозначим через T множество тех значений параметра t на единичном отрезке, для которых оператор L_t имеет обратный, и докажем, что множество T совпадает со всем отрезком, так как

1) T содержит точку $t=0$;

2) T является открытым множеством на единичном отрезке, т. е. для любого t_0 из T можно найти такое $\varepsilon(t_0) > 0$, что любое значение t на единичном отрезке, удовлетворяющее условию $|t-t_0| \leqslant \leqslant \varepsilon(t_0)$, принадлежит T;

3) T является замкнутым множеством.

Если эти свойства проверены, то из них сразу следует, что T совпадает со всем отрезком. Действительно, тогда T является непустым множеством на отрезке, одновременно открытым и замкнутым; следовательно, оно совпадает со всем отрезком.

Чтобы доказать свойство 1), мы должны доказать, что существует решение уравнения $\Delta u = f$, непрерывное в $G+\Gamma$, равное нулю на Γ и принадлежащее $C_{2+\alpha}$. Продолжим функцию f на шар S, содержащий внутри $G+\Gamma$, так, чтобы функция f в S принадлежала C_α. В § 1, п. 2 мы построили в S частное решение v уравнения $\Delta u = f$, заданное формулой (14) из § 1. Согласно п. 1, это решение принадлежит $C_{2+\alpha}$ в любой замкнутой подобласти S, в частности в $G+\Gamma$. Отсюда следует, что его значения на Γ гладки (в том смысле, как было ранее определено в этом параграфе). Пусть w — гармоническая функция в области G, совпадающая с v на Γ. В силу теоремы Келлога, приведенной в п. 1, функция w принадлежит $C_{2+\alpha}$ в области G. Отсюда следует, что $u = v - w$ является искомым решением.

Прежде чем доказывать свойства 2) и 3), мы заметим, что в силу предположений а), б) и в), а также в силу того, что оператор L_t имеет указанный вид, существуют такие постоянные m_1, M_1 и α, что коэффициенты оператора L_t также удовлетворяют условиям а), б), в) для всех t, причем постоянные m, M заменяются на m_1, M_1. Из оценок (5′) следует существование такой постоянной K_2, что искомое решение u_t уравнения $L_t[u] = f$ удовлетворяет оценке

$$\|u_t\|_{2+\alpha} \leqslant K_2 \|f\|_\alpha. \tag{6}$$

Теперь мы будем доказывать свойство 2). Пусть t_0 — точка множества T, а f — произвольная функция пространства C_α. Мы хотим найти решение уравнения

$$L_t[u] = f,$$

удовлетворяющее условию $u=0$ на границе и принадлежащее $C_{2+\alpha}$, если t достаточно близко к t_0. Это уравнение можно записать в виде

$$L_{t_0}[u]=L_{t_0}[u]-L_t[u]+f$$

или

$$L_{t_0}[u]=(t-t_0)(\Delta u-L[u])+f.$$

Подставляя в правую часть любую функцию u из $C_{2+\alpha}$, мы получаем функцию F из C_α. Так как точка t_0 принадлежит множеству T, то существует решение v уравнения

$$L_{t_0}[v]=(t-t_0)(\Delta u-L[u])+f\equiv F,$$

удовлетворяющее условию $v=0$ на границе и принадлежащее $C_{2+\alpha}$. Мы можем считать, что v получается из функции u с помощью некоторого линейного неоднородного преобразования

$$v=A(u).$$

С помощью итераций мы находим „неподвижную точку“ нашего преобразования, т. е. такую функцию u, что

$$u=A(u).$$

Несложный подсчет, основанный на предположениях б) и в), приводит к неравенству

$$\|F\|_\alpha\leqslant K_3|t-t_0|\,\|u\|_{2+\alpha}+\|f\|_\alpha,$$

где K_3 — фиксированная постоянная, не зависящая от u. Применяя априорную оценку (6), получаем

$$\|v\|_{2+\alpha}\leqslant K_2K_3|t-t_0|\,\|u\|_{2+\alpha}+K_2\|f\|_\alpha. \tag{7}$$

Отсюда следует, что из неравенства $\|u\|_{2+\alpha}\leqslant 2K_2\|f\|_\alpha$ вытекает неравенство

$$\|A(u)\|_{2+\alpha}=\|v\|_{2+\alpha}\leqslant 2K_2\|f\|_\alpha,$$

если $2K_2K_3|t-t_0|\leqslant 1$.

Кроме того, заметим, что если $v_1=A(u_1)$ и $v_2=A(u_2)$, то v_1-v_2 является решением уравнения

$$L_{t_0}[v_1-v_2]=(t-t_0)(\Delta(u_1-u_2)-L[u_1-u_2]),$$

причем $v_1-v_2=0$ на границе. Применяя оценку (7), мы получаем

$$\|v_1-v_2\|_{2+\alpha}\leqslant K_2K_3|t-t_0|\,\|u_1-u_2\|_{2+\alpha}\leqslant\frac{1}{2}\|u_1-u_2\|_{2+\alpha}, \tag{8}$$

если $2K_2K_3|t-t_0|\leqslant 1$. Тогда, если мы возьмем значение t столь близким к t_0, чтобы выполнялось неравенство $2K_2K_3|t-t_0|\leqslant 1$, то преобразование $A(u)$ будет переводить множество функций, удовле-

творяющих условию $\|u\|_{2+\alpha} \leqslant 2K_2 \|f\|_\alpha$, в себя и, в силу неравенства (8), преобразование $A(u)$ является сжимающим.

Теперь мы возьмем некоторую начальную функцию $u_{(0)}$ и положим

$$u_{(i+1)} = A(u_{(i)}) \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots);$$

последовательность $u_{(i)}$ будет равномерно сходиться к некоторой функции u из $C_{2+\alpha}$, удовлетворяющей уравнению

$$u = A(u).$$

Тогда функция u является решением уравнения $L_t[u] = f$ с условием $u = 0$ на границе. Таким образом, отрезок $|t - t_0| \leqslant 1/2K_2K_3$ принадлежит T и множество T открытое.

Чтобы доказать свойство 3), мы предположим, что t является пределом точек $\{t_i\}$, принадлежащих T, и рассмотрим любую функцию f из C_α. Мы имеем соответствующую последовательности $\{t_i\}$ последовательность $\{u_{(i)}\}$ решений уравнений

$$L_{t_i}[u_{(i)}] = f;$$

u_i принадлежат $C_{2+\alpha}$ и удовлетворяют условию $u_{(i)} = 0$ на Γ. Применяя оценку (6), получаем

$$\|u_{(i)}\|_{2+\alpha} \leqslant K_2 \|f\|_\alpha.$$

Таким образом, функции $u_{(i)}$, а также их первые и вторые производные, равностепенно непрерывны в $G+\Gamma$. Мы можем поэтому выбрать подпоследовательность, которую снова обозначим через $u_{(i)}$, сходящуюся к некоторой функции u, причем первые и вторые производные функций $u_{(i)}$ сходятся к соответствующим производным функции u и сходимость равномерна в любой замкнутой подобласти G. Ясно, что u принадлежит $C_{2+\alpha}$, удовлетворяет уравнению

$$L_t[u] = f$$

и условию $u = 0$ на Γ. Таким образом, u является искомым решением уравнения $L_t[u] = f$ и точка t принадлежит множеству T. Это завершает доказательство теоремы.

Применяя эту теорему и внутренние оценки, легко получить решение уравнения (1) при более слабых предположениях.

Теорема. *Если ограниченная область G гладкая, f принадлежит пространству $\hat{C}_\alpha$, а граничные значения φ непрерывны, то существует единственное решение и уравнения* (1), *принадлежащее $\hat{C}_{2+\alpha}$.*

Для доказательства мы равномерно аппроксимируем заданные функции φ и f с помощью трижды дифференцируемых функций φ_n

и дифференцируемых функций f_n так, что нормы $\widehat{\|f_n\|}_\alpha$ равномерно ограничены. Согласно предыдущей теореме, существуют решения u_n уравнений

$$L[u_n] = f_n,$$

принадлежащие $C_{2+\alpha}$ и удовлетворяющие условиям $u_n = \varphi_n$ на Γ. Применяя неравенство (13) из § 6 к разностям $u_n - u_m$, мы убеждаемся в том, что функции u_n равномерно сходятся к некоторой непрерывной функции u. Из внутренних оценок (4') мы делаем вывод, что нормы $\widehat{\|u_n\|}_{2+\alpha}$ равномерно ограничены. Из этого следует, что u принадлежит пространству $\widehat{C}_{2+\alpha}$ и что производные функции u являются пределами производных функций некоторой подпоследовательности u_n (сходимость равномерна в замкнутых подобластях). Функция u является искомым решением.

С помощью внутренних оценок мы можем также решить краевую задачу в широком классе негладких областей. Пусть G — ограниченная область, которую можно представить как объединение последовательности гладких областей G_n, причем каждая область G_n содержится в следующей области G_{n+1} и имеет границу Γ_n.

Предположим, что для каждой точки Q на границе Γ области G существует „сильный барьер", т. е. функция w_Q, дважды непрерывно дифференцируемая в G, непрерывная и неотрицательная в $G+\Gamma$, равная нулю в точке Q и удовлетворяющая условию

$$L[w_Q] \leqslant -1.$$

(В следующем пункте мы построим такие функции w_Q для некоторого класса областей.) Теперь мы сформулируем следующую более общую теорему.

Теорема. *Предположим, что в области G с только что описанными свойствами функция f принадлежит $\widehat{C}_\alpha$ и что φ — непрерывная функция в $G+\Gamma$. Тогда существует единственное решение u уравнения* (1), *принадлежащее $\widehat{C}_{2+\alpha}$ и совпадающее с функцией φ на Γ.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы в области G_n существует решение u_n уравнения $L[u_n] = f$, совпадающее с φ на Γ_n. Применение оценки (4') показывает, что нормы $\widehat{\|u_n\|}_{2+\alpha}$ функций u_n в областях G_n равномерно ограничены. Отсюда следует существование сходящейся (равномерно во всякой замкнутой подобласти G) подпоследовательности u_n, причем предельная функция u имеет в G конечную норму $\widehat{\|u\|}_{2+\alpha}$ и удовлетворяет в G уравнению $L[u] = f$. Если мы определим функцию u на Γ так, чтобы она совпадала

там с φ, то нам останется только показать, что функция u непрерывна в $G+\Gamma$.

Для этого возьмем точку Q на Γ и соответствующий сильный барьер w_Q. Из свойств w_Q следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такая константа k, что

$$|\varphi-\varphi(Q)|\leqslant\varepsilon+kw_Q \qquad \text{в } G+\Gamma.$$

Если мы положим

$$W=\varepsilon+k_1w_Q,$$

где $k_1=\max(k, \sup|f-c\varphi(Q)|)$, то

$$|\varphi-\varphi(Q)|\leqslant W \qquad \text{в } G+\Gamma.$$

Далее, заметим, что

$$L[W]=c\varepsilon+k_1L[w_Q]\leqslant-\sup|f-c\varphi(Q)|,$$

так как $c\leqslant 0$ и $L[w_Q]\leqslant-1$.

Из способа построения функции W следует, что

$$W\pm(u_n-\varphi(Q))\geqslant 0 \qquad \text{на } \Gamma_n$$

и

$$L[W\pm(u_n-\varphi(Q))]=L[W]\pm(f-c\varphi(Q))\leqslant 0 \text{ в } G_n.$$

Применяя принцип максимума к функциям $W\pm(u_n-\varphi(Q))$, мы можем сделать вывод, что

$$|u_n-\varphi(Q)|\leqslant W \qquad \text{в } G_n,$$

и, переходя к пределу, получаем

$$|u-\varphi(Q)|\leqslant W \qquad \text{в } G.$$

Но в силу непрерывности w_Q мы имеем $W\leqslant 2\varepsilon$ в некоторой окрестности точки Q; таким образом, функция u непрерывна в Q. Так как Q — произвольная точка границы, то функция u непрерывна в $G+\Gamma$ и теорема доказана.

3. Сильные барьеры и их приложения. Чтобы завершить рассмотрение краевой задачи, мы укажем, как построить сильный барьер w_Q для тех граничных точек Q, которые обладают следующим свойством: существует замкнутый шар S_Q, такой, что его пересечение с $G+\Gamma$ состоит из единственной точки Q. Пусть R — радиус сферы S_Q, а r — расстояние до центра сферы S_Q, который мы принимаем за начало координат. Оператор L задается формулой (1) и предполагается равномерно эллиптическим, т. е. удовлетворяющим условиям а) и б); кроме того, c считается неположительным.

Положим

$$w_Q=k_1(R^{-p}-r^{-p}),$$

где k_1 и p — положительные постоянные. Ясно, что функция w_Q неотрицательна в $G+\Gamma$ и обращается в нуль только в точке Q. Непосредственный подсчет дает

$$L[w_Q] = k_1 p r^{-p-4}\left[-(p+2)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + r^2\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_i x_i)\right] + \\ + c w_Q \leqslant k_1 p r^{-p-2}\left[-(p+2)m + \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_i x_i)\right],$$

в силу свойства а) и неравенства $c \leqslant 0$. Если теперь мы выберем p, а затем k_1, достаточно большими, то мы будем иметь

$$L[w_Q] \leqslant -1.$$

Таким образом, если k_1 и p выбраны соответствующим образом (при этом они зависят только от R, m, M и области G), то функция w_Q имеет все свойства сильного барьера.

Заметим[1]), что с помощью сильных барьеров мы можем распространить метод Перрона (см. § 4, п. 5) для решения уравнения Лапласа на решение задачи Дирихле для общего однородного эллиптического уравнения вида (1′) из § 6, а именно

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu = 0, \qquad c \leqslant 0;$$

при этом требуется, чтобы задача была разрешима в малом, т. е. чтобы для достаточно малых шаров существовало решение с произвольными непрерывными граничными данными. В этом случае можно легко построить функции, аналогичные субгармоническим (супергармоническим). Непрерывная функция u называется обобщенной субгармонической (супергармонической) функцией, если для любого достаточно малого шара C из области G, $u \leqslant (\geqslant)\ M_C[u]$. Здесь функция $M_C[u]$ равна u вне C, а в C является решением уравнения (1′) из § 6, совпадающим с u на границе C. Свойства 1), 2), 3), доказанные в § 6, п. 4 для субгармонических функций, легко распространить на обобщенные субгармонические функции с помощью принципа максимума для уравнения (1′) из § 6; удобная для этой цели форма принципа максимума дана в § 6, п. 4.

Если мы хотим найти решение u уравнения (1′) из § 6 с заданными граничными значениями φ, то мы определяем соответствующие обобщенные нижние (верхние) функции как такие обобщенные суб-

---

[1]) Это замечание принадлежит П. Лаксу. См. также Таутц [1], Беккенбах и Джексон [1]. Симонов [1] применял также некоторую модификацию метода Перрона к решению нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в предположении, что решение с заданными непрерывными граничными условиями можно найти для малых областей.

гармонические (супергармонические) функции, которые не больше (не меньше) φ на границе. Как и в случае уравнения Лапласа, искомое решение u равно тогда верхней грани всех нижних функций. Чтобы доказать, что эта верхняя грань является решением уравнения (1′) из § 6, мы для решения, определенного в шаре, должны получить оценки производных в меньшем концентрическом шаре, такие, чтобы оценка зависела только от максимума модуля решения и от того, какие именно шары рассматриваются. Мы должны также доказать, что предел равномерно сходящихся решений уравнения (1′) из § 6 тоже является решением (см. § 4, п. 5). Для уравнений, коэффициенты которых удовлетворяют условию Гёльдера, это утверждение следует из внутренних оценок Шаудера. Чтобы показать, что на границе функция u совпадает с φ, мы применим сильные барьеры [1]).

Сильные барьеры можно использовать также для того, чтобы в граничных точках оценить первые производные решений уравнения (1), обращающихся в нуль на границе.

Лемма. Пусть u является решением уравнения

$$L[u]=f, \qquad c\leqslant 0, \tag{1'}$$

где оператор L предполагается равномерно эллиптическим, т. е. удовлетворяющим условиям а) и б). Предположим, что решение u и его первые производные непрерывны в $G+\Gamma$ и что u обращается в нуль на Γ. Пусть область G ограничена, имеет на границе непрерывно изменяющуюся касательную плоскость и обладает следующим свойством: существует такая положительная постоянная R, что для любой точки Q на границе Γ можно найти шар радиуса R, пересечение которого с областью $G+\Gamma$ состоит из одной только точки Q. Тогда в любой точке границы

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\leqslant k_2 \sup|f| \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{9}$$

где k_2 — постоянная, зависящая только от m, M и G.

Доказательство. Пусть Q — произвольная точка границы. Так как u обращается в нуль на границе Γ и

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\leqslant\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|,$$

---

[1]) Заметим, что рассматриваемое общее эллиптическое уравнение второго порядка и уравнение Лапласа имеют одни и те же регулярные граничные точки. См. Олейник О. А., О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа, *Матем. сб.* 24 (66), (1949), 3—14, а также Миранда [1]. — *Прим. ред.*

то достаточно в точке Q оценить производную по внутренней нормали $\partial u/\partial n$. Пусть w_Q — построенный выше сильный барьер. Из построения функции w_Q ясно, что в точке Q

$$\left|\frac{\partial w_Q}{\partial n}\right| \leqslant k_2$$

с некоторой постоянной k_2, зависящей только от m, M и G и не зависящей от выбора граничной точки Q. Положим $v = w_Q \sup|f|$; ясно, что

$$L[v \pm u] \leqslant 0.$$

Так как u обращается в нуль на границе, то, применяя принцип максимума к функциям $v \pm u$, мы находим, что в области G

$$|u| \leqslant v.$$

Обе функции u и v равны нулю в Q, и, следовательно, в этой точке

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leqslant \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| \leqslant k_2 \sup|f|,$$

откуда непосредственно следует неравенство (9).

4. Некоторые свойства решений уравнения $L[u] = f$. Мы будем здесь предполагать, что функция f принадлежит классу C_α и что в области G выполняются условия а), б), в), сформулированные в начале этого параграфа. Для того чтобы были справедливы любые утверждения, касающиеся решений в замкнутых подобластях G, те же самые требования должны выполняться только в любой замкнутой подобласти.

Сначала мы получим следующее свойство: *если u есть дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (1), *то вторые производные этого решения удовлетворяют условию Гёльдера в любой замкнутой подобласти G.*

Достаточно установить этот факт для шаров, лежащих в G. В замкнутом шаре S, лежащем в G, мы запишем уравнение (1) в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i = f - cu.$$

Согласно теореме, доказанной на стр. 338, в S существует решение v уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}v_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = f - cu,$$

совпадающее с u на границе. Кроме того, вторые производные функции v удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α в некотором

меньшем концентрическом шаре. Но решение v этого уравнения единственно; следовательно, $u \equiv v$, и вторые производные u удовлетворяют условию Гёльдера. Начиная с этого места, мы будем предполагать, что все решения обладают этим свойством. Применяя внутреннюю оценку (4), мы сразу получаем аналог теоремы о компактности для гармонических функций (§ 2, п. 3).

Любое равномерно ограниченное множество решений уравнения (1) *в G содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любой замкнутой подобласти B области G.*

Кроме того, *предел равномерно сходящейся последовательности решений уравнения* (1) *сам является решением.*

Мы можем сделать еще некоторые выводы относительно решений уравнения (1′). В этом случае справедлива внутренняя оценка (4′) и, следовательно, мы имеем теорему, аналогичную теореме Вейерштрасса о сходимости для гармонических функций (см. § 2, п. 3).

Последовательность решений u_n уравнения (1′), *непрерывных в замыкании области G, с равномерно сходящимися граничными значениями φ_n равномерно сходится к некоторому решению этого уравнения u, принимающему граничные значения $\varphi = \lim \varphi_n$.*

Этот результат получается, если применить оценку (4′) к разностям $u_n - u_m$:

$$\| \widehat{u_n - u_m} \|_{2+\alpha} \leqslant K_0' \| \varphi_n - \varphi_m \|_0' \to 0.$$

Внутреннюю оценку (4) можно также использовать при обобщении одного из основных свойств гармонических функций на решения уравнения (1). *Любое решение уравнения* (1) *бесконечно дифференцируемо, если функция f и коэффициенты уравнения бесконечно дифференцируемы.* Из аналитичности функции f и коэффициентов следует аналитичность любого решения; однако мы здесь не будем это доказывать (см. ссылки в следующем параграфе).

Мы докажем теорему о дифференцируемости в следующей точной форме[1]).

Если функция f и коэффициенты уравнения принадлежат классу $C_{m+\alpha}$, где m — неотрицательное целое число, $0 < \alpha < 1$, то в любой замкнутой подобласти B любое дважды дифференцируемое решение принадлежит классу $C^B_{m+2+\alpha}$.

Для случая $m = 0$ доказательство уже было дано. Сейчас мы проведем доказательство для $m = 1$ (для $m > 1$ все рассуждения можно просто повторить). Пусть B' и B'' — замкнутые подобласти

[1]) См. Хопф [4], где дано доказательство теоремы о дифференцируемости (а также об аналитичности решений аналитического уравнения), в котором не использована теория существования решений краевой задачи для случая $m = 0$. См. также приложение 5 в работе: Агмон, Дуглис, Ниренберг [1].

области G, такие, что они содержат внутри себя подобласти B и B' соответственно. Пусть число $h_0 > 0$ так мало, что для $h \leqslant h_0$ и для всех точек $P:(x_1, \ldots, x_n)$ области B' точки $P_h:(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n)$ лежат в B''. Мы вычтем из уравнения (1), написанного для точки P, то же самое уравнение, написанное для точки P_h, и разделим разность на h. Введем для конечно-разностных отношений при фиксированном h следующие обозначения:

$$u^h = \frac{1}{h}(u(P_h) - u(P)), \quad a_{ik}^h = \frac{1}{h}(a_{ik}(P_h) - a_{ik}(P)),$$

$$b_i^h = \frac{1}{h}(b_i(P_h) - b_i(P)), \quad c^h = \frac{1}{h}(c(P_h) - c(P)),$$

$$f^h = \frac{1}{h}(f(P_h) - f(P)),$$

а через L^h обозначим оператор, коэффициентами которого являются конечно-разностные отношения для коэффициентов исходного оператора L. Тогда мы можем записать полученное в результате этих операций уравнение в виде

$$L[u^h(P)] = -L^h[u(P_h)] + f^h \equiv F_h. \tag{10}$$

Так как f и коэффициенты уравнения принадлежат $C_{1+\alpha}$, их конечно-разностные отношения можно записать в виде интегралов, например,

$$a_{ik}^h = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} a_{ik}(P_{th})\, dt,$$

где P_{th} — точка с координатами $(x_1 + th, x_2, \ldots, x_n)$, и, следовательно, эти отношения принадлежат классу $C_\alpha^{B'}$. Кроме того, так как решение u принадлежит $C_{2+\alpha}^{B''}$, правая часть F_h (в которую входят производные решения u в точках области B'') принадлежит $C_\alpha^{B'}$. Далее,

$$\|F_h\|_\alpha^{B'} \leqslant K_4,$$

где K_4 — постоянная, *не зависящая от* h. Рассматривая функции u^h как решения уравнения (10), мы можем применить к ним внутреннюю оценку (4), причем B будет замкнутой подобластью области B'; мы получим, что

$$\|u^h\|_{2+\alpha}^B \leqslant K_5,$$

где K_5 — постоянная, *не зависящая от* h.

Из этой оценки следует, что существует такая последовательность $\{h_n\} \to 0$, для которой последовательности $\{u^{h_n}\}$, $\{u_i^{h_n}\}$, $\{u_{ik}^{h_n}\}$ равномерно сходятся в B к некоторой функции v и ее производным v_i, v_{ik} соответственно. Кроме того, функция v принадлежит классу $C_{2+\alpha}^B$.

Но при $h \to 0$ функция u^h сходится просто к u_{x_1}. Следовательно, мы доказали, что u_{x_1} принадлежит классу $C^B_{2+\alpha}$. Аналогично мы можем показать, что производная u_{x_i} принадлежит $C^B_{2+\alpha}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), т. е. что u принадлежит $C^B_{3+\alpha}$.

Этот метод легко можно применить к общему нелинейному уравнению второго порядка

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_1, u_2, \ldots, u_{nn}) = 0,$$

которое является эллиптическим, т. е. для которого квадратичная форма

$$\sum_{i, k=1}^{n} F_{u_{ik}} \xi_i \xi_k$$

всюду является положительно определенной. Кроме того, применяя теорему о дифференцируемости решений линейных эллиптических уравнений (стр. 343), мы можем легко показать, что любое решение u нелинейного уравнения, принадлежащее $C_{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, является бесконечно дифференцируемым, если функция F обладает производными всех порядков по всем аргументам. На самом деле было показано, что это утверждение справедливо, даже если u принадлежит только C_2[1]). Наконец, решение является аналитическим, если функция F аналитическая (см. следующий пункт).

5. Дальнейшие результаты, касающиеся эллиптических уравнений; поведение вблизи границы. В предыдущем пункте мы с помощью неравенств Шаудера показали, что решение эллиптического уравнения второго порядка обладает большой гладкостью, если коэффициенты уравнения достаточно гладки и если с самого начала предполагалась некоторая гладкость этого решения.

Вопрос о дифференцируемости и аналитичности решений дифференциальных уравнений рассматривался многими математиками, начиная с С. Н. Бернштейна, которому принадлежит фундаментальная работа [1] об уравнениях второго порядка. На дальнейшие исследования оказала большое влияние работа Хопфа [4]. В этой работе Хопф применяет „параметрикс", чтобы получить интегральные представления для производных решения. (Параметрикс — фундаментальное решение дифференциального уравнения, содержащего только члены второго порядка с постоянными коэффициентами, равными значениям соответствующих коэффициентов заданного уравнения в некоторой фиксированной точке.) При доказательстве аналитичности решения нелинейного уравнения эти формулы интегрального предста-

[1]) См. Ниренберг [3] и [1]. См. также Морри [4].

вления распространяются на комплексные значения независимых переменных[1]).

Морри [2] доказал аналитичность решений общих нелинейных эллиптических уравнений произвольного порядка с помощью интегральных формул, распространенных на комплексную область. Кроме того, он доказал для таких уравнений, что решение задачи Дирихле аналитично в окрестности границы, если все данные предполагаются аналитическими. Фридман [1] установил аналогичные результаты, получая оценки для всех производных решения u и доказывая сходимость ряда Тейлора к функции u.

В указанных выше доказательствах аналитичности с самого начала предполагается некоторая гладкость решения. В случае линейных эллиптических уравнений произвольного порядка дифференцируемость решений вплоть до границы при очень слабых ограничениях была доказана для весьма широкого класса граничных условий. Мы отсылаем читателя к работе Ниренберга [2], где имеются дальнейшие ссылки. Для нелинейных уравнений предстоит еще много работы по ослаблению предположений о гладкости. В случае двух независимых переменных работу в этом направлении начал Морри [1, 3]. Недавно появились работы де Джорджи [1], Нэша [1] и Мозера [1], касающиеся случая большего числа измерений[2]). Мы отметим также интересную работу Хейнца [2] об уравнениях Монжа — Ампера, в которой обобщаются результаты Г. Леви (см. ссылки в работе Хейнца) на неаналитические уравнения.

Рассматривая уравнения общего типа, Хёрмандер [4][3]) охарактеризовал дифференциальные операторы L с постоянными коэффициентами, такие, что любое решение u уравнения $L[u]=f$ бесконечно дифференцируемо, если функция f бесконечно дифференцируема. Хёрмандер [2] и Мальгранж [2] обобщили эти результаты на линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Теперь мы переходим к вопросу о регулярности вплоть до границы решений дифференциальных уравнений, удовлетворяющих дифференциальным условиям на границе. Хёрмандер [3] рассматривал решения уравнения $L[u]=f$ с постоянными коэффициентами в полупространстве, удовлетворяющие дифференциальным граничным условиям (тоже с постоянными коэффициентами) на плоской границе. Он охарактеризовал операторы и граничные условия, такие, что решение

[1]) В 1937 г. И. Г. Петровский впервые доказал аналитичность решений для общих нелинейных систем эллиптических уравнений, которые теперь часто называют эллиптическими по Петровскому. См. работы И. Г. Петровского *ДАН СССР*, **17** (1937), 339—342; *Матем. сб.*, 5 (47), (1939), 3—70. — *Прим. ред.*

[2]) См. Ниренберг Л., *УМН*, XVIII, вып. 4 (1963), 101—118. — *Прим. ред.*

[3]) См. также **Шилов Г. Е.**, *УМН*, XIV, 5 (1959), 3—44. — *Прим. ред.*

бесконечно дифференцируемо вплоть до границы, если заданные функции (правая часть f и значения граничных операторов, действующих на функцию u) бесконечно дифференцируемы. Для линейных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами дифференцируемость вплоть до границы решений, удовлетворяющих граничным условиям, была доказана для широкого класса граничных условий. Случай граничных условий типа Дирихле освещен в работе Ниренберга [6].

В некоторых так называемых „задачах со свободной границей" частью задачи является определение области, в которой существует решение эллиптического уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Такие задачи возникают в газовой динамике и, конечно, в теории волн на поверхности воды. В таком случае надо не только доказать, что решение аналитично в окрестности неизвестной границы, но и установить, что сама граница аналитическая. Фундаментальная работа по этим вопросам принадлежит Г. Леви [2] [1]).

В заключение этого пункта мы покажем, как можно распространить теоремы предыдущего пункта о дифференцируемости на решения задачи Дирихле и доказать их дифференцируемость вплоть до границы. Так как речь идет о локальном поведении функции, мы будем считать, что некоторая часть границы Γ_1 лежит на плоскости, например на плоскости $x_n = 0$, и установим дифференцируемость решения на Γ_1 и в окрестности Γ_1, причем предполагается, что Γ_1 — открытое множество на плоскости $x_n = 0$. Для гладкой границы все можно свести к такому случаю с помощью некоторого локального преобразования координат. Вычитая соответствующую функцию, мы можем всегда перейти к случаю, когда функция u обращается в нуль на Γ_1.

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемое решение u уравнения (1) в области G, предполагая, что Γ_1 лежит на границе G. Предположим, что выполняются условия а), б), в), сформулированные в начале § 7, и что функция u принадлежит классу $C_{1+\alpha}$ в $G + \Gamma_1$ и обращается в нуль на Γ_1. Тогда мы имеем следующую теорему.

Если правая часть f и коэффициенты уравнения принадлежат классу $C_{m+\alpha}$, *где m — неотрицательное целое число и* $0 < \alpha < 1$, *то в любой ограниченной подобласти B, замыкание которой лежит в $G + \Gamma_1$ функция u принадлежит классу $C_{m+2+\alpha}$.*

Эта теорема включает как частный случай аналогичную теорему на стр. 343.

Заметим сначала, что в силу указанной теоремы (на стр. 343) нашу теорему достаточно доказать локально, т. е. для малых областей B, например, в случае, когда B — малый полушар с центром на Γ_1. Мы можем также предполагать, что коэффициент c обращается

[1]) См. также Гарабедян, Г. Леви и Шиффер [1].

в нуль; этого можно добиться, если разделить u на положительное решение однородного уравнения в области B. Существует такая подобласть A области G, обладающая гладкой границей, что замыкание B содержится в $A+\Gamma_1$, а замыкание A лежит в $G+\Gamma_1$. Пусть ζ — функция, бесконечно дифференцируемая в области A, равная единице в точках области B и равная нулю вместе со всеми своими производными в тех граничных точках A, которые лежат в области G.

Сначала мы докажем теорему для $m=0$. Положим $v=\zeta u$; тогда легко видеть, что функция $L[v]$ принадлежит в замыкании A классу C_α. Применяя основные теоремы существования и единственности (стр. 334 и 337), мы видим, что v принадлежит $C^A_{2+\alpha}$, так что u принадлежит $C^B_{2+\alpha}$. Теперь мы укажем идею доказательства для $m=1$. Следуя доказательству теоремы о гладкости на стр. 343, мы рассмотрим конечно-разностное отношение u^h, причем разности берутся по направлениям, параллельным первым $n-1$ осям, т. е. параллельным плоскости, в которой лежит Γ_1. Функция u^h удовлетворяет уравнению

$$L[u^h(P)] = -L^h[u(P_h)] + f^h.$$

Положим $v_h=\zeta u^h$; легко видеть, что норма $\|L[v_h]\|^A_{2+\alpha}$ ограничена постоянной, не зависящей от h, и так же, как на стр. 344, получается, что функции u_{x_i}, $i=1, \ldots, n-1$, принадлежат классу $C^B_{2+\alpha}$. Итак, все производные u вида $\partial^2 u/\partial x_i\,\partial x_j$, $i<n$, $j\leqslant n$, принадлежат $C^B_{1+\alpha}$. С помощью самого дифференциального уравнения мы можем выразить производную $\partial^2 u/\partial x_n^2$ через эти производные и производные более низкого порядка и установить, что она тоже принадлежит $C^B_{1+\alpha}$. Таким образом, $u\in C^B_{3+\alpha}$. Для $m>1$ эти рассуждения также применимы.

Аналогичным образом можно доказать дифференцируемость вплоть до любого порядка решения нелинейного уравнения $F=0$ (стр. 345), если это решение обращается в нуль на границе и принадлежит классу $C_{2+\alpha}$, а граница и функция F достаточно гладки. Общие результаты в этом направлении приведены в работе Агмона, Дуглиса и Ниренберга [1].

§ 8. Решение уравнений Бельтрами

В гл. III, § 2 мы показали, что задача о локальном приведении любого эллиптического уравнения

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+\ldots=0$$

к виду

$$u_{\sigma\sigma}+u_{\rho\rho}+\ldots=0$$

с помощью преобразования $\sigma(x, y)$, $\rho(x, y)$ эквивалентна задаче о нахождении такого решения уравнений Бельтрами

$$\sigma_x = \frac{b\rho_x + c\rho_y}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad -\sigma_y = \frac{a\rho_x + b\rho_y}{\sqrt{ac - b^2}}, \tag{1}$$

для которого $\sigma_x\rho_y - \sigma_y\rho_x \neq 0$. В этом параграфе мы построим такое решение[1]) в предположении, что a, b, c удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$.

Для любой дифференцируемой комплекснозначной функции w переменных x и y, которую мы обозначаем через $w(z)$ $(z = x + iy)$, введем формальные операторы дифференцирования

$$\frac{\partial w}{\partial z} \equiv w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \equiv w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Ясно, что эти операторы перестановочны и что для них справедливы обычные правила дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u(z)\,w(z)\right) = uw_z + u_z w;$$

аналогичная формула имеет место для $\partial/\partial\bar{z}$. Если f — дифференцируемая комплекснозначная функция w, то

$$[f(w(z))]_z = f_w w_z + f_{\bar{w}}\bar{w}_z$$

и

$$[f(w(z))]_{\bar{z}} = f_w w_{\bar{z}} + f_{\bar{w}}\bar{w}_{\bar{z}}.$$

Тождество Грина принимает вид

$$\int\int\left(u_z + w_{\bar{z}}\right)dx\,dy = \frac{i}{2}\oint\left(u\,d\bar{z} - w\,dz\right), \tag{2}$$

где $dz = dx + i\,dy$, $d\bar{z} = dx - i\,dy$, а оператор Лапласа Δw равен $4w_{z\bar{z}}$. Утверждение, что $w(z)$ является аналитической функцией, может быть выражено так:

$$w_{\bar{z}} = 0.$$

Рассмотрим уравнения Бельтрами (1) и положим

$$w = \sigma + i\rho.$$

---

[1]) Результат и идея доказательства принадлежат Корну и Лихтенштейну. Данный здесь вариант доказательства был независимо найден Берсом и Чжэнь Шэн-шэнем. Как показал Морри, уравнения Бельтрами (1) и (3) можно решить в обобщенном смысле, если $\mu(z)$ — измеримая функция, $|\mu| \leqslant \theta < 1$. Ссылки на литературу см. в работе Альфорса и Берса [1]. [См. также книгу Векуа [1]. — *Прим. ред.*]

Мы сразу можем получить уравнения

$$2w_{\bar{z}}\sqrt{ac-b^2}=\left(b-ia+i\sqrt{ac-b^2}\right)\rho_x+\left(c-ib-\sqrt{ac-b^2}\right)\rho_y,$$
$$2w_z\sqrt{ac-b^2}=\left(b+ia+i\sqrt{ac-b^2}\right)\rho_x+\left(c+ib+\sqrt{ac-b^2}\right)\rho_y.$$

Простой подсчет показывает, что коэффициенты при ρ_x и ρ_y в правых частях этих уравнений пропорциональны, и мы видим, что

$$\frac{w_{\bar{z}}}{w_z}=\frac{c-a-2ib}{c+a+2\sqrt{ac-b^2}},$$

или

$$w_{\bar{z}}=\mu w_z,\quad \mu=\frac{c-a-2ib}{c+a+2\sqrt{ac-b^2}}. \tag{3}$$

Легко видеть, что уравнения (1) можно также получить из уравнения (3), поэтому выражения (1) и (3) эквивалентны. Функция μ удовлетворяет условию Гёльдера (см. § 1, п. 2) в силу свойств коэффициентов a, b, c, а ее абсолютная величина меньше чем 1.

Мы выразим условие $\sigma_x\rho_y-\sigma_y\rho_x\neq 0$ через функцию $w=\sigma+i\rho$ и покажем, что достаточно найти такое решение w уравнения (3), что $w_z\neq 0$ в рассматриваемых точках. Заметим, что

$$\sigma_x\rho_y-\sigma_y\rho_x=\frac{a\rho_x^2+2b\rho_x\rho_y+c\rho_y^2}{\sqrt{ac-b^2}};$$

отсюда видно, что наше условие эквивалентно условию $\sigma_x^2+\sigma_y^2+$ $+\rho_x^2+\rho_y^2\neq 0$, а для решения уравнения (3) это можно выразить как

$$w_z\neq 0.$$

Из формы (3) уравнений Бельтрами следуют многие весьма специальные свойства решений. Заметим сначала, что если f — аналитическая функция и w является решением уравнения (3), то $f(w(z))$ также является решением, так как

$$f_{\bar{z}}-\mu f_z=f_w\left(w_{\bar{z}}-\mu w_z\right)=0.$$

Обратно, если w — такое частное решение уравнения (3), которое непрерывно и взаимно однозначно отображает область G плоскости z в некоторую область G' плоскости w, причем $w_z\neq 0$, то любое другое решение v уравнения (3) в области G' является аналитической функцией w в области G'. Действительно, из уравнения (3) мы получаем

$$0=v_{\bar{z}}-\mu v_z=v_w\left(w_{\bar{z}}-\mu w_z\right)+v_{\bar{w}}\left(\overline{w}_{\bar{z}}-\mu\overline{w}_z\right)=v_{\bar{w}}\overline{w}_{\bar{z}}(1-|\mu|^2),$$

так что $v_{\bar{w}}=0$.

Таким образом, если мы имеем частное решение w, осуществляющее указанное отображение, то задачу об отыскании другого реше-

ния, удовлетворяющего другим условиям (например, на границе), можно свести к нахождению аналитической функции $f(w)$, удовлетворяющей условиям, которые являются аналогами условий, наложенных на решение. Например, задача об отыскании в круге S, лежащем в области G, решения уравнения (3), имеющего на границе заданную действительную часть и принимающего в точке P заданное значение, сводится к задаче об отыскании аналитической функции в области S' — образе S, причем она должна иметь заданную действительную часть на границе и заданное значение в P'. Следовательно, мы можем считать, что задача решена.

Чтобы построить то частное решение уравнения (3), которое дает требуемое отображение, по крайней мере в малой окрестности, мы должны доказать следующую теорему.

Если функция $\mu(z)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* α *в окрестности точки* $z=0$ *и* $|\mu(z)|<1$, *то уравнение* (3) *имеет в окрестности начала координат решение* $w(z)$, *такое, что* $w_z(0)\neq 0$, *а производные функции* $w(z)$ *удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* α.

Достаточно доказать теорему в предположении, что

$$\mu(0)=0.$$

Действительно, если мы введем новую переменную $\zeta=z+\mu(0)\bar{z}$, то

$$w_z=w_\zeta+w_{\bar{\zeta}}\overline{\mu(0)},\qquad w_{\bar{z}}=w_\zeta\mu(0)+w_{\bar{\zeta}},$$

и уравнение (3) перейдет в уравнение

$$w_{\bar{\zeta}}=\hat{\mu}(\zeta)\,w_\zeta,$$

где

$$\hat{\mu}(\zeta)=\frac{\mu(z)-\mu(0)}{1-\overline{\mu(0)}\,\mu(z)}.$$

Заметим, что если $|\mu|<1$, то якобиан преобразования $z\to\zeta$ положителен и $|\hat{\mu}|<1$. Кроме того, функция $\hat{\mu}(\zeta)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и $\hat{\mu}(0)=0$.

Чтобы доказать теорему, мы сначала исследуем уравнение $u_{\bar{z}}=f$, предполагая, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α в круге $S_r: |z|<r$. Полагая

$$\pi v=\iint_{S_r} f(\xi,\eta)\log|\zeta-z|\,d\xi\,d\eta$$

и учитывая, что $\Delta v=4(\partial/\partial\bar{z})(\partial/\partial z)\,v=f(\xi,\eta)$, мы приходим к следующим леммам.

Лемма 1. *Функция*

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta)$$

имеет в S_r непрерывные частные производные, которые определяются формулами

$$u_{\bar z}(z) = f(z), \quad u_z(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta,$$

так что и является частным решением уравнения $u_{\bar z} = f$.

Мы предоставляем читателю доказательство этой леммы, аналогичное доказательству второй теоремы из § 1, п. 2. Там была доказана дифференцируемость потенциала распределения масс с плотностью, удовлетворяющей условию Гёльдера, и получены выражения для производных.

Лемма 2. *Пусть функция $f(z)$ в круге S_r удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом H. Положим*

$$p(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Тогда существует такая постоянная C, зависящая только от α, что

$$|p(z)| \leqslant CHr^{\alpha}, \tag{4}$$

и функция $p(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом CH.

Доказательство. Мы получим оценку (4), взяв в выражении для $p(z)$ абсолютную величину под знаком интеграла и использовав неравенство

$$|f(\zeta) - f(z)| \leqslant H\,|\zeta - z|^{\alpha}.$$

Чтобы доказать, что функция $p(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера, берем фиксированные в S_r значения z_1 и $z_3 \neq z_1$ и полагаем $\delta = |z_1 - z_3|$. Пусть z_2 — точка S_r, удовлетворяющая условиям $|z_2 - z_1| \leqslant \delta$, $|z_2 - z_3| \leqslant \delta$ и $r - |z_2| \geqslant \delta/10$. Покажем, что для некоторой константы $\tilde C_1$ справедливо неравенство $|p(z_i) - p(z_2)| \leqslant \tilde C H \delta^{\alpha}$, $i = 1, 3$; из него следует требуемое неравенство $|p(z_1) - p(z_3)| \leqslant 2\tilde C H \delta^{\alpha}$. Мы рассмотрим только случай $i = 1$:

$$p(z_1) - p(z_2) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r} g(\zeta)\, d\xi\, d\eta, \tag{5}$$

где

$$g(\zeta) \equiv \frac{f(z_1) - f(\zeta)}{(z_1 - \zeta)^2} - \frac{f(z_2) - f(\zeta)}{(z_2 - \zeta)^2}.$$

Пусть область Δ_1 (с границей $\dot{\Delta}_1$) представляет собой пересечение S_r и круга с центром в точке z_1 и радиусом $2\delta = 2|z_1 - z_3|$, а Δ_2 — дополнение к Δ_1 в S_r. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_1} |g|\, d\xi\, d\eta \leqslant \frac{H}{\pi} \iint\limits_{|\zeta - z_1| \leqslant 2\delta} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{2-\alpha}} + \frac{H}{\pi} \iint\limits_{|\zeta - z_2| \leqslant 3\delta} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_2|^{2-\alpha}} \leqslant C_1 H\delta^{\alpha},$$

где C_1 — постоянная, зависящая только от α. Чтобы оценить интеграл от g по области Δ_2, заметим, что

$$g(\zeta) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_2 - \zeta)^2} + (f(z_1) - f(\zeta))\left[\frac{1}{(z_1 - \zeta)^2} - \frac{1}{(z_2 - \zeta)^2}\right] \equiv$$
$$\equiv \frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z_2 - \zeta)^2} + \frac{(f(z_1) - f(\zeta))(z_2 - z_1)}{(z_1 - \zeta)^3} \frac{z_1 - \zeta}{z_2 - \zeta}\left(1 + \frac{z_1 - \zeta}{z_2 - \zeta}\right) \equiv$$
$$\equiv g_1(\zeta) + g_2(\zeta);$$

тогда

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_2} g_1(\zeta)\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{\pi}(f(z_1) - f(z_2)) \iint\limits_{\Delta_2} \frac{d\xi\, d\eta}{(z_2 - \zeta)^2}.$$

Согласно тождеству Грина (2), при $u = 1/(z_2 - \zeta)$, $w = 0$, мы имеем

$$\iint\limits_{\Delta_2} \frac{d\xi\, d\eta}{(z^2 - \zeta)^2} = \frac{i}{2} \oint\limits_{|\zeta| = r} \frac{d\bar{\zeta}}{z_2 - \zeta} - \frac{i}{2} \oint\limits_{\dot{\Delta}_1} \frac{d\bar{\zeta}}{z_2 - \zeta} = -\frac{i}{2}\int\limits_{\dot{\Delta}_1} \frac{d\bar{\zeta}}{z_2 - \zeta},$$

так как интеграл по $|\zeta| = r$ обращается в нуль. Таким образом,

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_2} g_1\, d\xi\, d\eta\right| \leqslant \frac{H}{2\pi}\delta^{\alpha} \oint\limits_{\dot{\Delta}_1} \frac{|d\bar{\zeta}|}{|z_2 - \zeta|} \leqslant C_2 H\delta^{\alpha}, \tag{6}$$

где C_2 — абсолютная константа, так как $|z_2 - \zeta| \geqslant \delta/10$ для $\zeta \in \dot{\Delta}_1$.

Наконец, заметим, что в области Δ_2

$$\left|\frac{z_1 - \zeta}{z_2 - \zeta}\right| \leqslant 2,$$

так что

$$|g_2(\zeta)| \leqslant \frac{6H\delta}{|z_1 - \zeta|^{3-\alpha}}$$

и

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_2} |g_2(\zeta)|\, d\xi\, d\eta \leqslant \frac{6H\delta}{\pi} \iint\limits_{|\zeta - z_1| \geqslant 2\delta} \frac{d\xi\, d\eta}{|z_1 - \zeta|^{3-\alpha}} \leqslant C_3 H\delta^{\alpha},$$

где C_3 — постоянная, зависящая только от α. Это вместе с формулами (5) и (6) дает требуемое неравенство

$$|p(z_1)-p(z_2)| \leqslant (C_1+C_2+C_3)\,H\,|z_1-z_2|^{\alpha}.$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему. Предположим, что w — искомое решение; тогда, в силу леммы 1, функция w_z отличается от

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r}\frac{\mu(\zeta)\,w_z(\zeta)-\mu(z)\,w_z(z)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta$$

на аналитическую функцию. Взяв в качестве этой аналитической функции константу, равную единице, мы решаем уравнение для w_z:

$$w_z=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r}\frac{\mu(\zeta)\,w_z(\zeta)-\mu(z)\,w_z(z)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta+1.$$

Тогда легко получается w; как будет показано в конце параграфа, оно удовлетворяет уравнению (3).

Пусть $C(r,\alpha)$ — множество комплекснозначных функций $\omega(z)$, определенных в S_r и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\alpha<1$. Для функций ω из $C(r,\alpha)$ мы введем норму

$$\|\omega\|_r=\sup|\omega(z)|+r^{\alpha}\sup_{z_1\neq z_2}\frac{|\omega(z_1)-\omega(z_2)|}{|z_1-z_2|^{\alpha}};$$

тогда $C(r,\alpha)$ будет банаховым пространством. Легко видеть, что для любых функций ω и τ из $C(r,\alpha)$

$$\|\omega\tau\|_r\leqslant\|\omega\|_r\|\tau\|_r.$$

Пусть теперь $\mu(z)$ — заданная в S_r функция; она удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и, кроме того,

$$\mu(0)=0.$$

Мы определим оператор T в $C(r,\alpha)$ равенством

$$T[\omega]=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r}\frac{\mu(\zeta)\,\omega(\zeta)-\mu(z)\,\omega(z)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta.$$

Ясно, что T — линейный оператор и, в силу леммы 2,

$$\|T[\omega]\|_r\leqslant Kr^{\alpha}r^{-\alpha}\|\mu\omega\|_r+r^{\alpha}Kr^{-\alpha}\|\mu\omega\|_r\leqslant 2K\|\mu\|_r\|\omega\|_r.$$

Так как $\mu(0)=0$, то норма $\|\mu\|_r$ стремится к нулю при $r\to 0$. Поэтому для достаточно малых r, например для $r<r_0$, мы имеем

$$2K\|\mu\|_r<\frac{1}{2},$$

так что

$$\|T[\omega]\|_r<\frac{1}{2}\|\omega\|_r\qquad\text{для}\quad r<r_0. \tag{7}$$

Теперь мы хотим решить уравнение

$$\omega = T[\omega] + 1 \equiv \hat{T}[\omega]$$

в круге S_r, $r < r_0$. В силу неравенства (7), класс функций ω из $C(r, \alpha)$ таких, что

$$\|\omega\|_r < 2,$$

при преобразовании $\hat{T}$ переходит в себя и преобразование $\hat{T}$ является сжимающим, так как

$$\|\hat{T}[\omega_1] - \hat{T}[\omega_2]\|_r \leqslant \frac{1}{2}\|\omega_1 - \omega_2\|_r.$$

Известно, что функции ω_n, определенные рекуррентной формулой

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{n+1} = T[\omega_n] + 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

сходятся по норме $\| \quad \|_r$ к функции ω, удовлетворяющей уравнению

$$\omega = T[\omega] + 1,$$

причем $\|\omega\|_r < 2$. Кроме того,

$$|\omega(z) - 1| < \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

и, следовательно, $\omega(z) \neq 0$ в S_r.

Мы завершим доказательство, если покажем, что функция

$$w(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S_r} \frac{\mu(\zeta)\,\omega(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta + z$$

обладает требуемыми свойствами. Согласно лемме 1, w имеет непрерывные частные производные, определяемые формулами

$$w_{\bar{z}} = \mu\omega$$

и

$$w_z = T[\omega] + 1 = \omega;$$

следовательно, функция w удовлетворяет уравнению (3) и $w_z \neq 0$. Так как ω принадлежит пространству $C(r, \alpha)$, то производные функции w в S_r удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α.

§ 9. *Краевая задача для некоторого специального квазилинейного уравнения. Метод неподвижной точки Лере — Шаудера*

В этом параграфе мы покажем, как при доказательстве теорем существования применяется один топологический метод. Этот „метод неподвижной точки“, связанный с идеями Пуанкаре, был ясно изло-

жен Биркгофом и Келлогом [1] и превращен в мощное орудие Шаудером и Лере [1]).

Вместо общей теории, развитой Шаудером и Лере, мы воспользуемся только частным результатом, известным под названием теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Если T — непрерывное отображение замкнутого выпуклого компактного множества в банаховом пространстве в себя, то T имеет неподвижную точку.

Эта теорема доказывается в § 15 приложения к этой главе, где определяются „выпуклые компактные множества в банаховом пространстве".

Рассмотрим квазилинейное эллиптическое уравнение

$$A(x, y, z) z_{xx} + 2B(x, y, z) z_{xy} + C(x, y, z) z_{yy} = 0 \qquad (1)$$

в ограниченной области G, граница которой состоит из конечного числа отдельных замкнутых кривых Γ. Предположим, что область G — гладкая (в смысле § 7, п. 1, стр. 333) и что φ — гладкая функция, определенная на границе Γ. Здесь гладкость области G и функции φ можно следующим образом описать в терминах длины дуги s на кривой Γ. Функции $x(s)$, $y(s)$, определяющие граничную кривую, и функция $\varphi(s)$ имеют первые и вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$. При некоторых условиях, наложенных на коэффициенты A, B, C (эти условия будут указаны ниже), мы ищем решение $z(x, y)$ уравнения (1), равное φ на Γ. Согласно принципу максимума, любое решение будет удовлетворять неравенству

$$|z| \leqslant \max |\varphi| = M_0.$$

Поэтому мы будем рассматривать A, B, C, определенные для x, y из $G + \Gamma$ и $|z| \leqslant M_0$, и наложим на них следующие условия:

(а) $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant m(\xi^2 + \eta^2)$ для всех действительных ξ, η;

(б) $|A|$, $|B|$, $|C| \leqslant M$;

(в) A, B, C удовлетворяют по x, y, z условию Гёльдера с показателем α и коэффициентом M. (Здесь m, M и α — некоторые положительные постоянные.)

Применяя теорию Шаудера для линейных эллиптических уравнений, изложенную в § 7, мы докажем следующую теорему существования.

При условиях (а), (б), (в) *и указанных выше условиях, наложенных на область G и функцию φ, существует решение $z(x, y)$ уравнения* (1), *равное φ на Γ. Кроме того, z принадлежит пространству $C_{2+\alpha}$* (см. § 7, п. 1).

---

[1]) См. Лере и Шаудер [1].

Доказательство основано на априорной оценке для решений линейного эллиптического уравнения вида

$$L[u] \equiv a(x, y)\, u_{xx} + 2b(x, y)\, u_{xy} + c(x, y)\, u_{yy} = 0 \qquad (2)$$

в ограниченной области G, граница которой состоит из конечного числа замкнутых кривых с непрерывно вращающейся касательной. Кроме того, мы предположим, что область G обладает следующим свойством: для некоторого положительного числа R и любой точки Q на границе Γ существует круг радиуса R, пересечение которого с $G + \Gamma$ состоит из одной только точки Q. Мы предположим также, что коэффициенты a, b, c удовлетворяют условию Гёльдера по x и y и что уравнение равномерно эллиптическое, т. е. что для некоторых положительных постоянных m и M в области G выполняются неравенства

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \geqslant m(\xi^2 + \eta^2), \quad |a|, |b|, |c| \leqslant M. \qquad (3)$$

Априорная оценка. Пусть u — решение уравнения (2), непрерывное в $G + \Gamma$ вместе со своими первыми производными. Предположим, что в $G + \Gamma$ существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $\bar{u}$, равная u на Γ, причем ее первые и вторые производные в $G + \Gamma$ ограничены величиной K. Тогда существует постоянная k, зависящая только от m, M и G (т. е. не зависящая от коэффициентов), такая, что

$$|u_x|, |u_y| \leqslant kK \qquad (4)$$

всюду в G. Мы установим эту априорную оценку в настоящем параграфе.

Чтобы применить эту общую оценку к нашему нелинейному уравнению, мы заметим сначала, что, в силу предположений о гладкости области G и функции φ, легко построить в $G + \Gamma$ непрерывную функцию $\bar{z}$, равную φ на Γ и такую, что ее первые и вторые производные ограничены по абсолютной величине некоторой постоянной $\bar{K}$ и непрерывны в $G + \Gamma$ и G соответственно[1]). Если теперь мы будем рассматривать искомое решение z уравнения (1) как решение линейного уравнения вида (2) с $a(x, y) = A(x, y, z(x, y))$ и т. д., то, в силу оценки (4), получим

$$|z_x|, |z_y| \leqslant k\bar{K}. \qquad (5)$$

Заметим далее, что если функция z имеет в $G + \Gamma$ непрерывные первые производные, ограниченные величиной $k\bar{K}$, то она удовлетворяет условию Липшица

$$|z(P) - z(Q)| \leqslant \varkappa k\bar{K}\, |P - Q| \quad \text{для всех} \quad P, Q \text{ из } G + \Gamma,$$

[1]) См., например, Миранда [1]. — *Прим. ред.*

где $\varkappa$ — постоянная, зависящая только от области G. Докажем сформулированную выше теорему существования. Рассмотрим банахово пространство C_0 (см. § 7, п. 1) функций z, непрерывных в $G+\Gamma$, с нормой

$$\|z\| = \max |z|.$$

Обозначим через S подмножество функций z из C_0, удовлетворяющих условию

$$|z| \leqslant \max |\varphi|$$

и условию Липшица

$$\frac{|z(P)-z(Q)|}{|P-Q|} \leqslant \varkappa k\overline{K} \quad \text{для всех} \quad P,\ Q \text{ из } G+\Gamma.$$

Легко видеть, что S — компактное выпуклое[1]) множество в C_0.

После этой подготовки мы переходим к типичному итерационному процессу: если в коэффициенты уравнения (1) $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ и $C(x, y, z)$ вместо z подставить некоторую функцию $z(x, y)$ из множества S, то A, B, C перейдут в функции a, b, c, зависящие только от x и y. Из того, что A, B, C удовлетворяют условию Гёльдера [условие (в)], и из оценки (6) следует, что функции a, b, c удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α и с некоторым фиксированным коэффициентом, не зависящим от функции $z(x, y)$.

Если такая функция $z(x, y)$ подставлена в коэффициенты, то можно решить линейное эллиптическое уравнение

$$A(x, y, z(x, y))\, u_{xx} + 2B(x, y, z(x, y))\, u_{xy} + \\ + C(x, y, z(x, y))\, u_{yy} = 0$$

при условии, что функция u на Γ равна φ. Из первой теоремы § 7, п. 2 следует, что это возможно. Здесь мы используем предположения о „гладкости“ G и φ. Решение u единственно; оно принадлежит пространству $C_{2+\alpha}$ и удовлетворяет неравенству $|u| \leqslant \max |\varphi|$. Согласно априорной оценке, u удовлетворяет условию (5) и, следовательно, (6), так что u принадлежит S. Таким образом, преобразование $u=T[z]$, определенное как „разрешающий оператор“ нашего линейного уравнения, является преобразованием S в себя.

Если мы теперь покажем, что преобразование T непрерывно, то, в силу теоремы Шаудера о неподвижной точке, T будет иметь неподвижную точку z. Тогда z принадлежит $C_{2+\alpha}$ и является искомым решением уравнения (1). Чтобы доказать непрерывность преобразования T, рассмотрим последовательность $\{z^{(n)}\}$ функций, принадлежащих S, равномерно сходящуюся к функции z из S, и положим

---

[1]) Определение компактного выпуклого множества см. в приложении, § 15, стр. 402.

$u^{(n)}=T[z^{(n)}]$. Функции $u^{(n)}$ являются решениями уравнений, коэффициенты которых удовлетворяют условиям (а), (б) и равномерно удовлетворяют условию Гёльдера, не зависящему от n. Кроме того, $|u^{(n)}|\leqslant\max|\varphi|$. Применяя оценки Шаудера вплоть до границы, мы видим, что нормы $\|u^{(n)}\|_{2+\alpha}$ равномерно ограничены. Поэтому мы можем выбрать такую подпоследовательность $u^{(n)}$, которая сходится вместе со своими первыми и вторыми производными к некоторой функции u и ее соответствующим производным. Но тогда u удовлетворяет предельному дифференциальному уравнению

$$A(x,\ y,\ z(x,\ y))\,u_{xx}+2B(x,\ y,\ z(x,\ y))\,u_{xy}+$$
$$+C(x,\ y,\ z(x,\ y))\,u_{yy}=0$$

и равняется φ на Γ, т. е. $u=T[z]$. Таким образом, подпоследовательность $\{u^{(n)}\}$ сходится к $T[z]$. Из единственности предельной функции следует, что исходная последовательность $\{u^{(n)}\}$ сходится к $T[z]$; таким образом, установлена непрерывность T.

В заключение этого параграфа мы выведем априорную оценку (4). Наше доказательство делится на две части. Сначала мы покажем, что функции u_x и u_y принимают наибольшее и наименьшее значение на границе. Затем мы установим справедливость неравенства (4) во всех граничных точках, откуда следует, что (4) выполняется всюду в G.

Мы докажем принцип максимума для u_x и u_y в предположении, что коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условию Гёльдера. (Можно дать другое доказательство, опирающееся только на эллиптичность уравнения, т. е. на условие (3).) Достаточно рассмотреть функцию u_x и показать, что ее максимум в любом круге D, лежащем в области G, достигается на границе. (Отсюда затем следует, что также и минимум u_x достигается на границе.)

В случае, когда u имеет непрерывные третьи производные, а коэффициенты a, b, c один раз дифференцируемы, мы разделим уравнение (2) на c, продифференцируем результат по x и получим, что функция $u_1=u_x$ удовлетворяет эллиптическому дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{a}{c}u_{1x}+\frac{2b}{c}u_{1y}\right)_x+u_{1yy}=0,$$

к которому применим принцип максимума из § 6, п. 4; это и дает требуемый результат.

Если коэффициенты a, b, c удовлетворяют только условию Гёльдера в круге D, то мы можем равномерно аппроксимировать их дважды дифференцируемыми функциями $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$, удовлетво-

ряющими равномерно по n условию Гёльдера. В силу теории Шаудера для линейных уравнений, уравнения

$$a^{(n)} u_{xx}^{(n)} + 2b^{(n)} u_{xy}^{(n)} + c^{(n)} u_{yy}^{(n)} = 0$$

с условием $u^{(n)} = u$ на границе D имеют в D решения $u^{(n)}$, равномерно сходящиеся к u. Кроме того, $u_x^{(n)} \to u_x$, $u_y^{(n)} \to u_y$. Так как коэффициенты $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$ дважды дифференцируемы, функции $u^{(n)}$ обладают непрерывными третьими производными (см. § 7, п. 4). Следовательно, можно применить предыдущее рассуждение и сделать вывод, что $\max u_x^{(n)}$, а следовательно, и $\max u_x$, достигается на границе D.

Чтобы показать, что на границе выполняется условие (4), положим $w = u - \bar{u}$. Так как функция w обращается в нуль на Γ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L[w] = -L[\bar{u}] = f$$

и так как, в силу условий, наложенных на $\bar{u}$,

$$|f| \leqslant 3M\bar{K}, \tag{7}$$

функция w и область G удовлетворяют всем условиям леммы, сформулированной в конце § 7, п. 3. Мы делаем вывод, что на Γ

$$|w_x|, \ |w_y| \leqslant 3k_2 M\bar{K},$$

где k_2 — постоянная, зависящая только от m, M и области G. Следовательно,

$$|u_x|, \ |u_y| \leqslant \bar{K} + 3k_2 M\bar{K} \leqslant (1 + 3Mk_2)\bar{K} \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

что и дает требуемое неравенство (4) на границе.

§ 10. Решение эллиптических дифференциальных уравнений с помощью интегральных уравнений

Мы дополним предыдущие параграфы кратким обзором иного метода решения эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными, который является обобщением метода интегральных уравнений, изложенного в § 4, п. 3 [1]).

Применение интегральных уравнений подсказывается общими соображениями функционального анализа, которые по многим поводам явно или неявно применяются в этой книге.

---

[1]) Этот метод, основанный на понятии „параметрикс", был введен Э. Леви [1], а затем Гильбертом (см. [1], стр. 1—65). Его упрощенное изложение, а также полные результаты и доказательства имеются в работе Джона [1].

Мы рассмотрим линейный эллиптический дифференциальный оператор $L[u]=f$ и попытаемся найти обратный оператор

$$u=R[f]=L^{-1}[f],$$

где f — произвольная функция из должным образом определенного функционального пространства (например, функция f непрерывна в $G+\Gamma$), а функция u должна удовлетворять некоторым граничным условиям (например, $u=0$ на Γ, если L — оператор второго порядка).

Дифференциальный оператор $L[u]$ преобразует одну функцию в другую, $L[u]=f$, обычно менее гладкую, например, преобразует дважды непрерывно дифференцируемую функцию в функцию только непрерывную. Точнее, он преобразует функциональное пространство S, к функциям которого он применяется, в более широкое функциональное пространство $\tilde{S}$. Наоборот, обратное преобразование $L^{-1}[f]$ преобразует $\tilde{S}$ в его подпространство S; в этом смысле (как и в более точном смысле, основанном на понятии нормы, см. § 7), это сглаживающее преобразование. С таким сглаживающим преобразованием в принципе проще иметь дело. В нашем случае представление сглаживающего преобразования L^{-1} в виде интегральных операторов, которые могут привести к сходящимся процессам теории Фредгольма для нахождения решения u (см. т. I, гл. III), достигается аналитическими методами.

1. Построение частных решений. Фундаментальные решения. Параметрикс. Сначала мы рассмотрим случай линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно функции $u(x, y)$ двух независимых переменных и предположим, что это дифференциальное уравнение имеет вид

$$L[u]\equiv\Delta u+au_x+bu_y+cu=f, \tag{1}$$

где функции a, b, c, f непрерывно дифференцируемы в $G+\Gamma$.

В случае аналитических коэффициентов a, b, c *вопрос о существовании решений уравнения* (1) в достаточно малых областях G решается положительно с помощью теоремы существования Коши — Ковалевской (гл. I, § 7, п. 4). Однако при меньших ограничениях, наложенных на функции a, b, c, f, доказательство существования хотя бы частного решения уравнения (1) требует уже других методов; например, можно применить следующий метод, принадлежащий Э. Леви.

Мы рассмотрим функцию

$$\psi(x, y; \xi, \eta)=-\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=-\log r, \tag{2}$$

которая называется параметрикс. Это функция x, y и точки-параметра (ξ, η), причем в точке $x=\xi$, $y=\eta$ она имеет характеристиче-

скую особенность, соответствующую главной части Δu оператора $L[u]$. Параметрикс не удовлетворяет дифференциальному уравнению, но функция $L[\psi]$ при $x=\xi$, $y=\eta$, имеет особенность только первого порядка относительно $1/r$.

Интеграл

$$u=\iint_G \psi(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{3}$$

с произвольной непрерывно дифференцируемой функцией $\rho(x, y)$, а также более общее выражение

$$u=\omega(x, y)+\iint_G \psi(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{4}$$

не будут удовлетворять уравнению (1), если ω — трижды непрерывно дифференцируемая в G, а в остальном произвольная функция. Однако, соответствующим образом подбирая функцию ρ при заданном ω, мы сможем построить функцию u, удовлетворяющую уравнению (1).

Чтобы доказать это, подставим выражение (4) в уравнение (1). В силу предположений о дифференцируемости ρ, мы имеем (см. т. I, гл. V, § 14, п. 5)

$$\Delta u=\Delta\omega-2\pi\rho$$

и, следовательно,

$$L[u]=L[\omega]-2\pi\rho+\iint_G (a\psi_x+b\psi_y+c\psi)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Если мы для краткости положим

$$K(x, y; \xi, \eta)=\frac{1}{2\pi}(a\psi_x+b\psi_y+c\psi)=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\left[a(x, y)\frac{x-\xi}{r^2}+b(x, y)\frac{y-\eta}{r^2}+c(x, y)\log r\right] \tag{5}$$

и

$$g(x, y)=\frac{1}{2\pi}(L[\omega]-f),$$

то мы получим для ρ *интегральное уравнение*

$$\rho(x, y)=\iint_G K(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta+g(x, y). \tag{6}$$

К этому уравнению нельзя непосредственно применить теорию Фредгольма, так как в точке $x=\xi$, $y=\eta$ ядро K обращается в беско-

нечность, как $1/r$, и, следовательно, не является интегрируемым с квадратом, но легко видеть, что итерированное ядро

$$K_2(x, y; \xi, \eta) = \iint_G K(x, y; s, t) K(s, t; \xi, \eta)\, ds\, dt$$

интегрируемо с квадратом. Поэтому вместо уравнения (6) мы рассмотрим сначала итерированное интегральное уравнение

$$\rho(x, y) = \iint_G K_2(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + h(x, y), \qquad (7)$$

где

$$h = g + \iint_G K(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Для этого уравнения справедливы теоремы Фредгольма.

Однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (7),

$$\rho(x, y) = \iint_G K_2(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad (8)$$

может иметь решение ρ, не обращающееся тождественно в нуль, только при условии, что

$$\iint_G \left[\iint_G K_2^2(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy\right] d\xi\, d\eta \geqslant 1.$$

Поэтому, если мы выберем область G достаточно малой, так что значение интеграла в левой части неравенства будет меньше 1, то уравнение (8) будет иметь только одно решение $\rho \equiv 0$.

Функция $g(x, y) = (1/2\pi)(L[\omega] - f)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема в G; поэтому то же самое справедливо для функции $h(x, y)$, так как теорема, доказанная в § 1, п. 2, стр. 248 для трех переменных, справедлива также для двух переменных.

Таким образом, из теорем Фредгольма мы делаем вывод: *для достаточно малой области G и произвольной функции h существует решение интегрального уравнения* (7). Это решение непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет исходному интегральному уравнению (6). Действительно, если мы положим

$$v = g + \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad (6')$$

то уравнение (7) означает, что

$$\rho = \iint_G K(v - g)\, d\xi\, d\eta + h.$$

После умножения на K и интегрирования получаем

$$v-g=\iint_G K_2(v-g)\,d\xi\,d\eta+\iint_G Kh\,d\xi\,d\eta,$$

или

$$v=\iint_G K_2 v\,d\xi\,d\eta+h,$$

т. е. функция v также удовлетворяет уравнению (7) и в силу единственности должна совпадать с ρ. Но для $v=\rho$ уравнение (6′) совпадает с интегральным уравнением (6).

Если мы подставим это $\rho(x, y)$ в выражение (4),

$$u=\omega+\iint_G \psi(x, y;\ \xi, \eta)\,\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

то получим, что

$$L[u]=L[\omega]+2\pi\left\{\iint_G K\rho\,d\xi\,d\eta-\rho\right\}=f,$$

т. е. u является решением уравнения (1) с непрерывными в G производными вплоть до второго порядка, зависящим от произвольной функции ω. Таким образом, мы доказали существование решений нашего дифференциального уравнения в достаточно малой области G.

В частности, если мы положим

$$\omega=-\log\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

и выберем в качестве G достаточно малую область G^*, лежащую в окрестности точки (x_0, y_0) и такую, что сама точка (x_0, y_0) исключена из нее с помощью малого круга радиуса δ, то, согласно только что полученному результату, мы найдем в области G^* решение вида

$$u^*(x, y)=-\log\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\\+\iint_{G^*} \psi(x, y;\ \xi, \eta)\,\rho^*(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Легко показать, что при $\delta\to 0$ функция ρ^* стремится к функции ρ, такой, что интеграл

$$\iint_G \psi(x, y;\ \xi, \eta)\,\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

обладает в предельной области G непрерывными производными вплоть до второго порядка. Тогда функция

$$\gamma(x, y;\ x_0, y_0)=-\log\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\\+\iint_G \psi(x, y;\ \xi, \eta)\,\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \qquad (9)$$

удовлетворяет уравнению $L[\gamma] = f$ всюду в G, за исключением точки $x = x_0$, $y = y_0$; кроме того, так как функция $\gamma - \log 1/r$ регулярна всюду в G, то $\gamma(x, y; x_0, y_0)$ является фундаментальным решением уравнения (1).

2. Дальнейшие замечания. Характерная трудность, возникающая при применении этого метода, состоит в том, что ядро полученного интегрального уравнения имеет особенность. В нашем случае эту трудность удалось обойти путем перехода к итерированному интегральному уравнению, но лучше модифицировать метод[1]) так, чтобы его легче было применять. Мы можем заменить введенную выше „параметрикс" ψ другой функцией $\psi'(x, y; \xi, \eta)$, для которой выражение $L[\psi']$ при $x = \xi$, $y = \eta$ имеет особенность более низкого порядка чем $L[\psi]$, и пользоваться далее функцией ψ'.

Метод параметрикс, обобщенный в указанном выше смысле, можно распространить на любое число независимых переменных, а также на дифференциальные уравнения высших порядков и системы уравнений.

Детали и дальнейшие применения этого метода к решению краевых задач читатель может найти в соответствующей литературе[1]).

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ IV

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Относительно краевых задач для общих нелинейных уравнений в случае более чем двух независимых переменных известно мало[2]). Такое уравнение имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn}) = 0, \tag{1}$$

---

[1]) См. Джон [1].

[2]) Мы отсылаем читателя к работам, указанным в п. 5, § 4, и даем здесь несколько дополнительных ссылок. Для случая $n = 2$ получено много результатов. Отметим сначала основную работу Морри [3]. По связанным с ней вопросам см. Ниренберг [3, 1], Морри [4] и библиографию в этих статьях, а также Берс и Ниренберг [1, 2]. В работе Хейнца имеются дальнейшие ссылки, в частности, на работу А. В. Погорелова. По поводу уравнений типа Монжа — Ампера мы уже ссылались в § 7, п. 5 на статью Хейнца [2], где есть ссылки на работу Г. Леви.

Мы отметим также работу А. Д. Александрова [1], касающуюся таких же уравнений в случае большего числа измерений.

В связи с уравнениями дозвукового течения в газовой динамике см. работу Берса [3], которая содержит обширную библиографию.

Относительно большего числа измерений см., кроме того, Кордес [2], см. также работу Финна и Гилбарга [1] и Киселева и Ладыженской [1]. [Обзор результатов имеется в докладе Ниренберга „Некоторые вопросы теории линейных и нелинейных уравнений в частных производных", *УМН*, 18, 4 (1963), 101 — 118. — *Прим. ред.*]

причем мы предполагаем, что F — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих $p=\frac{1}{2}(n^2+n)+2n+1$ аргументов в некоторой p-мерной области.

1. Теория возмущений. Рассмотрим функцию u — такое решение уравнения (1) в гладкой области G (в смысле гл. IV, § 7, п. 1), для которого уравнение (1) является эллиптическим. Без ограничения общности мы можем считать, что $u\equiv 0$; тогда матрица

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\right)$$

должна быть положительно определенной в каждой точке области G. Пусть

$$R(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn})$$

— заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Мы ставим следующий вопрос. *Существует ли при достаточно малых* ε *решение уравнения*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn}) = \\ = \varepsilon R(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn}), \quad (2)$$

равное φ *на* Γ, *для которого* $\|\varphi\|'_{2+\alpha}<\varepsilon$ (см. гл. IV, § 7, п. 1)?

В случае, когда

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\leqslant 0,$$

ответ утвердительный.

Чтобы доказать это утверждение, мы запишем уравнение в виде

$$L[u]\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(x_1 \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,u_{ij}+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_i}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,u_i+ \\ +\frac{\partial F}{\partial u}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,u= \\ =L[u]-F(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn})+ \\ +\varepsilon R(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n, u_{11}, \ldots, u_{nn})\equiv Q[u];$$

таким образом, мы оставляем в левой части уравнения линейные члены, т. е. члены первого порядка в разложении функции F по u и ее производным, а из нелинейных частей составляем оператор $Q[u]$.

Теперь мы с помощью рекуррентной формулы определим последовательность функций u_m, удовлетворяющих условиям

$$L[u_m] = Q[u_{m-1}],$$
$$u_m = \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$
$$u_0 = 0.$$

Существование решения u_m следует из теории Шаудера (гл. IV, § 7, п. 2) и из предположения, что $\partial F/\partial u \leqslant 0$.

С помощью оценок Шаудера (гл. IV, § 7, п. 1) нетрудно показать, что для достаточно малых ε функции u_m сходятся к решению уравнения (2).

Аналогичная теорема о возмущениях для эллиптических уравнений произвольного порядка доказана в работе Агмона, Дуглиса, Ниренберга [1] в качестве примера применения оценок Шаудера к таким уравнениям.

2. Уравнение $\Delta u = f(x, u)$. Мы рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = f(x, u), \quad u = \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3}$$

где функция f определена и имеет непрерывные производные для всех x из $G + \Gamma$ и для всех u.

а) В предположении, что функция f ограничена,

$$|f(x, u)| \leqslant N, \tag{4}$$

мы докажем, что уравнение (3) имеет решение.

Мы будем предполагать, что граница и граничные значения φ гладкие (в смысле гл. IV, § 7, п. 1), и даже, что $\varphi = 0$. Действительно, полагая $u = v + h$, где h — гармоническая функция, равная φ на Γ, мы получим следующую краевую задачу для функции v:

$$\Delta v = f(x, v + h), \qquad v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Если область не является достаточно малой, то решение задачи (3) не обязательно единственно. Рассмотрим, например, в случае одного независимого переменного x уравнение $u_{xx} = f(u)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, где $f(u)$ — ограниченная функция, равная $-u$ для $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Функции $u = \lambda \sin x$, $|\lambda| \leqslant 1$, являются решениями этого уравнения, равными нулю в концах отрезка. Аналогичные примеры можно построить для любого числа измерений.

Прежде чем возвращаться к решению уравнения (3), мы напомним одно неравенство, справедливое для всех функций u, непрерывных в $G + \Gamma$, равных нулю на Γ и обладающих в G непрерывными

первыми и вторыми производными, а именно: *для любой компактной подобласти $\mathcal{A}$ области G мы имеем*

$$\max_{\mathcal{A}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leqslant c \sup_{G} |\Delta u|, \tag{5}$$

где постоянная c зависит от $\mathcal{A}$ и G. (Справедлива и более сильная форма неравенства (5), где область $\mathcal{A}$ заменена на G.) Чтобы установить неравенство (5), мы заметим, что если $K(x-y)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа $\left(K(x) = \Omega |x|^{2-n}\right.$ для $n > 2$, $K(x) = \Omega \log |x|$ для $n = 2$, где Ω — некоторая постоянная, зависящая от n) и если $\zeta(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, тождественно равная 1 в $\mathcal{A}$ и равная нулю на $\mathbf{\Gamma}$ и в некоторой окрестности $\mathbf{\Gamma}$, то

$$u(x) = \int_G \zeta(y) K(x-y) \Delta_y u(y)\, dy - \int_G u(y) \Delta_y (\zeta(y) K(x-y))\, dy,$$
$$x \in \mathcal{A}.$$

Можно показать, применяя результаты гл. IV, § 1, п. 2, что

$$\max_{\mathcal{A}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leqslant C' \sup_{G} |\Delta u| + \sup_{G} |u|,$$

где C' — некоторая константа. Однако, так как функция u обращается в нуль на $\mathbf{\Gamma}$, из неравенства (13) гл. IV, § 6 мы получим, что $|u| \leqslant K \sup |\Delta u|$; если мы подставим это неравенство в предыдущую оценку, то получим (5).

Решение задачи (3) можно получить с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке (см. гл. IV, § 7), но мы дадим другое доказательство, где применяются итерации. Пусть $v(x)$ — решение задачи

$$\Delta v = -N, \qquad v = 0 \quad \text{на} \quad \mathbf{\Gamma},$$

где число N взято из формулы (4). В силу принципа максимума из гл. IV, § 6, п. 4, мы получаем, что $v \geqslant 0$. Положим $k = \sup (\partial f(x, u)/\partial u)$ для всех x из G и $-\max v \leqslant u \leqslant \max v$, так что

$$f(x, u) - f(x, w) - k(u - w) \geqslant 0 \tag{6}$$

для $-\max v \leqslant u \leqslant w \leqslant \max v$.

Мы получим решение задачи (3) как предел последовательности функций u_m, определенных уравнениями

$$L[u_m] \equiv \Delta u_m - k u_m = f(x, u_{m-1}) - k u_{m-1}, \quad u_m = 0 \text{ на } \mathbf{\Gamma}, \quad u_0 = v. \tag{7}$$

Согласно теории Шаудера (гл. IV, § 7, п. 2), такие функции существуют. Сначала мы заметим, что

$$L[u_1] = f(x, v) - kv \geqslant -N - kv = L[v].$$

Применяя принцип максимума, мы видим, что $u_1 \leqslant v$. Из вытекающего отсюда неравенства

$$\Delta u_1 = k(u_1 - v) + f(x, v) \leqslant N = -\Delta v$$

получаем, что $u_1 > -v$, так что

$$-v \leqslant u_1 \leqslant v.$$

По индукции мы покажем, что

$$-v \leqslant u_m \leqslant u_{m-1} \leqslant v \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Убедившись, что неравенство (8) справедливо для $m = 1$, предположим, что оно выполняется для некоторого m. Тогда, согласно (6),

$$L[u_{m+1} - u_m] = f(x, u_m) - f(x, u_{m-1}) - k(u_m - u_{m-1}) \geqslant 0;$$

таким образом, согласно принципу максимума, $u_{m+1} \leqslant u_m$. Следовательно,

$$\Delta u_{m+1} = k(u_{m+1} - u_m) + f(x, u_m) \leqslant N = -\Delta v,$$

так что снова в силу принципа максимума $-v \leqslant u_{m+1}$, т. е. справедливо неравенство (8) для $m+1$; поэтому оно справедливо для всех m.

Функции $|u_m|$ равномерно ограничены и, следовательно, в силу условий (7), то же самое верно относительно значений $|\Delta u_m|$. Из неравенства (5) тогда следует, что первые производные функций u_m, а следовательно, в силу равенства (7), и первые производные от Δu_m, равномерно ограничены по абсолютной величине на всех компактных подмножествах $\mathcal{A}$ множества G. В силу внутренних оценок Шаудера (гл. IV, § 7) вторые производные функций u_m также равномерно ограничены по абсолютной величине и равностепенно непрерывны в любой компактной подобласти. С помощью теоремы Арцела (и обычного диагонального процесса) отсюда получается, что некоторая подпоследовательность $\{u_{m_l}\}$ сходится (вместе со своими производными вплоть до второго порядка) в области G к функции u (и ее соответствующим производным). Но так как последовательность $\{u_m\}$ монотонна, то *вся последовательность* сходится к u. Пусть в формуле (8) $m \to \infty$; мы видим, что $-v \leqslant u \leqslant v$, следовательно, если мы положим $u = 0$ на Γ, то функция u будет непрерывна в $G + \Gamma$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в формуле (7), мы делаем вывод, что u является решением задачи (3).

Легко видеть, что построенное решение u является наибольшим из решений. Действительно, если w — некоторое решение задачи (3), то из принципа максимума следует, что $|w| \leqslant v$, и по индукции, что

$$w \leqslant u_m \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Если бы мы начали итерационный процесс с $u_0 = -v$, мы получили бы наименьшее решение.

б) Рассмотрим снова задачу (3) в более общих предположениях, а именно, считая, что $f(x, u) = f_1(x, u) + f_2(x, u)$, где величина $|f_2|$ ограничена и $\partial f_1/\partial u \geqslant 0$. (Примером может служить встречающийся во многих математических и физических задачах случай, когда $f = e^u$.) Как и раньше, мы можем предполагать, что $\varphi = 0$.

Согласно теореме о конечных приращениях, мы можем записать задачу (3) в виде

$$L[u] = \Delta u - \frac{\partial f_1}{\partial u}(x, \tilde{u})\, u = f_1(x, 0) + f_2(x, u), \qquad u = 0 \text{ на } \Gamma;$$

здесь $\tilde{u}(x)$ находится между 0 и $u(x)$. Если применить к уравнению с левой частью $L[u]$ неравенство (13) из гл. IV, § 6, то получится оценка

$$|u| \leqslant K \max |f_1(x, 0) + f_2(x, u)| \leqslant M. \tag{9}$$

Мы найдем решение задачи (3), рассмотрев несколько измененную задачу, к которой мы сможем применить результат а). Пусть $\hat{u}(u)$ — непрерывно дифференцируемая монотонно возрастающая функция, определенная для $-\infty < u < \infty$ и такая, что $\hat{u}(u) = u$ для $|u| \leqslant M$ и $|\hat{u}(u)| \leqslant 2M$ для всех u. Рассмотрим модифицированное уравнение с функцией $\hat{f}_1(x, u) = f_1(x, \hat{u}(u))$ в правой части:

$$\Delta u = \hat{f}_1(x, u) + f_2(x, u) = \hat{f}(x, u), \qquad u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3'}$$

Ясно, что $\partial \hat{f}_1/\partial u \geqslant 0$ и что $\hat{f}_1(x, 0) = f_1(x, 0)$. Из неравенства (9) следует, что решение задачи (3′) не больше M по абсолютной величине и, следовательно, является решением задачи (3). Заметим теперь, что для некоторой константы N имеем

$$|\hat{f}(x, u)| \leqslant \sup_{|u| \leqslant 2M} |f_1(x, u) + f_2(x, u)| \leqslant N,$$

и в силу а) сделаем вывод, что задача (3′), а следовательно, и (3) имеет решение.

Если $\partial f/\partial u \geqslant 0$, то решение задачи (3) единственно, согласно общей теореме единственности (гл. IV, § 6, п. 2). В этом случае для решения задачи (3) можно также применять метод продолжения по параметру, рассматривая для $0 \leqslant t \leqslant 1$ однопараметрическое семейство задач

$$\Delta u = t f(x, u), \qquad u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3''}$$

При $t = 0$ решением является $u = 0$. Согласно рассуждениям в пункте а), множество T тех значений t, для которых задача (3″) имеет решение, принадлежащее $C_{2+\alpha}$ (см. гл. IV, § 7, п. 2), открыто.

Чтобы завершить доказательство, нам надо только показать, что T замкнуто; тогда множество T, будучи непустым и одновременно замкнутым и открытым, совпадает со всем отрезком.

Чтобы убедиться в том, что множество T замкнуто, выберем последовательность u_m решений задачи (3″), соответствующих значениям t_m, стремящимся к некоторому $\bar{t}$; мы должны показать, что задача (3″) имеет решение для $\bar{t}$. Согласно оценке (9), функции $|u_m|$, а следовательно, и $|f(x, u_m)|$ равномерно ограничены. В силу неравенства (5) (в его сильной форме) первые производные от функций u_m, а следовательно, и от $f(x, u_m(x))$ равномерно ограничены по абсолютной величине. Применяя оценки Шаудера и теорему Арцела, мы получаем, что некоторая подпоследовательность последовательности u_m сходится к решению u задачи (3″); этим заканчивается доказательство существования методом продолжения по параметру.

в) Вообще говоря, можно доказать разрешимость краевой задачи для дифференциального уравнения

$$\Delta u = f(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n) = F[u], \tag{10}$$

если только *основная область G выбрана достаточно малой*. Мы ограничимся случаем, когда G — шар радиуса R и $u=0$ на Γ, причем будем предполагать, что функция f непрерывна и имеет первые производные по всем аргументам.

Заметим сначала, что из сильной формы неравенства (5) следует, что

$$\max_G \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leqslant cR \sup_G |\Delta u|, \tag{11}$$

где константа c зависит только от числа измерений n.

Мы покажем, что для достаточно малых R последовательность функций, определяемых формулами

$$\begin{aligned} \Delta u_{(m)} &= F[u_{(m-1)}], \\ u_{(m)} &= 0 \text{ на } \Gamma, \\ u_0 &= 0, \end{aligned} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

сходится к решению уравнения (10).

Введем норму (см. гл. IV, § 7, п. 1)

$$\|u\|_1 = \max|u| + \max\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$$

и обозначим через μ положительную константу, ограничивающую величины $|f|$, $|\partial f/\partial u|$ и $|\partial f/\partial u_i|$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ при $\|u\|_1 \leqslant 1$. Если $\|u_{(m)}\|_1 \leqslant 1$, то, согласно (11), мы получаем, что

$$\left|\frac{\partial u_{(m+1)}}{\partial x_i}\right| \leqslant cR\mu$$

и, следовательно, так как $u_{(m+1)} = 0$ на Γ, $|u_{(m+1)}| \leqslant cR^2\mu$.

Если мы выберем R таким, что $cR\mu + cR^2\mu \leqslant 1$, то по индукции установим, что вообще $\|u_{(j)}\|_1 \leqslant 1$. Применяя теорему о конечных приращениях, мы, кроме того, получим

$$|\Delta(u_{(m+1)} - u_{(m)})| \leqslant |F[u_{(m)}] - F[u_{(m-1)}] \leqslant n\mu \|u_{(m)} - u_{(m-1)}\|_1.$$

Из (11) мы заключаем, что

$$\|u_{(m+1)} - u_{(m)}\|_1 \leqslant (cR + cR^2)\, n\mu \|u_{(m)} - u_{(m-1)}\|_1.$$

Ограничив R еще и требованием, чтобы было $(cR + cR^2)\, n\mu \leqslant \frac{1}{2}$, мы будем иметь

$$\|u_{(m+1)} - u_{(m)}\|_1 \leqslant \frac{1}{2} \|u_{(m)} - u_{(m-1)}\|_1$$

и, следовательно,

$$\|u_{(m+1)} - u_{(m)}\|_1 \leqslant 2^{-m} \|u_{(1)} - u_{(0)}\|_1,$$

откуда следует, что функции $u_{(m)}$ и их первые производные равномерно сходятся к некоторой функции u и ее соответствующим производным. Нетрудно показать (см. § 1, п. 2.), что $\frac{\partial u_m}{\partial x_i}$ равномерно удовлетворяют условию Гёльдера во всякой компактной подобласти области G.

С помощью внутренних оценок Шаудера мы легко устанавливаем, что вторые производные функций $u_{(m)}$ также равномерно сходятся во всякой компактной подобласти из G и, следовательно, функция u в области G имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению (10).

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ IV

ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ [1]

Теория уравнения Лапласа на плоскости по существу эквивалентна теории аналитических функций комплексного переменного. Произвольному линейному дифференциальному эллиптическому уравнению с частными производными второго порядка относительно функции двух независимых переменных можно поставить в соответствие теорию обобщенных аналитических функций, или, как их еще называют,

[1]) Это дополнение принадлежит Липману Берсу.

псевдоаналитических функций. Мы вкратце опишем основные факты этой теории[1]), а также укажем на другие связи между теорией функций и эллиптическими уравнениями.

§ 1. Определение псевдоаналитических функций

Сначала мы напомним, каким образом аналитические функции связаны с уравнением Лапласа. Пусть $\Phi(x, y)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi \equiv \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.$$

Положим $u = \Phi_x$, $v = -\Phi_y$. Тогда функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют уравнениям Коши — Римана

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0,$$

так что комплексный градиент $w = u + iv$ является аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Кроме того, сами функции u и v также являются гармоническими. С другой стороны, можно найти сопряженную к Φ гармоническую функцию Ψ из уравнений Коши — Римана

$$\Phi_x - \Psi_y = 0,$$
$$\Phi_y + \Psi_x = 0.$$

Функция Φ является действительной частью комплексной аналитической функции $\Omega = \Phi + i\Psi$. Функции Ω и w связаны соотношением $w(z) = d\Omega(z)/dz$.

Рассмотрим теперь общее линейное дифференциальное уравнение с частными производными эллиптического типа

$$a_{11}\varphi_{\xi\xi} + 2a_{12}\varphi_{\xi\eta} + a_{22}\varphi_{\eta\eta} + a_1\varphi_\xi + a_2\varphi_\eta + a_0\varphi = 0. \qquad (1)$$

Предположим, что в рассматриваемой области старшие коэффициенты $a_{ij}(\xi, \eta)$ обладают первыми производными, удовлетворяющими условию Гёльдера, и что уравнение имеет положительное решение $\varphi_0(\xi, \eta)$. Если мы введем новые независимые переменные $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, такие, что отображение $(\xi, \eta) \to (x, y)$ является гомеоморфизмом[2]), удовлетворяющим уравнениям Бельтрами (см. гл. III, § 2 и гл. IV, § 8), связанным с метрикой

$$a_{22}\,d\xi^2 - 2a_{12}\,d\xi\,d\eta + a_{11}\,d\eta^2,$$

[1]) Эту теорию разработал Л. Берс; независимо она была развита И. Н. Векуа. Изложение этой теории дано в работе Берса [1] вместе с подробной библиографией. См. также И. Н. Векуа [1].

[2]) Гомеоморфизм — это топологическое отображение; оно взаимно однозначно, непрерывно и имеет непрерывное обратное отображение.

и если мы введем также новую неизвестную функцию $\Phi=\varphi/\varphi_0$, то уравнение (1) примет канонический вид

$$\Delta\Phi+\alpha(x, y)\Phi_x+\beta(x, y)\Phi_y=0. \tag{1'}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие уравнения.

Как и ранее, положим $u=\Phi_x$, $v=-\Phi_y$. Эти функции удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_x-v_y&=-\alpha u+\beta v,\\ u_y+v_x&=0, \end{aligned} \tag{2}$$

которая является частным случаем эллиптической системы

$$\begin{aligned} u_x-v_y&=\alpha_{11}u+\alpha_{12}v,\\ u_y+v_x&=\alpha_{21}u+\alpha_{22}v; \end{aligned} \tag{3}$$

такие системы впервые были изучены Гильбертом и Карлеманом. Применяя комплексные обозначения, введенные в гл. IV, § 8, мы можем записать систему (3) в виде

$$w_{\bar z}=a(z)w+b(z)\overline{w}, \tag{4}$$

где

$$4a=\alpha_{11}+\alpha_{22}+i\alpha_{21}-i\alpha_{12},\quad 4b=\alpha_{11}-\alpha_{22}+i\alpha_{21}+i\alpha_{12}.$$

Непрерывно дифференцируемое решение уравнения (4) мы будем называть *псевдоаналитической функцией первого рода*, определенной системой (3), или еще $[a, b]$-псевдоаналитической функцией. Комплексный градиент любого решения уравнения (1′) является $[a, \bar a]$-псевдоаналитической функцией, причем $4a=-\alpha-i\beta$.

С другой стороны, в § 4 мы покажем, что если задано уравнение вида (1′), то мы при весьма общих предположениях можем найти две действительные функции $\tau(x, y)$ и $\sigma(x, y)>0$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \sigma_x-\tau_y&=\alpha\sigma,\\ \sigma_y+\tau_x&=\beta\sigma \end{aligned} \tag{5}$$

(эта система также имеет вид (3)). Из этих соотношений видно, что уравнение (1′) эквивалентно эллиптической системе

$$\begin{aligned} \sigma\varphi_x+\tau\varphi_y&=\psi_y,\\ \sigma\varphi_y-\tau\varphi_x&=-\psi_x; \end{aligned} \tag{6}$$

уравнение может быть получено из системы с помощью исключения ψ. Функция $\varphi+i\psi$, соответствующая решению системы вида (6) с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гёльдера, называется *псевдоаналитической функцией второго рода*, связанной с этой

системой. Таким образом, любое решение уравнения (1′) является действительной частью псевдоаналитической функции второго рода.

Заметим, что линейная комбинация двух псевдоаналитических функций с действительными постоянными коэффициентами снова является псевдоаналитической, но произведение двух таких функций, вообще говоря, не является псевдоаналитическим.

Ниже мы покажем, что псевдоаналитические функции имеют важные свойства, общие с обыкновенными аналитическими функциями, и что псевдоаналитические функции первого и второго рода можно рассматривать как два представления одного и того же математического понятия.

§ 2. Одно интегральное уравнение

Изучая решения уравнения (4), т. е. $[a, b]$-псевдоаналитические функции первого рода, мы будем предполагать, что коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ определены всюду, удовлетворяют условию Гёльдера и тождественно обращаются в нуль вне большого круга $|z| < R$. (Эти предположения делаются только ради простоты, а результаты, которые будут получены, справедливы при гораздо более общих предположениях.)

Изучение уравнения (4) основано на некоторых свойствах комплекснозначного двойного интеграла

$$q(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. Мы предположим, что комплекснозначная функция $\rho(z)$ обращается в нуль вне круга $|z| < R$ и всюду удовлетворяет неравенству $|\rho| \leqslant M$. Тогда

$$|q(z)| \leqslant \frac{KM}{1 + |z|^{\varepsilon}}, \quad |q(z_1) - q(z_2)| \leqslant KM|z_1 - z_2|^{\varepsilon}$$

для любого ε, такого, что $0 < \varepsilon < 1$; при этом константа K зависит только от ε и R. Если же в окрестности некоторой точки функция $\rho(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то функция $q(z)$ имеет частные производные, удовлетворяющие условию Гёльдера в этой окрестности, и удовлетворяет уравнению

$$q_{\bar{z}} = \rho. \tag{7}$$

Все эти утверждения можно доказать с помощью методов, описанных в гл. IV, § 8.

Мы заметим также, что соотношение (7) справедливо даже тогда, когда мы не предполагаем, что ρ удовлетворяет условию Гёльдера, если только нам известно, что существует некоторая непрерывно

дифференцируемая функция $Q(z)$, такая, что $Q_{\bar{z}} = \rho$. Это можно получить из тождества Грина, что читатель легко сможет проверить.

Пусть $w(z)$ — ограниченная непрерывная функция, определенная в области D. *Функция* $w(z)$ *является* $[a, b]$-*псевдоаналитической тогда и только тогда, когда функция* $f(z)$, *определенная формулой*

$$f(z) = w(z) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{a(\zeta)\, w(\zeta) + b(\zeta)\, \overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta, \tag{8}$$

аналитична в D.

Чтобы доказать это, заметим, что двойной интеграл в формуле (8) является непрерывной по Гёльдеру функцией от z, так что из того, что одна из функций w или f удовлетворяет условию Гёльдера, следует то же самое для другой. Если, кроме того, функция w удовлетворяет условию Гёльдера, то из того, что одна из функций w или f является непрерывно дифференцируемой, следует то же самое для другой. Дифференцируя формулу (8) и применяя соотношение (7), мы получим для w в области D дифференциальное уравнение

$$f_{\bar{z}} = w_{\bar{z}} - aw - b\bar{w}.$$

Таким образом, функция w удовлетворяет уравнению (4) тогда и только тогда, когда $f_{\bar{z}} \equiv 0$, т. е. когда функция $f(z)$ аналитическая.

Как следствие этого результата мы получаем теорему об устранимой особенности:

Если псевдоаналитическая в области $0 < |z - z_0| < r$ *функция* $w(z)$ *ограничена, то ее можно так определить в точке* z_0, *что она будет псевдоаналитической во всем круге* $|z - z_0| < r$.

Доказательство следует из того, что это справедливо для аналитических функций и что двойной интеграл не изменяется, если из области интегрирования исключить одну точку.

Для заданной функции $f(z)$ уравнение (8) можно рассматривать как линейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $w(z)$. Это уравнение, как доказал Векуа, всегда однозначно разрешимо. Однако мы не будем пользоваться этим фактом.

§ 3. Принцип подобия

Мы называем две заданные в области D комплексные функции $w(z)$ и $f(z)$ *подобными*, если отношение w/f ограничено, отграничено от нуля и непрерывно в замыкании области. Мы докажем четыре теоремы, утверждающие, что любая псевдоаналитическая функция подобна некоторой аналитической функции, и обратно.

а) *Пусть* $w(z)$ — *произвольная* $[a, b]$-*псевдоаналитическая функция в области* D. *Тогда существуют аналитическая функ-*

ция $f(z)$ и комплекснозначная непрерывная функция $s(z)$, такие, что

$$w(z) = e^{s(z)} f(z). \tag{9}$$

Кроме того, $s(z)$ непрерывна в замыкании D и удовлетворяет условию Гёльдера, причем максимум ее модуля и модуль непрерывности зависят только от коэффициентов a, b.

Доказательство состоит в том, что явно выписывается функция $s(z)$. Если $w(z) \equiv 0$, то доказывать нечего. Если w не обращается тождественно в нуль, то мы обозначим через D_0 открытое подмножество D, в котором $w(z) \neq 0$, и положим

$$s(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_0} \left[a(\zeta) + b(\zeta) \frac{\overline{w}(\zeta)}{w(\zeta)} \right] \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \quad f(z) = e^{-s(z)} w(z).$$

Функция $s(z)$ всюду непрерывна; в D_0 она непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению $s_{\bar z} = a + b\overline{w}/w$. Поэтому $f_{\bar z} \equiv 0$ в D_0, т. е. функция $f(z)$ аналитична в D_0. Из теоремы об устранимой особенности для аналитических функций следует, что $f(z)$ аналитична также во всех изолированных точках дополнения $D - D_0$.

Пусть теперь z_0 — неизолированная точка $D - D_0$. Тогда существует последовательность точек $\{z_\nu\}$, таких, что $w(z_\nu) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$, и $z_\nu \to z_0$. Мы можем выбрать такую подпоследовательность, что последовательность аргументов $z_\nu - z_0$ тоже будет стремиться к некоторому углу θ. Простое применение теоремы о конечном приращении показывает, что в точке z_0 выполняется соотношение $w_x \cos\theta + w_y \sin\theta = 0$. С другой стороны, $w(z_0) = 0$ и, следовательно, в силу (4), также и $2w_{\bar z} = w_x + iw_y = 0$ в точке z_0. Поэтому $w_x(z_0) = w_y(z_0) = 0$, так что $\lim\limits_{z \to z_0} [w(z)/(z - z_0)] = 0$ и $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z)/(z - z_0)] = 0$.

Отсюда следует, что функция $f(z)$ имеет комплексную производную также и в неизолированных точках $D - D_0$, так что $f(z)$ аналитична во всей области D.

Так как аналитическая функция, не равная тождественно нулю, имеет только изолированные нули, мы можем a posteriori сделать вывод, что дополнение $D - D_0$ состоит только из изолированных точек, так что мы можем написать

$$s(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D} \left[a(\zeta) + b(\zeta) \frac{\overline{w}(\zeta)}{w(\zeta)} \right] \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}. \tag{10}$$

То, что эта функция обладает нужными свойствами, следует из результатов § 2 этого дополнения.

б) *Пусть выполнены предположения теоремы* а) *и пусть граница области D состоит из простой замкнутой дважды непрерывно дифференцируемой кривой C и область D нахо-*

дится целиком внутри или целиком вне C. Тогда функцию $s(z)$ можно выбрать так, чтобы она была действительной на C и обращалась в нуль в заданной точке z_0 кривой C.

Мы докажем эту теорему только для случая, когда C является единичной окружностью, а D — единичным кругом. Случай общей кривой C можно рассматривать аналогично или свести к единичному кругу с помощью конформного отображения.

Доказательство опирается на классическую теорему (принадлежащую А. Корну и И. И. Привалову), касающуюся сопряженных функций. *Пусть $g(z) = U + iV$ — аналитическая функция в единичном круге. Если функция $V(x, y)$ непрерывна в единичном круге и удовлетворяет в нем условию Гёльдера с показателем $\alpha < 1$ и константой H, то функция $g(z)$ в замкнутом круге удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и константой kH, где k зависит только от α.*

Доказательство теоремы Привалова дано в § 14 этого дополнения. Чтобы доказать утверждение б), определим s формулой (10) и положим

$$t(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \operatorname{Im} s(e^{i\theta})\, d\theta,$$

$$s_0(z) = s(z) - it(z) - s(z_0) + it(z_0).$$

Из теоремы Привалова следует, что аналитическая функция $t(z)$, действительная часть которой на окружности $|z| = 1$ равна $\operatorname{Im} s(z)$, непрерывна в замкнутом единичном круге, причем максимум ее модуля, а также постоянные α и H в условии Гёльдера зависят только от коэффициентов a и b. Ясно, что функция $e^{-s_0(z)}w(z)$ аналитична. С другой стороны, функция $s_0(z)$ действительна при $|z| = 1$ и обращается в нуль при $z = z_0$.

в) *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, определенная в области D. Тогда существует функция $s(z)$, непрерывная в замыкании D, удовлетворяющая условию Гёльдера и равная нулю в заданной точке z_0, такая, что функция $w(z) = e^{s(z)}f(z)$ является $[a, b]$-псевдоаналитической.*

Функцию $s(z)$ можно выбрать так, чтобы максимум ее модуля и модуль непрерывности зависели только от a, b.

В силу доказанной выше теоремы об устранимой особенности мы не нарушим общности, если удалим из области D все нули аналитической функции f. Тогда мы можем предполагать, что $f(z) \neq 0$ в D. Если мы сможем найти функцию $s(z)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$s_{\bar{z}} = a + b\frac{\bar{f}}{f}e^{\bar{s}-s}, \tag{11}$$

то функция $e^s f$ будет $[a, b]$-псевдоаналитической.

Чтобы найти такую функцию s, мы рассмотрим оператор T, преобразующий ограниченную непрерывную функцию $s(z)$, заданную в области D, в функцию $\sigma(z) - \sigma(z_0)$, где

$$\sigma(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[a(\zeta) + b(\zeta)\frac{\overline{f(\zeta)}}{f(\zeta)}e^{\bar{s}(\zeta)-s(\zeta)}\right]\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}. \qquad (12)$$

Ограниченные непрерывные функции в области D образуют действительное векторное пространство B, так как линейная комбинация двух непрерывных ограниченных функций с действительными коэффициентами также является непрерывной и ограниченной. В этом пространстве можно ввести норму $\|s\| = \sup|s(z)|$. Если $\{s_n\}$ является последовательностью Коши по этой норме, т. е. если $\lim\limits_{m,\, n\to\infty}\|s_n - s_m\| = 0$, то существует ограниченная непрерывная функция $s(z)$, такая, что $\|s_n - s\| \to 0$. Таким образом, пространство B является полным нормированным пространством, т. е. банаховым пространством[1]). Из свойств двойного интеграла, установленных в § 2 этого дополнения, следует, что максимум модуля и модуль непрерывности любой функции $\tilde{\sigma} = Ts$ зависят только от a, b, и, если область D неограничена, они имеют (равномерно по z) порядок $O\left(|z|^{-\varepsilon}\right)$ при $z \to \infty$. Пусть Λ обозначает множество всех функций с таким максимумом модуля и модулем непрерывности и — в случае неограниченной области D — с таким поведением на бесконечности. Множество Λ — выпуклое (см. § 15 этого дополнения). Кроме того, из теоремы Арцела (см. т. I, гл. II, § 2) следует, что из любой последовательности функций, принадлежащих Λ, мы можем выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, т. е. подпоследовательность, сходящуюся по норме пространства B. Таким образом, Λ есть компактное подмножество B. Легко видеть, что T непрерывно преобразует B в Λ и, в частности, дает непрерывное отображение Λ в себя.

Теперь мы применим теорему Шаудера о неподвижной точке[2]) (см. § 9 и 15 этого дополнения), которая утверждает, что *непрерывное отображение компактного выпуклого множества в банаховом пространстве в себя имеет неподвижную точку*. Из этой теоремы следует, что существует функция $s(z)$, принадлежащая Λ, такая, что $s = Ts$, т. е.

$$s(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[a(\zeta) + b(\zeta)\frac{\overline{f(\zeta)}}{f(\zeta)}e^{\bar{s}(\zeta)-s(\zeta)}\right]\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right]d\xi\, d\eta.$$

Эта функция удовлетворяет рассматриваемому дифференциальному уравнению (11) и обращается в нуль в точке z_0.

---

[1]) См. § 15 этого дополнения.

[2]) С помощью более длинных рассуждений можно обойти применение теоремы Шаудера.

г) *Пусть область* D *и кривая* C *удовлетворяют условиям теоремы* б), *и пусть* $f(z)$ — *заданная аналитическая функция в области* D. *Тогда функцию* $s(z)$, *существование которой утверждается в теореме* в), *можно выбрать так, чтобы она была действительной на* C *и обращалась в нуль в заданной точке* z_0 *кривой* C.

Доказательство очень похоже на доказательство теоремы б). Мы снова будем рассматривать только случай единичного круга. Чтобы найти требуемое решение уравнения (11), мы рассмотрим оператор T_1, который преобразует ограниченную непрерывную функцию $s(z)$, заданную в области D, в функцию $\sigma_1(z) - \sigma_1(z_0)$, где

$$\sigma_1(z) = \sigma(z) - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \operatorname{Im} \sigma(e^{i\theta})\, d\theta$$

(функция $\sigma(z)$ здесь определяется формулой (12)). Затем мы применяем к уравнению $s = T_1 s$ теорему Шаудера о неподвижной точке. Тот факт, что преобразование T_1 отображает пространство B в его компактное выпуклое подмножество, следует из теоремы Привалова.

§ 4. Приложения принципа подобия

В качестве первого приложения мы укажем теорему о локальном поведении псевдоаналитических функций. *Пусть функция* $w(z)$ — *псевдоаналитическая в области* $0 < |z - z_0| < r$. *Тогда либо* $w(z)$ *при* $z \to z_0$ *принимает значения, сколь угодно близкие к любому комплексному числу* (*существенная особенность*), *либо существуют положительное целое число* n *и комплексное число* $\alpha \neq 0$, *такие, что*

$$w(z) \sim \frac{\alpha}{(z - z_0)^n}, \quad z \to z_0 \tag{13}$$

(это значит, что w имеет полюс порядка n), *либо* $w(z)$ *имеет в точке* z_0 *устранимую особенность. Если функция* $w(z)$ *регулярна в точке* z_0 *и* $w(z_0) = 0$, $w \not\equiv 0$, *то существует положительное число* n *и комплексное число* $\alpha \neq 0$, *такие, что*

$$w(z) \sim \alpha (z - z_0)^n \tag{14}$$

(нуль порядка n).

Это утверждение сразу следует из принципа подобия а) и соответствующих классических утверждений относительно аналитических функций. В качестве следствия мы получим хорошо известную теорему Карлемана, утверждающую, что решение уравнения (4), не равное тождественно нулю, имеет только изолированные нули и в каждой точке может иметь нуль только конечного порядка. Из

этой теоремы следует, в частности, что псевдоаналитическая функция однозначно определяется своими значениями на любом открытом множестве. То же самое утверждение справедливо тогда для решений эллиптических дифференциальных уравнений вида (1) с гладкими неаналитическими коэффициентами. Эту теорему об однозначной продолжимости можно различными методами распространить также на эллиптические уравнения вида (1) с ограниченными измеримыми коэффициентами. Аронпайн[1]) доказал теорему об однозначной продолжимости для уравнений второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами в n-мерном пространстве[2]).

Мы сейчас применяли ту часть принципа подобия, которая описывает структуру псевдоаналитических функций. Теперь мы дадим применения тех утверждений, которые являются утверждениями о существовании. Мы покажем, что для эллиптического уравнения вида (1′) существует *функция Грина* в любой области D, ограниченной простой замкнутой дважды непрерывно дифференцируемой кривой C. Чтобы построить эту функцию, возьмем $g(z_0, z)$ — функцию Грина для уравнения Лапласа, соответствующую рассматриваемой области, с особенностью в точке z_0 и положим $4a = -\alpha - i\beta$. Принцип подобия г) утверждает, что в области D существует $[a, \bar{a}]$-псевдоаналитическая функция $w(z)$, такая, что частное $w/(g_x - ig_y)$ равномерно непрерывно, отлично от нуля и действительно на C. Возьмем некоторую точку z_1 на C и положим

$$G(z_0, z) = \operatorname{Re} \int_{z_1}^{z} w(z)\, dz.$$

Криволинейный интеграл не изменится, если путь интегрирования деформировать так, чтобы он не проходил через особую точку z_0. Действительно, если C — замкнутая кривая в области D, такая, что в ограниченной ею области G не содержится точка z_0, то мы имеем, согласно теореме Грина,

$$\operatorname{Re} \oint_C w\, dz = \operatorname{Re} 2i \int_G\!\!\int w_{\bar{z}}\, dx\, dy = 0.$$

---

[1]) См. Аронпайн [1]. Независимо тот же результат доказал Кордес [1]. Кальдерон [1] доказал очень общую теорему единственности для задачи Коши. Эти работы обобщают основную идею Карлемана [1]. Независимо Мальгранж [1] и П. Лакс [1] установили интересную связь между свойством однозначной продолжимости и свойством Рунге для эллиптических уравнений. Недавно Плись [3, 1] и независимо Коэн [1] дали примеры эллиптических уравнений, для которых свойство однозначной продолжимости не имеет места.

[2]) См. также Ландис Е. М., *ДАН СССР*, **107**, 5 (1956), 640—643; Лаврентьев М. М., *ДАН СССР*, **112**, 2 (1957), 195—197; Heinz, *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen*, **1** (1955), 1—12, и книгу Хёрмандера, указанную в примечании на стр. 159. — *Прим. ред.*

Чтобы доказать однозначность функции $G(z_0, z)$, мы должны показать, что криволинейный интеграл, взятый по некоторой замкнутой кривой вокруг особой точки, равен нулю. Но на C мы имеем $g=0$ и, следовательно, $g_x dx + g_y dy = 0$, так что

$$\operatorname{Re}(w\,dz) = 0 \text{ на } C$$

и

$$\oint_C dG = \operatorname{Re} \oint_C w\,dz = 0,$$

откуда и следует наше утверждение. Функция $G(z_0, z)$ является решением уравнения (1′). Она постоянна на C и, как легко видеть, имеет логарифмическую особенность в точке z_0. Следовательно, она и является искомой функцией Грина. Заметим, что такой метод построения функции Грина дает сразу существование и непрерывность ее нормальной производной на границе.

Аналогичным способом мы можем построить решение уравнения (1′), которое обращается в нуль на некоторой дуге кривой C и равно 1 на дополнении этой дуги. Если мы имеем такую функцию, то мы легко можем решить для уравнения (1′) первую краевую задачу.

Применением принципа подобия получается также следующий результат: *существует одна и только одна ограниченная* $[a, b]$*-псевдоаналитическая функция* $w(z)$, *определенная во всей плоскости и принимающая в некоторой точке* z_0 *значение* α. Действительно, в силу теоремы в) существует псевдоаналитическая функция вида $\alpha e^{s(z)}$, причем здесь функция $s(z)$ ограничена на всей плоскости и $s(z_0)=0$. Единственность следует из теоремы а), которая утверждает, что любая ограниченная псевдоаналитическая функция, определенная на всей плоскости, имеет вид $e^{s(z)} f(z)$, где $f(z)$ — ограниченная целая аналитическая функция, т. е., согласно теореме Лиувилля, постоянная. Таким образом, ограниченная „целая“ псевдоаналитическая функция либо не имеет нулей, либо обращается в нуль тождественно.

Теперь мы можем доказать одно утверждение, сделанное в § 1 этого дополнения, а именно, доказать, что уравнение (1′) эквивалентно системе (6). Мы предположим, что коэффициенты α, β удовлетворяют условию Гёльдера и равны нулю вне некоторого большого круга. Согласно только что доказанной теореме, существует ограниченное решение (σ_0, τ_0) системы (5), определенное на всей плоскости и такое, что $\sigma_0 = 1$, $\tau_0 = 0$ при $z=0$. Мы можем требовать, чтобы всюду было $\sigma_0 > 0$. Действительно, предположим, что $\sigma_0 = 0$ в некоторой точке z_0; тогда ограниченное решение системы (5) $\sigma = \sigma_0$, $\tau = \tau_0 - \tau_0(z_0)$ обращается в нуль в точке z_0 и, следовательно, равно нулю тождественно, что невозможно.

§ 5. Формальные степени

Мы будем предполагать, что коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют требованиям, сформулированным в § 2 этого дополнения, так что принцип подобия можно применять во всей плоскости. Согласно этому принципу, существует псевдоаналитическая функция первого рода, подобная аналитической функции $\alpha(z-z_0)^n$, где n — положительное или отрицательное целое число. Мы обозначим эту функцию через $w(z)=Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)$ и назовем ее формальной степенью. Она ведет себя, как $\alpha(z-z_0)^n$, при $z \to z_0$ и равна $O(|z|^n)$ на бесконечности. Применяя принцип подобия, легко убедиться в том, что эти свойства однозначно определяют функции $Z^{(n)}$. Из принципа подобия также следует, что существует такая константа K, зависящая только от рассматриваемого уравнения, что

$$\frac{1}{K}|\alpha||z-z_0|^n \leqslant |Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)| \leqslant K|\alpha||z-z_0|^n.$$

Формальные степени удовлетворяют соотношению

$$Z^{(n)}(\lambda\alpha+\mu\beta, z_0, z)=\lambda Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)+\mu Z^{(n)}(\beta, z_0, z),$$

если λ и μ — действительные постоянные. Для доказательства достаточно проверить, что функция в правой части обладает свойствами, однозначно определяющими функцию в левой части. Можно также показать, что $Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)$ является непрерывной функцией от z_0.

С помощью формальных степеней можно дать аналитические выражения для произвольных псевдоаналитических функций, по аналогии с классическими результатами теории функций. Мы приводим формулы без доказательства.

Пусть $w(z)$ — псевдоаналитическая функция, определенная в области D, лежащей внутри простой замкнутой гладкой кривой C, и предположим, что w непрерывно продолжается на C. Тогда для z из D справедлива „формула Коши“

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C Z^{(-1)}[iw(\zeta)\,d\zeta, \zeta, z]. \tag{15}$$

Этот интеграл надо понимать в следующем смысле. Если параметрическое представление кривой C имеет вид $\zeta(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, то для любой функции χ, определенной на C, имеем

$$\int_C Z^{(n)}[\chi(\zeta)\,d\zeta, \zeta, z]=\int_0^L Z^{(n)}\{\chi[\zeta(s)]\zeta'(s), \zeta(s), z\}\,ds.$$

Интеграл (15) равен нулю для точек z, лежащих во внешности C.

Рассмотрим теперь псевдоаналитическую функцию, определенную в области $0 < |z - z_0| < R$. Тогда $w(z)$ единственным образом представляется в виде ряда

$$w(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z^{(n)}(\alpha_n, z_0, z),$$

сходящегося в этой области.

Если бесконечное число коэффициентов α_n при $n < 0$ отлично от нуля, то функция имеет существенную особенность в z_0. Если только конечное число коэффициентов α_n с отрицательным n отлично от нуля, то функция имеет полюс, а если в разложении имеются только коэффициенты α_n, соответствующие положительным n, то функция регулярна в z_0.

Эти результаты можно, конечно, переформулировать так, чтобы они относились к решениям дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа второго порядка, без упоминания псевдоаналитических функций.

§ 6. Дифференцирование и интегрирование псевдоаналитических функций

Говорят, что два решения уравнения (4) $F(z)$ и $G(z)$ образуют *порождающую пару*, если они не обращаются в нуль и если мнимая часть их отношения G/F положительна. Так, для уравнений Коши — Римана порождающую пару образуют функции 1 и i, а также e^z, ie^z. При весьма общих предположениях можно доказать, что порождающие функции всегда существуют. Например, в предположениях § 2 этого дополнения, можно взять в качестве порождающей пары два ограниченных целых решения уравнения (4), принимающих в начале координат значения 1 и i.

Пусть (F, G) — порождающая пара для уравнения (4). Любую комплекснозначную функцию $w(z)$ можно однозначно записать в виде

$$w(z) = \varphi(z) F(z) + \psi(z) G(z), \tag{16}$$

где функции φ и ψ действительны. Удобно каждой функции w ставить в соответствие функцию $\omega(z) = \varphi + i\psi$. Как будет показано ниже, если w — псевдоаналитическая функция первого рода, то ω — псевдоаналитическая функция второго рода. Так как любые две достаточно гладкие функции F, G, которые не обращаются в нуль и отношение которых G/F имеет положительную мнимую часть, образуют порождающую пару для некоторого уравнения вида (4), то мы в дальнейшем будем говорить о (F, G)-псевдоаналитических функциях.

Функция (16) является (F, G)-псевдоаналитической тогда и только тогда, когда

$$\varphi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G = 0. \tag{17}$$

Действительно, по предположению, мы имеем

$$F_{\bar z} = aF + b\bar F,$$
$$G_{\bar z} = aG + b\bar G,$$

так что

$$w_{\bar z} - aw - b\bar w = \varphi_{\bar z}F + \psi_{\bar z}G.$$

Введем теперь действительные функции $\tau(z)$ и $\sigma(z) > 0$ с помощью соотношения $\sigma - i\tau = iF/G$. Тогда уравнение (17) будет совпадать с системой (6) и наша терминология будет оправдана.

Если функция (16) является (F, G)-псевдоаналитической функцией то ее (F, G)-*производная* определяется формулой

$$\frac{d_{(F, G)}w}{dz} = \dot w = \varphi_z F + \psi_z G. \tag{18}$$

Если функции $A(z)$, $B(z)$ определяются уравнениями

$$F_z = AF + B\bar F,$$
$$G_z = AG + B\bar G,$$

то формулу (18) можно записать в виде

$$\dot w = w_z - Aw - B\bar w.$$

Если известна производная $\dot w$, то функцию w или, точнее, соответствующую псевдоаналитическую функцию ω второго рода, можно получить с помощью интегрирования. Действительно, определим *двойственную* порождающую пару $(F, G)^* = (F^*, G^*)$ с помощью соотношений

$$FF^* - GG^* \equiv 2,$$
$$\bar F F^* - \bar G G^* \equiv 0.$$

Тогда, согласно формулам (17) и (18), получим $2\varphi_z = F^*\dot w$, $2\psi_z = -G^*\dot w$, так что

$$\omega(z_2) - \omega(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} [\operatorname{Re}(F^*\dot w\,dz) - i\operatorname{Re}(G^*\dot w\,dz)]. \tag{19}$$

Замечательно, что (F, G)-производная от (F, G)-псевдоаналитической функции сама является псевдоаналитической, но, вообще говоря,

относительно другой порождающей пары. Чтобы доказать это, мы вычислим [1]) $\dot{w}_{\bar{z}}$ и получим

$$\dot{w}_{\bar{z}} = (\varphi_z F + \psi_z G)_{\bar{z}} = \\ = \varphi_z (aF + b\bar{F}) + \psi_z (aG + b\bar{G}) + \\ + (\varphi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G)_z - \varphi_{\bar{z}} (AF + B\bar{F}) - \psi_{\bar{z}} (AG + B\bar{G}).$$

Замечая, что $(\varphi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G)_z \equiv 0$, и выражая φ_z, $\varphi_{\bar{z}}$, ψ_z, $\psi_{\bar{z}}$ через $\dot{w}$ и $\overline{\dot{w}}$, согласно формулам (17) и (18), мы получим уравнение

$$\dot{w}_{\bar{z}} = a\dot{w} - B\overline{\dot{w}},$$

из которого следует, что функция $\dot{w}$ является $[a, -B]$-псевдоаналитической. Порождающая пара (F_1, G_1), соответствующая уравнению

$$w_{\bar{z}} = aw - B\bar{w},$$

называется *последующей* для пары (F, G). Исходная пара (F, G) сама является последующей для некоторой пары (F_{-1}, G_{-1}), которая может быть получена следующим образом: пара (F_{-1}, G_{-1}) является двойственной к паре, последующей для пары, двойственной к (F, G). Простое доказательство этого факта предоставляется читателю. Таким образом, заданная порождающая пара (F, G) может быть включена (причем бесконечно большим числом способов) в последовательность порождающих пар

$$\ldots, (F_{-2}, G_{-2}), (F_{-1}, G_{-1}), (F_0, G_0), (F_1, G_1), (F_2, G_2), \ldots, \quad (20)$$

такую, что пара (F_ν, G_ν) является последующей для $(F_{\nu-1}, G_{\nu-1})$. Такая последовательность называется периодической с периодом n, если $(F_n, G_n) = (F_0, G_0)$. Наименьшее n, для которого это имеет место по всем последовательностям, в которые можно включить пару (F_0, G_0), называется минимальным периодом для (F_0, G_0); говорят, что пара (F_0, G_0) имеет минимальный период ∞, если ее нельзя включить ни в какую периодическую последовательность. Проттер [1] показал, что существуют порождающие пары для любого заданного минимального периода.

Относительно порождающей последовательности (20) заданная (F_0, G_0)-псевдоаналитическая функция $w(z)$ имеет производные всех порядков, которые определяются рекуррентными формулами

$$w^{[0]} = w, \quad w^{[n+1]} = \frac{d_{(F_n, G_n)} w^{[n]}}{dz} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Можно показать, что, как и в случае аналитических функций, последовательность чисел $\{w^{[n]}(z_0)\}$ для некоторого фиксированного z_0 однозначно определяет функцию w.

[1]) То, что функция $\dot{w}$ непрерывно дифференцируема, можно доказать, применяя теоремы существования для уравнения (1′).

Применяя порождающую последовательность (20) и описанный выше процесс интегрирования, можно с помощью квадратур построить последовательность (F_ν, G_ν)-псевдоаналитических функций частного вида, называемых локальными формальными степенями; они обозначаются через $Z_\nu^{(n)}(\alpha, z_0, z)$. Эти функции определяются рекуррентными соотношениями

$$Z_\nu^{(0)}(\alpha, z_0, z)=\alpha,$$

$$\frac{d_{(F_\nu, G_\nu)}Z_\nu^{(n)}(\alpha, z_0, z)}{dz}=Z_{\nu+1}^{(n-1)}(n\alpha, z_0, z) \quad (n=1, 2, \ldots),$$

где α и z_0 — комплексные постоянные. Название „степень“ оправдывается тем, что для $(F_\nu, G_\nu)=(1, i)$ $(\nu=0, \pm 1, \ldots)$ мы имеем

$$Z_\nu^{(n)}(\alpha, z_0, z)=\alpha(z-z_0)^n.$$

Глобальные формальные степени, описанные в § 5 этого дополнения являются частным случаем локальных формальных степеней.

§ 7. Пример. Уравнения смешанного типа

Особенно простой класс псевдоаналитических функций получается, если в качестве порождающей пары берутся функции $F\equiv 1$, $G\equiv i\beta(y)$, где $\beta(y)$ — положительная функция. В силу условия (17) функция $\varphi+i\beta\psi$ является $(1, i\beta)$-псевдоаналитической тогда и только тогда, когда φ и ψ удовлетворяют уравнениям[1])

$$\begin{aligned}\varphi_x&=\beta(y)\psi_y,\\ \varphi_y&=-\beta(y)\psi_x.\end{aligned} \tag{21}$$

Не ссылаясь на общую теорию (F, G)-дифференцирования и интегрирования, можно сразу проверить, что если пара (φ, ψ) удовлетворяет уравнениям (21), то пары (φ', ψ'), где

$$\varphi'=\varphi_x, \quad \psi'=\psi_x,$$

и (Φ, Ψ), где Φ и Ψ определяются не зависящими от пути интегралами

$$\Phi=\int(\varphi\, dx-\beta\psi\, dy), \quad \Psi=\int\left(\psi\, dx+\frac{\varphi}{\beta}\, dy\right), \tag{22}$$

также являются решениями системы (21). Порождающая пара $(1, i\beta(y))$ является последующей для самой себя, функция $\varphi'+i\beta\psi'$ является $(1, i\beta)$-производной от $\varphi+i\beta\psi$, а эта последняя функция является $(1, i\beta)$-производной от $\Phi+i\beta\Psi$.

[1]) См. Берс и Гельбарт [1].

Определенные выше локальные формальные степени можно явно выписать. Для простоты мы рассмотрим только степени $Z^{(n)}(a, 0, z)$. Положим

$$Y^{(0)}(y)=1, \quad Y^{(1)}(y)=\int_0^y \frac{d\eta}{\beta(\eta)}, \quad Y^{(2)}(y)=2!\int_0^y \beta(\eta)\, Y^{(1)}(\eta)\, d\eta, \tag{23}$$

$$Y^{(3)}(y)=3!\int_0^y \frac{Y^{(2)}(\eta)}{\beta(\eta)}\, d\eta, \ \ldots,$$

$$\tilde{Y}^{(0)}(y)=1, \quad \tilde{Y}^{(1)}(y)=\int_0^y \beta(\eta)\, d\eta, \quad \tilde{Y}^{(2)}(y)=2!\int_0^y \frac{\tilde{Y}^{(1)}(\eta)}{\beta(\eta)}\, d\eta,$$

$$\tilde{Y}^{(3)}(y)=3!\int_0^y \beta(\eta)\, \tilde{Y}^{(2)}(\eta)\, d\eta, \ \ldots.$$

Тогда для действительных λ и μ и $n=1, 2, \ldots$ имеем

$$Z^{(n)}(\lambda+i\mu, 0, x+iy)=\lambda\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} x^{n-j} i^j Y^j(y)+ \\ +i\mu\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} x^{n-j} i^j \tilde{Y}^{(j)}(y). \tag{24}$$

Важно заметить, что те же самые формальные рассуждения проходят для систем вида

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \beta_1(y)\,\psi_y, \\ \varphi_y &= -\beta_2(y)\,\psi_x, \end{aligned} \tag{25}$$

где мы не предполагаем, что действительные функции β_1 и β_2 положительны. В формулах (22) — (24) надо только заменить β на β_2 и $1/\beta$ на $1/\beta_1$. Система (25) может тогда быть или эллиптической, или гиперболической, или смешанного типа. В качестве примера системы смешанного типа рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \psi_y, \\ \varphi_y &= -y\psi_x. \end{aligned}$$

Исключение функции φ приводит к так называемому уравнению Трикоми [1])

$$y\psi_{xx}+\psi_{yy}=0,$$

---

[1]) Теория этого уравнения была заложена в знаменитой работе Трикоми [1]. Обширная библиография по уравнениям смешанного типа содержится в работе Берса [3]. [См. также книгу Бицадзе, указанную в примечании на стр. 167. — *Прим. ред.*]

которое играет важную роль в сверхзвуковой газовой динамике. Наши формулы дают ряд полиномов, удовлетворяющих этому уравнению.

Аналогично мы можем рассмотреть систему

$$\alpha_1(x)\varphi_x = \beta_1(y)\psi_y, \qquad (26)$$
$$\alpha_2(x)\varphi_y = -\beta_2(y)\psi_x.$$

Формулы дифференцирования и интегрирования

$$\varphi' = \alpha_1\varphi_x, \qquad \psi' = \psi_x/\alpha_2,$$
$$\Phi = \int(\alpha_2\varphi\,dx - \beta_2\psi\,dy), \qquad \Psi = \int[(\psi/\alpha_1)\,dx + (\varphi/\beta_1)\,dy]$$

позволяют получить из решения (φ, ψ) системы (26) решение системы

$$\frac{\Phi_x}{\alpha_2} = \beta_1\Psi_y, \qquad \frac{\Phi_y}{\alpha_1} = -\beta_2\Psi_x. \qquad (27)$$

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta > 0$, то из системы (26) следует, что $\varphi + i\psi$ — псевдоаналитическая функция второго рода относительно порождающей пары $F = (\alpha/\beta)^{1/2}$, $G = i(\beta/\alpha)^{1/2}$. (F, G)-производная функции $\varphi F + \psi G$ легко вычисляется и равна

$$(\alpha/\beta)^{1/2}\varphi_x + i(\beta/\alpha)^{1/2}\psi_x = F_1\varphi' + G_1\psi',$$

где

$$F_1 = (\alpha\beta)^{-1/2}, \quad G_1 = i(\alpha\beta)^{1/2}.$$

Эта производная является (F_1, G_1)-псевдоаналитической функцией, так как функции φ', ψ' удовлетворяют системе (27). Таким образом, пара (F_1, G_1) является последующей для (F, G), и точно так же устанавливается, что пара (F, G) — последующая для (F_1, G_1). Минимальный период для этой порождающей пары равен 2, если только α не постоянная.

§ 8. *Общее определение псевдоаналитических функций*

Мы вернемся к общей теории псевдоаналитических функций и заметим, что определенная в § 6 этого дополнения (F, G)-производная может быть получена с помощью предельного перехода, который является обобщением обычного процесса дифференцирования комплексных функций.

Точнее, пусть функция $w(z)$ представлена в виде (16), где $F(z)$ и $G(z)$ — фиксированные непрерывные комплексные функции, такие, что $\operatorname{Im}(G/F) > 0$, а функции φ и ψ — действительные. Мы составим „разностное отношение“

$$\frac{1}{h}[\varphi(z+h)F(z) + \psi(z+h)G(z) - \varphi(z)F(z) - \psi(z)G(z)] \qquad (28)$$

и выясним, имеет ли оно предел, когда комплексное число h стремится к нулю любыми возможными способами. Если такой предел существует, то он, в частности, будет существовать и при $h=\delta\to 0$ и при $h=i\delta\to 0$, где δ — действительная переменная. Эти два предела равны соответственно

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}F+\frac{\partial\psi}{\partial x}G \quad \text{и} \quad \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}F+\frac{\partial\psi}{\partial y}G\right).$$

Из условия, чтобы эти два предела были равны, сразу получается уравнение (17), а если мы обозначим общую величину этих двух пределов через $\dot{w}$, то получим соотношение (18).

В общей теории псевдоаналитических функций исходят из порождающей пары $F(z)$, $G(z)$, причем не предполагается, что эти функции дифференцируемы. Функция (16) называется (F, G)-псевдоаналитической в области, если в любой точке z этой области отношение (28) имеет конечный предел при $h\to 0$. Большинство сформулированных выше теорем справедливо, если функции F и G удовлетворяют условию Гёльдера. Псевдоаналитические функции и в этом случае можно охарактеризовать дифференциальными уравнениями (6); однако они, вообще говоря, уже не будут удовлетворять уравнению вида (4) и не будет справедлив принцип подобия.

§ 9. *Квазиконформные отображения*[1] *и общая теорема о представлении*

При изучении геометрических свойств псевдоаналитических функций удобно работать с функциями второго рода. С помощью одного дифференциального неравенства, которое является следствием дифференциальных уравнений (6), устанавливается, что эти функции в некотором смысле имеют общие геометрические свойства с аналитическими функциями.

Аналитическую функцию комплексного переменного можно рассматривать как отображение на плоскости, конформное в каждой точке, в которой производная не обращается в нуль. Это значит, что в таких точках отображение в малом является преобразованием подобия: оно переводит бесконечно малые круги в бесконечно малые круги. Естественно, что очень полезно рассматривать также отображения, переводящие бесконечно малые круги в бесконечно малые эллипсы с равномерно ограниченным эксцентриситетом. Такие отображения называются *квазиконформными*.

---

[1]) Теорию квазиконформных отображений начал разрабатывать Грёч, ее развивали Альфорс, М. А. Лаврентьев, Морри, Тейхмюллер и другие. Обширную библиографию можно найти в работе Кюнци [1]. [См. также Волковыский Л. И., Квазиконформные отображения, Львов, 1948. — *Прим. ред.*]

Для преобразования вида $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где u и v имеют непрерывные частные производные и отличный от нуля якобиан, только что указанное геометрическое свойство может быть выражено с помощью любого из трех эквивалентных дифференциальных неравенств

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |w_x \cos\theta + w_y \sin\theta|^2 \leqslant Q(u_x v_y - u_y v_x), \tag{29}$$

$$u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 \leqslant 2K(u_x v_y - u_y v_x), \tag{29'}$$

$$|w_{\bar{z}}| \leqslant k\,|w_z|. \tag{29''}$$

Здесь $Q \geqslant 1$, $K \geqslant 1$, $0 \leqslant k < 1$, и постоянные Q, K, k связаны соотношениями

$$K = \frac{1}{2}\left(Q + \frac{1}{Q}\right), \quad k = \frac{Q-1}{Q+1}.$$

Легко проверить, что любая псевдоаналитическая функция второго рода $\omega = \varphi + i\psi$ или даже любое решение $w = u + iv$ эллиптической системы

$$u_x = \alpha_{11} v_x + \alpha_{12} v_y,$$
$$-u_y = \alpha_{21} v_x + \alpha_{22} v_y$$

удовлетворяет этим дифференциальным неравенствам, если система равномерно эллиптическая, т. е. если $\alpha_{12} > 0$ и

$$0 < \frac{(\alpha_{12} + \alpha_{21})^2}{4\alpha_{12}\alpha_{21} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})^2} < \text{const};$$

константа Q квазиконформного отображения зависит только от константы в этом неравенстве.

Определим квазиконформное отображение более общим способом. Вместо того чтобы требовать непрерывности производных, входящих в неравенства (29), мы будем только предполагать, что эти производные существуют и удовлетворяют неравенствам почти всюду, локально интегрируемы с квадратом, а также что непрерывные функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ абсолютно непрерывны по одной из переменных при почти всех значениях другой переменной.

Основное свойство функций, осуществляющих квазиконформные отображения, может быть выражено в виде следующей теоремы, которую мы здесь сформулируем без доказательства (и не в самом общем виде).

Пусть $w(z)$ — функция, осуществляющая квазиконформное отображение и определенная в единичном круге. Тогда w допускает представление

$$w(z) = f[\chi(z)], \tag{30}$$

где $\zeta = \chi(z)$ есть гомеоморфизм (т. е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение) области $|z| \leqslant 1$ на $|\zeta| \leqslant 1$,

причем $\chi(0)=0$, $\chi(1)=1$; *это отображение и обратное ему отображение* χ^{-1} *равномерно удовлетворяют условию Гёльдера, причем константы в этом условии зависят только от константы* Q *в неравенствах* (29), *а* $f(\zeta)$ — *аналитическая функция комплексного переменного* ζ, $|\zeta|<1$.

В этой теореме произвольная функция, осуществляющая квазиконформное отображение, представляется через аналитическую функцию и функцию, удовлетворяющую условию Гёльдера. В § 3 этого дополнения мы получили похожее разложение (уравнение (9)) для функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (4). Легко видеть, что то же самое разложение (9) справедливо для функций, удовлетворяющих дифференциальному неравенству

$$|w_{\bar z}| \leqslant k'|w| \tag{31}$$

с некоторой постоянной k'. Оба результата, принцип подобия для функций, удовлетворяющих дифференциальному неравенству (31), и теорема о разложении вида (30) для функций, осуществляющих квазиконформное отображение, являются частными случаями более общей теоремы о представлении, которую мы сейчас сформулируем, также без доказательства[1]).

Пусть $w(z)$ — *функция, определенная в единичном круге и удовлетворяющая дифференциальному неравенству*

$$|w_{\bar z}| \leqslant k|w_z| + k'|w| + k'' \tag{32}$$

(здесь $k<1$, а на частные производные наложены те же требования, что и раньше). *Тогда функция* w *может быть представлена в виде*

$$w(z) = e^{s(z)} f[\chi(z)] + s_0(z), \tag{33}$$

где $\zeta=\chi(z)$ — *гомеоморфное отображение единичного круга на себя, причем* $\chi(0)=0$, $\chi(1)=1$; *функции* $s(z)$ *и* $s_0(z)$ *непрерывны в замкнутом единичном круге, действительны на его окружности и обращаются в нуль при* $z=1$, *а* $f(\zeta)$ — *аналитическая функция комплексного переменного* ζ. *Функции* s, s_0, χ *и обратный гомеоморфизм* χ^{-1} *удовлетворяют условию Гёльдера, максимумы их модулей и модули непрерывности зависят только от констант в неравенстве* (32). (В частности, если $k''=0$, то $s_0\equiv 0$).

Эта теорема о представлении очень важна, потому что любое решение равномерно эллиптической системы с ограниченными коэффициентами

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha_{11}v_x + \alpha_{12}v_y + \beta_{11}u + \beta_{12}v + \gamma_1, \\ -u_y &= \alpha_{21}v_x + \alpha_{22}v_y + \beta_{21}u + \beta_{22}v + \gamma_2, \end{aligned} \tag{34}$$

[1]) Представление (30) принадлежит Морри [3], а представление (33) — Берсу и Ниренбергу [1]. См. также Боярский [1].

обязательно удовлетворяет дифференциальному неравенству вида (32). В частности, если система однородная ($\gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv 0$), то из теоремы о представлении следует, что решение обладает следующим свойством *однозначной продолжимости*: оно не может обращаться в нуль на открытом множестве, не будучи тождественным нулем. Этот результат является обобщением (но не прямым следствием) теоремы Карлемана, рассмотренной в § 4 этого дополнения.

§ 10. Одна нелинейная краевая задача

Теоремы о представлении, сформулированные в предыдущем параграфе, можно применить для получения априорных оценок и теорем существования решений краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. Мы рассмотрим здесь сравнительно простой пример [1]).

Мы будем решать задачу Неймана для квазилинейного уравнения вида

$$a(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{xx} + 2b(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{xy} + c(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{yy} = 0. \quad (35)$$

Мы предположим, что коэффициенты a, b, c определены для $x^2 + y^2 < 1$ и для любых значений φ, φ_x, φ_y и равномерно удовлетворяют условию Гёльдера, а также, что уравнение равномерно эллиптическое, т. е. что

$$a > 0, \quad ac - b^2 \equiv 1, \quad a + c \leqslant \text{const}. \quad (36)$$

Пусть $\tau(z)$ — действительная функция, определенная в единичном круге и равномерно удовлетворяющая условию Гёльдера. Задача Неймана состоит в том, чтобы найти решение φ этого уравнения, определенное и непрерывно дифференцируемое в единичном круге и удовлетворяющее на границе условиям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial n} = x\varphi_x + y\varphi_y = \tau + k \quad &&\text{при } |z| = 1, \\ &\varphi = 0 &&\text{при } z = 1, \end{aligned} \quad (37)$$

где константа k подлежит определению.

Мы покажем, что эта задача всегда имеет решение. При доказательстве используется следующая

Априорная оценка. *Предположим, что дано некоторое решение задачи Неймана. Тогда функция φ и ее первые производные φ_x, φ_y ограничены, и первые производные удовлетворяют условию Гёльдера; при этом максимумы модулей и константы*

[1]) Этот пример взят из работы Берса и Ниренберга [2].

в условии Гёльдера зависят только от постоянной в условии (36) *и от заданной граничной функции* τ.

Доказательство. Заметим сначала, что из ограниченности первых производных следует ограниченность самой функции. Затем мы оценим константу k. Так как непостоянное решение уравнения (35) не может принимать максимальное или минимальное значение во внутренних точках, то нормальная производная должна менять знак на границе. Поэтому постоянная k не может быть больше, чем максимум $|\tau|$. Таким образом, мы находим оценку для максимума модуля и модуля непрерывности функции $\tau(z)+k$. В некоторой точке границы тангенциальная производная φ должна обращаться в нуль. В этой точке

$$w \equiv \varphi_x - i\varphi_y = \bar{z}(\tau + k).$$

Поэтому нам достаточно найти модуль непрерывности функции w. Эту функцию можно также записать в виде

$$w = u + iv,$$

если положить $u=\varphi_x$, $v=-\varphi_y$. Так как уравнение (35) эквивалентно системе

$$u_x = \frac{2b}{a} v_x + \frac{c}{a} v_y,$$

$$u_y = -v_x,$$

то функция $w(z)$ будет осуществлять квазиконформное отображение с некоторой константой, зависящей только от постоянной в условии (36). Поэтому для этой функции можно найти представление вида (30). Тогда граничное условие (37) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}[zw(z)] = \tau(z) + k, \qquad |z| = 1$$

или

$$\operatorname{Re}[\chi^{-1}(\zeta) f(\zeta)] = \tau[\chi^{-1}(\zeta)] + k, \qquad |\zeta| = 1.$$

Так как мы знаем, что преобразования $\zeta = \chi(z)$, $z = \chi^{-1}(\zeta)$ удовлетворяют условию Гёльдера, то мы можем записать последнее соотношение в виде

$$\operatorname{Re}[\zeta e^{i\lambda(\zeta)} f(\zeta)] = \sigma(\zeta), \qquad |\zeta| = 1,$$

где функция λ действительна и имеются оценки для максимумов модулей, показателей и констант Гёльдера для функций λ и σ. Легко доказываемое обобщение теоремы Привалова (сформулированное и доказанное в § 14 этого дополнения) показывает, что функция $f(\zeta)$ при $|\zeta| \leqslant 1$ удовлетворяет условию Гёльдера. Так как $w(z) = f[\chi(z)]$, то условию Гёльдера удовлетворяет и w.

Рассмотрим теперь нашу задачу Неймана для линейного уравнения вида (35), т. е. для уравнения, в котором коэффициенты a, b, c зависят только от x и y, и сформулируем следующую теорему.

Теорема существования и единственности. *Для линейного равномерно эллиптического уравнения вида* (35) *задача Неймана имеет одно и только одно решение.*

Доказательство единственности сразу следует из сделанного уже замечания о том, что для непостоянного решения нормальная производная на единичной окружности должна менять знак. Утверждение о существовании вытекает из следующей леммы.

Лемма о непрерывности. *Рассмотрим последовательность уравнений*

$$a^{(n)}(x, y)\varphi_{xx} + 2b^{(n)}(x, y)\varphi_{xy} + c^{(n)}(x, y)\varphi_{yy} = 0. \tag{38}$$

Мы предположим, что все эти уравнения равномерно эллиптические (с одной и той же константой) и что их коэффициенты удовлетворяют одному и тому же условию Гёльдера. Мы предположим также, что при $n \to \infty$ коэффициенты во всех точках единичного круга стремятся к коэффициентам уравнения

$$a(x, y)\varphi_{xx} + 2b(x, y)\varphi_{xy} + c(x, y)\varphi_{yy} = 0. \tag{39}$$

Пусть $\varphi^{(n)}$ для каждого n есть решение уравнения (38), *удовлетворяющее граничным условиям нашей задачи Неймана. Тогда функции $\varphi^{(n)}$ в замкнутом единичном круге вместе со своими первыми производными равномерно сходятся к решению задачи Неймана для уравнения* (39).

Доказательство. В силу априорной оценки все функции $\varphi^{(n)}$, $\varphi_x^{(n)}$, $\varphi_y^{(n)}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Тогда, по теореме Арцела, мы можем выбрать подпоследовательность $\{\varphi^{(n_j)}\}$, которая вместе со своими первыми производными сходится к некоторой функции $\varphi(x, y)$. Ясно, что эта функция удовлетворяет граничным условиям задачи Неймана. С другой стороны, из оценок Шаудера (см. гл. IV, § 7) следует, что в любой замкнутой подобласти единичного круга равномерно сходятся вторые производные функций $\varphi^{(n_j)}$. Поэтому предельная функция удовлетворяет уравнению (39). В силу уже доказанного утверждения о единственности, мы a posteriori делаем вывод, что не было необходимости выбирать подпоследовательность и что $\varphi^{(n)} \to \varphi$.

Из леммы о непрерывности следует, что задача Неймана разрешима для линейного уравнения (39), если коэффициенты этого уравнения можно аппроксимировать с помощью коэффициентов уравнений, для которых решение задачи Неймана уже найдено. Мы знаем, что для уравнений с очень гладкими коэффициентами это можно сделать, например, методом интегральных уравнений (см. гл. IV, § 10). Таким образом, существование решения доказано в общем случае. (Заметим, что тот же метод годится для доказательства существования решения равномерно эллиптических уравнений с коэффициентами, которые не только не удовлетворяют условию Гёльдера, но не являются даже непрерывными.)

Теперь мы возвращаемся к нелинейному уравнению (35). Обозначим через $\mathfrak{B}$ банахово пространство непрерывно дифференцируемых функций Φ, заданных в замкнутом единичном круге, с нормой

$$\|\Phi\| = \max|\Phi| + \max|\Phi_x - i\Phi_y|.$$

Пусть Λ — подмножество $\mathfrak{B}$, состоящее из функций, удовлетворяющих граничным условиям нашей задачи Неймана и априорным оценкам, полученным для решений нашей задачи. Легко видеть, что Λ есть выпуклое компактное подмножество $\mathfrak{B}$. Пусть Φ — некоторая функция, принадлежащая множеству Λ. С помощью этой функции мы построим линейное уравнение

$$a(x, y, \Phi(x, y), \Phi_x(x, y), \Phi_y(x, y))\varphi_{xx} + \\ + 2b(x, y, \Phi(x, y), \Phi_x(x, y), \Phi_y(x, y))\varphi_{xy} + \\ + c(x, y, \Phi(x, y), \Phi_x(x, y), \Phi_y(x, y))\varphi_{yy} = 0$$

и обозначим через φ однозначно определенное решение задачи Неймана для этого линейного уравнения. Если мы положим

$$\varphi = T(\Phi), \tag{40}$$

то преобразование T будет переводить Λ в себя. То, что это преобразование непрерывно, легко можно показать с помощью сформулированной выше леммы о непрерывности. Согласно теореме Шаудера о неподвижной точке, преобразование T должно иметь неподвижную точку. Другими словами, существует функция φ, такая, что $\varphi = T(\varphi)$. Это и есть искомое решение задачи Неймана.

Тот же метод применим в более общих случаях. Например, мы могли бы доказать разрешимость задачи Неймана для нелинейного уравнения вида

$$a(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{xx} + 2b(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{xy} + \\ + c(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)\varphi_{yy} = d(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y),$$

если оно равномерно эллиптическое и его правая часть удовлетворяет неравенству

$$|d(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)| \leqslant k'(|\varphi_x| + |\varphi_y|) + k''.$$

В этом случае мы получили бы необходимые оценки, применяя не представление (30), а более общее представление (33).

§ 11. Обобщение теоремы Римана об отображениях

Понятие квазиконформного отображения естественным образом приводит к далеко идущим обобщениям теоремы Римана об отображениях. Эта теорема утверждает, что любая заданная односвязная область, например, для простоты, жорданова область (т. е. область, ограниченная простой жордановой кривой) может быть отображена на другую жорданову область конформно, т. е. так, чтобы бесконечно малые окружности переходили в бесконечно малые окружности. Отображение может быть выбрано так, чтобы три заданные точки на границе одной области переходили в три заданные точки на границе другой области.

Естественно поставить вопрос, можно ли отобразить одну заданную жорданову область в другую так, чтобы в каждой точке выполнялись следующие условия: бесконечно малый эллипс с эксцентриситетом e и большой осью, наклоненной под углом θ к оси x, переводится в бесконечно малый эллипс с заданными эксцентриситетом e' и наклоном большой оси θ'. Мы можем требовать, чтобы числа e, e', θ, θ' зависели и от рассматриваемой точки и от ее образа. Легко проверить, что при соответствующих предположениях о непрерывности геометрические условия, наложенные на такое отображение, могут быть выражены аналитически с помощью требования, чтобы осуществляющая это отображение функция $w(z) = u + iv$ удовлетворяла квазилинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, т. е. системе вида

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha_{11}(x, y, u, v)\, v_x + \alpha_{12}(x, y, u, v)\, v_y, \\ -u_y &= \alpha_{21}(x, y, u, v)\, v_x + \alpha_{22}(x, y, u, v)\, v_y. \end{aligned} \tag{41}$$

Предположим, что коэффициенты этой системы удовлетворяют условию Гёльдера и что система равномерно эллиптическая. При этих предположениях справедлив следующий результат (впервые доказанный З. Я. Шапиро[1]): *Заданная жорданова область D на плоскости z может быть отображена на заданную жорданову*

[1]) См. Шапиро [1]. Эту задачу и ее обобщения рассматривали многие авторы; см. библиографию в работе Боярского [1]. [Далеко идущее обобщение этой теоремы принадлежит М. А. Лаврентьеву, см. его работу в *Матем. сб.*, **21** (63) (1947), 285—320. — *Прим. ред.*]

область D' *на плоскости* w *с помощью пары функций* $u(x, y)$, $v(x, y)$, *удовлетворяющих системе* (41). Отображение можно выбрать так, чтобы три заданные граничные точки D переходили в три заданные граничные точки D'.

Эту теорему можно доказать с помощью метода, описанного в предыдущем параграфе. Представление (30) для функций, осуществляющих квазиконформное отображение, дает необходимые априорные оценки.

§ 12. Две теоремы о минимальных поверхностях

В наших предыдущих исследованиях мы подчеркивали аналогию, существующую между аналитическими функциями комплексного переменного и решениями эллиптических дифференциальных уравнений. Однако в случае нелинейных уравнений возникают новые явления, которые не имеют аналогий в теории аналитических функций. Мы проиллюстрируем это на примере двух теорем, касающихся решений одного из самых простых нелинейных уравнений — уравнения минимальных поверхностей (см. гл. I, § 6):

$$\left(1+\varphi_y^2\right)\varphi_{xx}-2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+\left(1+\varphi_x^2\right)\varphi_{yy}=0. \tag{42}$$

Первая теорема (принадлежащая С. Н. Бернштейну) утверждает, что *любое решение уравнения* (42), *определенное на всей плоскости, есть линейная функция.*

Заметим, что для решений уравнения Лапласа утверждение теоремы было бы справедливо только если бы мы заранее знали, что решение, о котором идет речь, имеет ограниченные производные; в таком случае это утверждение было бы следствием хорошо известной теоремы Лиувилля о целых аналитических функциях.

Аналогично, теорема Римана об устранимых особенностях, которая, как мы видели раньше, применима также к линейным эллиптическим уравнениям, справедлива для уравнения минимальных поверхностей в гораздо более сильной форме (Л. Берс).

Однозначное решение уравнения (42), *определенное в окрестности некоторой точки* (*за исключением самой этой точки*) *имеет в этой точке устранимую особенность.* Другими словами, решение можно определить в этой точке таким образом, чтобы функция была в ней регулярной. Заметим, что мы не требуем a priori, чтобы решение было ограниченным.

Мы не будем здесь доказывать эти теоремы; заметим только, что в одном из методов их доказательства снова применяется теория комплексных функций [1]).

[1]) Библиографические указания на эти теоремы и их обобщения даны в работе Берса [4]. См. также Финн [1] и Оссерман [1]. Особенно простые доказательства даны в работах Иоганнеса Нитше [1] и [2].

§ 13. Уравнения с аналитическими коэффициентами

До сих пор мы рассматривали применение теоретико-функциональных методов к линейным дифференциальным уравнениям с частными производными эллиптического типа при очень слабых ограничениях на коэффициенты. В случае, когда сами коэффициенты являются аналитическими функциями двух переменных, существует совершенно другая возможность применения теории комплексных функций для изучения решений.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\alpha(x, y)\varphi_x+\beta(x, y)\varphi_y+\gamma(x, y)\varphi=0, \qquad (43)$$

коэффициенты которого — действительные аналитические функции, и, следовательно, могут быть определены также для комплексных значений независимых переменных. Для простоты мы предположим, что эти коэффициенты — целые аналитические функции x и y. Мы будем рассматривать как независимые переменные комплексные переменные $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$; в новых переменных уравнение (43) можно записать в виде

$$\varphi_{z\bar{z}}+A\varphi_z+B\varphi_{\bar{z}}+C\varphi=0; \qquad (44)$$

формально оно является гиперболическим уравнением, записанным в каноническом виде. Заметим, что, прибегая к такому преобразованию, мы вынуждены рассматривать также комплекснозначные решения. При этом мы не теряем никаких решений, ибо, как было показано ранее (стр. 343), все решения линейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами сами являются аналитическими функциями.

Хорошо известно, что все решения гиперболического уравнения в канонической форме в действительной области можно выразить с помощью интегральной формулы, содержащей так называемую функцию Римана этого уравнения и произвольные функции одной переменной (см. гл. V). Те же самые формальные выкладки можно проделать и в комплексной области. Тогда мы получим интегральные операторы, преобразующие произвольную функцию одного комплексного переменного (которая, конечно, предполагается аналитической) в решение эллиптического дифференциального уравнения (44). В случае уравнения Лапласа этот оператор не является интегральным оператором; он состоит просто в том, что берется действительная часть аналитической функции.

Метод интегральных операторов, который мы описали только в самых общих чертах, был развит и применен ко многим частным случаям С. Бергманом, И. Н. Векуа и их последователями. Подробности и формулы, а также распространение метода на дифференциальные

уравнения высших порядков и дифференциальные уравнения более чем с двумя независимыми переменными, можно найти в соответствующей литературе [1]).

§ 14. Доказательство теоремы Привалова [2])

В этом параграфе мы дадим доказательство теоремы Привалова, сформулированной в § 3 этого дополнения.

Рассмотрим аналитическую функцию $g(z)=U+iV$, определенную для $|z|<1$. Мнимая часть $V(z)$ непрерывна при $|z|\leqslant 1$, и для всех θ, θ' и некоторого α, $0<\alpha<1$,

$$|V(e^{i\theta})-V(e^{i\theta'})|\leqslant H|e^{i\theta}-e^{i\theta'}|^{\alpha}.$$

Для некоторого фиксированного θ' обозначим через $\Phi(z)$ гармоническую функцию (однозначную в единичном круге) $\Phi(z)=\operatorname{Re}[(1-ze^{-i\theta'})^{\alpha}]$. Эту функцию можно определить так, чтобы было $\Phi(0)=1$. Тогда $\Phi(z)=|z-e^{i\theta'}|^{\alpha}\cos\alpha\nu$, где ν — угол между прямыми, соединяющими точку $e^{i\theta'}$ с точками 0 и z. Отсюда следует, что на единичной окружности справедливо неравенство

$$-\frac{H\Phi(z)}{\cos\alpha\pi/2}\leqslant V(z)-V(e^{i\theta'})\leqslant\frac{H\Phi(z)}{\cos\alpha\pi/2};$$

в силу принципа максимума для гармонических функций оно верно также всюду в единичном круге. В частности, гармоническая функция $V(z)-V(e^{i\theta'})$, рассматриваемая в круге $|z-re^{i\theta'}|<1-r$, по модулю не превышает величины

$$(H/\cos{}^{1}/_{2}\alpha\pi)\,[2(1-r)]^{\alpha}.$$

Следовательно, в центре этого круга абсолютные величины производных V_x, V_y не больше, чем $(H/\cos{}^{1}/_{2}\alpha\pi)\,2^{\alpha}(1-r)^{\alpha-1}$. Но $g'(z)=V_y+iV_x$ и, так как θ' произвольно, мы имеем

$$|g'(z)|\leqslant\frac{4H}{\cos\alpha\pi/2}\,\frac{1}{(1-|z|)^{1-\alpha}}.$$

С помощью этого неравенства легко показать, что

$$|g(z_1)-g(z_2)|=\left|\int_{z_1}^{z_2}g'(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant kH|z_1-z_2|^{\alpha},$$

где k зависит только от α.

---

[1]) См. Бергман [1]. Обширная библиография содержится в работах Кшивоблоцкого [1] и Векуа [2].

[2]) См. Привалов [1]. Теорема имелась уже в работе Корна [1]. Данное здесь доказательство принадлежит Берсу. Обобщение теоремы дано в § 3 статьи Агмона, Дуглиса, Ниренберга [1].

Теперь мы сформулируем некоторое *обобщение теоремы Привалова*, полезное для приложений (см. § 10 этого дополнения). Пусть $\lambda(z)$ — действительная функция, определенная на единичной окружности $|z|=1$, причем известно, что для нее выполняется условие Гёльдера *с показателем, меньшим единицы*. Пусть $g(z)$—аналитическая функция, заданная в единичном круге и непрерывная на окружности. Предположим, что функция $\sigma(z)=\operatorname{Re}[g(z)\,ze^{i\lambda(z)}]$ на единичной окружности равномерно удовлетворяет условию Гёльдера. *Тогда функция $g(z)$ равномерно удовлетворяет условию Гёльдера в замкнутом единичном круге, причем константы в условии Гёльдера зависят только от максимума модуля и от констант Гёльдера функций λ и σ.*

Чтобы доказать эту теорему, возьмем аналитическую функцию $h(z)$, заданную на единичном круге, мнимая часть которой на окружности совпадает с $\lambda(z)$. Такая функция существует, так как задача Дирихле для гармонических функций разрешима. Если мы потребуем, чтобы функция $\operatorname{Re} h$ обращалась в нуль в начале координат, то наша функция h будет определяться однозначно и, в силу теоремы Привалова, для нее будут известны максимум модуля и константы, входящие в условие Гёльдера. Аналитическая функция

$$g_1(z)=g(z)\,ze^{h(z)}$$

на единичной окружности удовлетворяет граничному условию $\operatorname{Re} g_1(z)=e^{\operatorname{Re} h}\sigma$. Таким образом, по теореме Привалова, мы можем найти константы, характеризующие условие Гёльдера для функции $g(z)$ на единичной окружности и, в силу той же теоремы, во всем единичном круге.

§ 15. Доказательство теоремы Шаудера о неподвижной точке

Теорема Шаудера о неподвижной точке является обобщением на бесконечномерные пространства знаменитой теоремы Брауэра. Теорема Брауэра утверждает, что непрерывное отображение замкнутого ограниченного выпуклого множества в n-мерном евклидовом пространстве в себя имеет неподвижную точку. Доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке можно найти в большинстве учебников по топологии [1]).

Так как теорема Шаудера о неподвижной точке касается отображений в банаховом пространстве, то мы прежде всего напомним определение такого пространства.

---

[1]) См., например, Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, Гостехиздат, М. — Л., 1947, стр. 90. — *Прим. ред.*

Линейное векторное пространство (действительное) есть множество элементов (называемых также точками), которые можно складывать и умножать на действительные числа так, что при этом выполняются обычные законы арифметики. Точнее, если через x, y, z, ... обозначаются элементы пространства, а через λ, μ, ν, ... — действительные числа, то мы требуем, чтобы выполнялись следующие законы: 1) $x+y=y+x$; 2) $x+(y+z)=(x+y)+z$; 3) существует такой элемент 0, что $x+0=x$; 4) уравнение $x+y=0$ при любом y имеет единственное решение (оно обозначается через $-y$); 5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$; 6) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$; 7) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$; 8) $1\cdot x=x$. Линейное пространство называется нормированным, если любому элементу x поставлено в соответствие число $\|x\|$, такое, что $\|x\|\geqslant 0$, причем $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$; $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$; $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. В нормированном пространстве расстояние между двумя элементами x и y определяется как $\|x-y\|$. Говорят, что последовательность элементов $\{x_n\}$ сходится к элементу x, если $\|x_n-x\|\to 0$. Множество Λ в таком пространстве называется замкнутым, если для любой последовательности элементов $\{x_n\}$ из Λ, такой, что $\|x_n-x\|\to 0$, элемент x также принадлежит Λ.

Нормированное векторное пространство называется полным, или банаховым пространством, если в нем любая последовательность Коши сходится, т. е. если для любой последовательности элементов $\{x_n\}$, для которой $\|x_n-x_m\|\to 0$ при $m, n\to\infty$, существует элемент x, такой, что $\|x_n-x\|\to 0$.

Функция, или отображение из одного банахова пространства $\mathfrak{B}$ в другое банахово пространство, называется непрерывной, если достаточно малым изменениям аргумента соответствуют сколь угодно малые изменения значений функции.

Множество Λ элементов банахова пространства называется выпуклым, если оно содержит отрезок, соединяющий любые две его точки. Точнее, если x и y — элементы Λ, то все элементы вида $\lambda x+\mu y$ при $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $\lambda+\mu=1$ (λ, μ — действительные числа) принадлежат Λ.

Множество Λ элементов банахова пространства называется компактным, если любая бесконечная последовательность элементов из Λ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу Λ.

Пусть Λ — произвольное множество элементов банахова пространства. Оно содержится в некотором замкнутом выпуклом множестве, например, во всем пространстве. Так как пересечение любого числа замкнутых выпуклых множеств, как легко видеть, также замкнуто и выпукло, то существует наименьшее замкнутое выпуклое множество $\widehat{\Lambda}$, содержащее Λ; оно называется выпуклой оболочкой Λ. В частности, если Λ состоит из конечного числа точек, то его выпуклая оболочка

лежит в конечномерном подпространстве банахова пространства, и ее можно рассматривать как ограниченное замкнутое выпуклое множество в евклидовом пространстве.

Пусть теперь Λ — выпуклое компактное множество в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, и пусть T — непрерывное преобразование Λ в себя, не обязательно линейное. Теорема Шаудера утверждает, что это преобразование имеет неподвижную точку.

Чтобы доказать эту теорему, мы построим сначала вспомогательное преобразование S, которое непрерывным образом переводит множество Λ в конечномерное замкнутое выпуклое подмножество [1]) Λ и для которого

$$\|S(x)-x\| < \varepsilon$$

для всех x из Λ, причем здесь ε — некоторое наперед заданное положительное число.

Это преобразование строится следующим образом. Мы можем найти конечную последовательность точек

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_N \tag{45}$$

из Λ, таких, что для любого элемента x из Λ и для некоторого j выполняется неравенство $\|x-x_j\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Действительно, пусть x_1 — произвольная точка из Λ. Если все остальные точки лежат не дальше, чем на расстоянии $\frac{1}{2}\varepsilon$ от x_1, то наше утверждение установлено. В противном случае будет существовать такая точка x_2, что $\|x_1-x_2\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Если не все точки из Λ отстоят на расстоянии, меньшем чем $\frac{1}{2}\varepsilon$, от x_1 или x_2, то в Λ будет существовать точка x_3, такая, что $\|x_1-x_3\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$, $\|x_2-x_3\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Продолжая выбирать точки таким образом, мы построим последовательность (45). Заметим, что этот процесс должен оборваться после конечного числа шагов, так как в противном случае мы получили бы бесконечную последовательность точек из Λ, таких, что расстояние между каждой парой этих точек не меньше, чем $\frac{1}{2}\varepsilon$. Такая последовательность не могла бы содержать сходящуюся подпоследовательность, что противоречило бы

[1]) Под конечномерным множеством в банаховом пространстве мы здесь понимаем множество, содержащееся в некотором конечномерном подпространстве.

компактности Λ. Построив последовательность (45), мы для x из Λ положим

$$\mu_j(x) = \begin{cases} \|x - x_j\|, & \text{если } \|x - x_j\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \varepsilon - \|x - x_j\|, & \text{если } \frac{1}{2}\varepsilon < \|x - x_j\| < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \|x - x_j\| > \varepsilon; \end{cases}$$

$$\lambda_j(x) = \frac{\mu_j(x)}{\sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu(x)},$$

$$S(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x)\, x_j.$$

Легко видеть, что отображение $S(x)$ непрерывно. Оно отображает Λ в Λ_0 — выпуклую оболочку точек (45). Кроме того, так как $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$ и $\lambda_j(x) = 0$, если $\|x - x_j\| \geqslant \varepsilon$, то

$$\|x - S(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x)\, x - S(x) \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x)\, \|x - x_j\| < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь произведение преобразований ST. Это преобразование непрерывным образом переводит Λ_0 (выпуклую оболочку точек (45)) в себя. Согласно теореме Брауэра, это отображение имеет неподвижную точку y. Таким образом, мы имеем $S[T(y)] = y$ и $\|T(y) - y\| < \varepsilon$.

Из предыдущего утверждения следует, что для любого n мы можем найти такую точку y_n из Λ, что $\|T(y_n) - y_n\| < 1/n$. Так как Λ — компактное множество, то существует подпоследовательность $\{y_{n_j}\}$, сходящаяся к некоторой точке y из Λ.

В силу непрерывности преобразования T мы имеем

$$T(y) = \lim T(y_{n_j}) = y.$$

Точка y является искомой неподвижной точкой.

Существует также более общая форма теоремы Шаудера о неподвижной точке, которая утверждает, что непрерывное отображение любого замкнутого выпуклого множества в банаховом пространстве в его компактное подмножество имеет неподвижную точку. Этот результат можно доказать, проверив, что выпуклая оболочка компактного множества компактна. Более общий результат был получен Тихоновым [1]).

---

[1]) См. Данфорд и Шварц [1]. [См. также Лере и Шаудер [1]. — *Прим. ред.*]

Глава V

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Введение

В следующих двух главах рассматриваются гиперболические уравнения, описывающие распространение волн. Эта глава посвящена задачам с двумя независимыми переменными x, y или x, t (в последних параграфах мы часто будем писать t вместо y, чтобы подчеркнуть, что t — переменная, соответствующая времени); в гл. VI рассматривается случай более чем двух независимых переменных.

Чтобы сохранить единство изложения, иногда придется повторить в несколько измененном виде материал, уже затронутый в гл. III.

В начале этой главы, в соответствии с историческим развитием предмета [1]), будет рассматриваться одно гиперболическое уравнение, в частности, второго порядка.

Но затем основное внимание будет обращено на гиперболические системы дифференциальных уравнений, особенно системы уравнений первого порядка, что не только приводит к большой общности и простоте, но и непосредственно соответствует многим физическим задачам, так как задачи эти часто формулируются в терминах таких систем.

Основным результатом в случае двух независимых переменных будет решение задачи Коши с той же степенью полноты, с которой решаются задачи в теории обыкновенных дифференциальных уравнений; решения могут быть построены с помощью итерационных методов, совершенно аналогичных тем, которые применяются к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Понятие характеристик, введенное уже в гл. I, II и III, играет решающую роль в изучении гиперболических уравнений не только в случае двух, но и в случае большего числа независимых переменных (см. гл. VI). Мы сначала напомним и расширим результаты наших прежних исследований характеристик для случая двух независимых переменных, а затем применим эту теорию к решению основной задачи Коши.

Характеристики (характеристические кривые) C обладают следующими свойствами, каждое из которых можно принять за определение (см. также гл. I, II, III):

---

1) См. Зауэр [1].

1) На характеристике дифференциальное уравнение (а для систем — некоторая линейная комбинация уравнений) является уравнением, связывающим внутренние производные.

1a) Начальные данные на характеристике не могут быть заданы произвольно; они должны удовлетворять условию совместности, если мы хотим дополнить эти данные до „интегральной полосы".

2) Разрывы решения (вид которых уточняется ниже) могут происходить только по характеристикам.

3) Характеристики являются единственно возможными „линиями ветвления" решения, т. е. такими линиями, для которых одна и та же задача Коши может иметь несколько решений.

Для систем квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка начальные данные, или „данные Коши", являются просто значениями неизвестных функций на начальной кривой. Первое свойство связано со следующим основным фактом: некоторое направление является характеристическим в точке P, если существует такая линейная комбинация дифференциальных уравнений системы, которая в точке P содержит дифференцирование только по этому направлению. (Система является гиперболической, если ее можно заменить с помощью линейного преобразования эквивалентной системой, в которой каждое дифференциальное уравнение в каждой точке содержит дифференцирование только по одному „характеристическому" направлению.) Второе и третье свойство для гиперболических систем также можно получить из этого специального вида уравнений.

Как мы увидим, задача Коши для одного дифференциального уравнения высшего порядка всегда сводится к задаче для системы уравнений первого порядка со специальным образом выбранными начальными условиями (см. также гл. I, § 7). Тем не менее сначала мы вкратце рассмотрим случай одного дифференциального уравнения, в основном уравнения второго порядка, не производя такого сведения. (Читатель, которого в первую очередь интересует систематическое изложение, может опустить многие детали § 1.)

§ 1. Характеристики дифференциальных уравнений (в основном второго порядка)

1. Основные понятия. Квазилинейные уравнения. Рассмотрим квазилинейный дифференциальный оператор второго порядка

$$L[u] \equiv ar + bs + ct \tag{1}$$

и дифференциальное уравнение

$$L[u] + d \equiv ar + bs + ct + d = 0, \tag{2}$$

где

$$r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy},$$

а величины a, b, c, d — заданные в рассматриваемой области функции переменных x, y, u, $p = u_x$, $q = u_y$. В тех случаях, когда не оговорено противное, предполагается, что все встречающиеся нам функции и их производные непрерывны.

Как и в гл. II, мы начнем с задачи Коши, т. е. будем дополнять начальную полосу до интегральной полосы. Сначала мы определим полосу первого порядка C_1 следующим образом: две функции $x = X(\lambda)$, $y = Y(\lambda)$ параметра λ определяют на плоскости x, y кривую C_0; вместе с функцией $u = U(\lambda)$ они определяют кривую $\overline{C}_0$, лежащую в пространстве x, y, u „над кривой C_0". Плоскости, касательные к кривой $\overline{C}_0$, определяются заданием двух дополнительных функций $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ (нормаль к такой плоскости имеет компоненты P, Q, -1), причем эти функции должны удовлетворять „соотношению полосы"

$$\dot{U} = P\dot{X} + Q\dot{Y}, \tag{3}$$

которое отражает тот факт, что кривая $\overline{C}_0$ и касательная плоскость параллельны (точка здесь обозначает дифференцирование по параметру λ). Все время мы предполагаем, что

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \neq 0.$$

Заданная поверхность $u(x, y)$ порождает полосу C_1 над основной кривой C_0, если мы положим U, P и Q равными тем значениям, которые функции u, p и q принимают на C_0, т. е. мы полагаем $U(\lambda) = u(X(\lambda), Y(\lambda))$ и, кроме того, $P(\lambda) = u_x(X(\lambda), Y(\lambda))$, $Q(\lambda) = u_y(X(\lambda), Y(\lambda))$[1]. Для полосы, лежащей на поверхности $u(x, y)$, мы будем писать u, p, q (и x, y) вместо U, P, Q (и X, Y), если при этом остается ясным смысл.

Часто бывает полезно представлять основную кривую C_0 на плоскости x, y с помощью соотношения $\varphi(x, y) = 0$. Мы будем предполагать, что кривая $\varphi = 0$ на плоскости x, y, а также кривая $\overline{C}_0$ на поверхности $u = u(x, y)$ отделяют область, где $\varphi < 0$, от области, где $\varphi > 0$. Мы предположим также, что $\varphi = 0$ — регулярная кривая, т. е. производные φ_x и φ_y не обращаются в нуль одновременно.

Затем мы определим полосу второго порядка C_2, рассматривая три дополнительные функции $R(\lambda)$, $S(\lambda)$, $T(\lambda)$, соответствующие вторым производным r, s, t функции $u(x, y)$ и полосе C_1; эти функции должны удовлетворять соотношениям полосы

$$\dot{P} = R\dot{x} + S\dot{y}, \quad \dot{Q} = S\dot{x} + T\dot{y}.$$

[1]) Соотношение полосы (3) выражает тот факт, что интегральная поверхность $u(x, y)$ содержит эту полосу.

Основную задачу Коши[1]) для уравнения (2) можно поставить следующим образом.

Дана полоса первого порядка C_1; надо найти решение $u(x, y)$ уравнения (2), такое, чтобы поверхность $u(x, y)$ содержала полосу C_1. Естественно, при этом предполагается, что функции λ, определяющие полосу C_1, имеют непрерывные производные первого, и, если понадобится, более высокого порядка[2]).

Вместо того чтобы сразу же попытаться решить эту задачу, мы поставим сейчас менее тонкий вопрос: позволяют ли условия (2) и (3) однозначным образом дополнить заданную полосу C_1 до полосы C_2, удовлетворяющей уравнению (2)? Такую полосу C_2 мы будем называть *интегральной полосой.*

Записав соотношения для интегральной полосы C_2 в виде

$$\dot{p} = r\dot{x} + s\dot{y}, \quad \dot{q} = s\dot{x} + t\dot{y},$$

мы получим на C_1 систему

$$\begin{aligned} ar + bs + ct &= -d, \\ \dot{x}r + \dot{y}s \qquad &= \dot{p}, \\ \dot{x}s + \dot{y}t &= \dot{q} \end{aligned} \tag{4}$$

трех линейных уравнений относительно r, s, t. В результате для любой точки P полосы C_1 возникает следующая альтернатива: либо для любой точки P кривой $\overline{C}_0$

$$Q \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} \equiv a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 \neq 0$$

— в этом случае C_1 называется *свободной полосой*, вторые производные однозначно определяются на C_0 полосой C_1 и дифференциальным уравнением; либо в некоторой точке P кривой $\overline{C}_0$

$$Q \equiv a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0. \tag{5}$$

---

[1]) Для двух независимых переменных x, y, несомненно, полезно рассмотреть решения, полосы и характеристики в трехмерном пространстве x, y, u, как мы это делали в гл. II. Однако часто мы будем концентрировать свое внимание на плоскости независимых переменных x, y и рассматривать полосы или кривые в пространстве x, y, u как кривые на плоскости x, y, несущие значения $u, p, q, \ldots$. Если контекст ясен, мы позволим себе применять то из этих определений, которое окажется более удобным.

[2]) Решение ищется в некоторой малой окрестности кривой C_0. — *Прим. ред.*

Говорят, что в такой точке P, т. е. в точке, где выполняется это „характеристическое соотношение“, функции, задающие полосу, образуют *характеристический элемент.*

В дальнейшем предполагается, что либо вся рассматриваемая полоса свободна, либо она состоит целиком из характеристических элементов. Во втором случае *полоса* называется *характеристической* (см. гл. III, § 2).

Если полоса C_1 свободна, т. е. если $Q \neq 0$ всюду на $\bar{C}_0$, то интегральная полоса C_2 однозначно определяется как расширение полосы C_1. Кроме того, дифференцируя уравнения (4), мы убеждаемся, что на $\bar{C}_0$ однозначно определяются также интегральные полосы более высокого порядка. Например, для третьих производных r_x, s_x, t_x мы получаем три уравнения

$$\begin{aligned} ar_x + bs_x + ct_x &= -a_x r - b_x s - c_x t - d_x, \\ \dot{x} r_x + \dot{y} s_x &= \dot{r}, \\ \dot{x} s_x + \dot{y} t_x &= \dot{s}; \end{aligned}$$

правые части этих уравнений известны, а определитель системы не обращается в нуль.

Если $Q \equiv 0$ вдоль кривой $\bar{C}_0$, т. е. полоса первого порядка C_1 состоит целиком из характеристических элементов, то из того, что определитель (5) обращается в нуль, следует, что между левыми частями уравнений (4), а следовательно, и между их правыми частями имеется некоторая линейная зависимость, причем коэффициенты зависят только от x, y, u, p, q. На C_1 это соотношение дает некоторое новое условие на p и q, кроме соотношения полосы (3); это условие должно выполняться, если полосу C_1 можно дополнить до интегральной полосы второго порядка C_2. Такую полосу первого порядка C_1 мы называем *характеристической полосой*; несущая полосу кривая $\bar{C}_0$ называется *характеристической кривой* (характеристикой) в пространстве x, y, u, а ее проекция C_0 — *проекцией характеристической кривой*, или просто *характеристической кривой* на плоскости x, y.

На характеристической полосе C_1, включенной в интегральную полосу второго порядка, вторые производные r, s, t не определяются однозначно, а только с точностью до слагаемого, которое является произвольным решением однородной системы, соответствующей (4).

Итак, *либо полоса C_1 свободная, и в этом случае дифференциальное уравнение однозначно определяет вторые и старшие производные функции и на C_1, если заданы u, p, q; либо полоса содержит точки, удовлетворяющие характеристическому соотношению* (5). *Если C_1 целиком состоит из таких*

точек, то ее можно расширить до интегральной полосы C_2 только при выполнении некоторого дополнительного условия. В этом случае расширение уже не является однозначным. Тогда полоса C_1 называется характеристической.

Рассмотрим, например, линейное дифференциальное уравнение $u_{xy}=0$ и полосу C_1, заданную функциями $x=\lambda$, $y=0$, $u=k\lambda$ (с постоянным k), $p=k$, $q=f(\lambda)$. Все точки этой полосы удовлетворяют соотношению (5), и из уравнений (4) следует, что вдоль полосы $\dot{q}=0$. Следовательно, на полосу надо наложить дополнительное условие $q=\text{const}$, для того чтобы ее можно было расширить до интегральной полосы. Другими словами, среди всех полос, элементы которых удовлетворяют условию (5), только плоские полосы являются характеристическими.

Характеристическое соотношение получается также с помощью следующих рассуждений (которые можно обобщить на n независимых переменных); эти рассуждения относятся к основному многообразию $\varphi(x, y)=0$ $(\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0)$ полосы C_1 (см. гл. I, прил., § 1 и гл. III, § 2). Мы будем называть дифференциальный оператор второго порядка, примененный к функции u, *внутренним дифференциальным оператором* на C_1, или оператором, действующим внутри C_1, если он на кривой $\overline{C}_0$ может быть выражен через величины, описывающие полосу C_1. Например, u_{xy} является таким внутренним дифференциальным оператором для полосы $x=\lambda$, $y=0$, $u=0$, $p=0$, $q=f(\lambda)$, так как $u_{xy}=\dot{q}$.

Теперь мы ставим следующий вопрос: каким условиям должна удовлетворять полоса C_1, чтобы квазилинейный дифференциальный оператор (1) был внутренним оператором на C_1? Оказывается, что необходимым и достаточным условием этого является выполнение на C_1 *характеристического соотношения*

$$Q(\varphi, \varphi)\equiv a\varphi_x^2+b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2=0. \tag{6}$$

Здесь $Q(\varphi, \varphi)$ называется „характеристической формой".

Доказательство. Вместо x, y мы введем новые координаты $\eta=\varphi(x, y)$ и $\lambda=\psi(x, y)$ так, чтобы λ (или ψ) тождественно совпадало с ранее введенным на C_1 параметром, а φ была бы переменной, „выводящей" из C_1. Тогда для любой функции $u(x, y)$

$$u_{xx}=u_{\varphi\varphi}\varphi_x^2+2u_{\varphi\psi}\varphi_x\psi_x+u_{\psi\psi}\psi_x^2+u_\varphi\varphi_{xx}+u_\psi\psi_{xx},$$

$$u_{xy}=u_{\varphi\varphi}\varphi_x\varphi_y+u_{\varphi\psi}(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+u_{\psi\psi}\psi_x\psi_y+u_\varphi\varphi_{xy}+u_\psi\psi_{xy},$$

$$u_{yy}=u_{\varphi\varphi}\varphi_y^2+2u_{\varphi\psi}\varphi_y\psi_y+u_{\psi\psi}\psi_y^2+u_\varphi\varphi_{yy}+u_\psi\psi_{yy},$$

и если $Q(\varphi, \psi)$ есть билинейная форма (см. т. I, гл. 1, § 1, п. 4), соответствующая квадратичной форме Q, то

$$L[u] = u_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi) + 2u_{\varphi\psi}Q(\varphi, \psi) + u_{\psi\psi}Q(\psi, \psi) + \\ + u_{\varphi}L[\varphi] + u_{\psi}L[\psi]. \quad (7)$$

На полосе C_1 дифференцирование по $\psi = \lambda$ является внутренним дифференцированием, а дифференцирование по φ является дифференцированием, выводящим из C_1 (см. гл. II, прил. 1, § 1). На C_1 функция u и ее первые производные известны, а также известны те производные второго порядка, которые получаются из первых производных с помощью дифференцирования по $\lambda = \psi$. Таким образом, единственный член в операторе $L[u]$, содержащий вторые производные, не лежащие в C_1, есть $u_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi)$. Условие $Q(\varphi, \varphi) = 0$ при $\varphi = 0$ является, следовательно, необходимым и достаточным для того, чтобы $L[u]$ был внутренним оператором.

Теперь мы рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L[u] + d = 0. \quad (2)$$

Мы снова немедленно приходим к *альтернативе*: или $Q(\varphi, \varphi) \neq 0$ в любой точке C_1, и в этом случае выводящая из C_1 производная $u_{\varphi\varphi}$, а вместе с ней и все вторые производные функции u, однозначно определены на C_1; или же $Q(\varphi, \varphi) = 0$ в некоторой точке P полосы C_1, и тогда дифференциальное уравнение (2) в этой точке полосы представляет собой дополнительное условие на величины, определяющие полосу. Если мы предположим, что полоса C_1 задана (т. е. что вдоль кривой $\overline{C}_0$ известны первые производные функции u) и если $Q(\varphi, \varphi) = 0$ всюду на C_1, то это новое условие имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $u_{\varphi} = k$ аргумента $\psi = \lambda$, а именно

$$2k_{\lambda}Q(\varphi, \psi) + kL[\varphi] + \ldots = 0, \quad (8)$$

где точки поставлены вместо величин, известных на полосе.

Ясно, что характеристические условия (6) и (5) эквивалентны. Действительно, так как

$$\varphi_x\dot{x} + \varphi_y\dot{y} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

левая часть формулы (6) с точностью до множителя совпадает с левой частью (5). Характеристические полосы C_1 могут существовать только в тех областях, где

$$4ac - b^2 \leqslant 0,$$

иначе уравнениям (5) или (6) не могут удовлетворять никакие действительные отношения $\dot{x} : \dot{y}$ (или $\varphi_x : \varphi_y$).

Мы напомним следующие определения. Дифференциальный оператор $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}$ *является гиперболическим в точке* $P : (x, y, u, p, q)$ пятимерного пространства x, y, u, p, q, если в этой точке

$$4ac - b^2 < 0 \tag{9}$$

(см. гл. III, § 2, п. 1). Аналогично, он называется *гиперболическим на поверхности* $u = u(x, y)$, если условие (9) выполняется в каждой точке этой поверхности. Ясно, что если условие (9) выполняется в некоторой точке P пространства x, y, u, p, q, то оно будет выполняться и в соответствующим образом выбранной окрестности P.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что дифференциальные операторы гиперболичны в рассматриваемых точках.

Если дифференциальный оператор линеен, то гиперболичность его зависит только от x, y и не зависит от u, p, q. В частности, проекции характеристик C_0 определяются тогда только дифференциальным оператором независимо от u, p, q.

Наконец, мы подчеркнем следующий важный факт: *характеристическое соотношение для дифференциального уравнения* (2) *инвариантно относительно любых преобразований независимых переменных* x, y. Это непосредственно следует из того факта, что характеристическое условие необходимо и достаточно для того, чтобы $L[u]$ был внутренним оператором на C_1. Чтобы получить формальное доказательство, мы перейдем от переменных x, y к ξ, η. Получим

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = \alpha u_{\xi\xi} + \beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \delta,$$

где коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в правой части являются функциями $\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta$. Тогда, как легко проверить,

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = \alpha\varphi_\xi^2 + \beta\varphi_\xi\varphi_\eta + \gamma\varphi_\eta^2,$$

из чего уже следует наше утверждение.

2. Характеристики на интегральных поверхностях. До сих пор мы ограничивались тем, что рассматривали переменные вдоль некоторой полосы; теперь мы рассмотрим всю поверхность J: $u = u(x, y)$, причем мы будем предполагать, что она является интегральной поверхностью уравнения (2). На такой интегральной поверхности не только u, но также и $p = u_x$ и $q = u_y$, а следовательно, и коэффициенты a, b, c, d являются известными функциями x и y. Мы предполагаем, что на всей рассматриваемой поверхности выполняется

условие (9), т. е. что уравнение (2) гиперболическое. Характеристическое соотношение

$$a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0$$

определяет тогда два действительных различных значения ζ_1, ζ_2 для отношения $\dot{y}/\dot{x}$, и, следовательно, оно определяет *два различных однопараметрических семейства характеристических кривых на интегральной поверхности*[1]; они являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \zeta_1, \quad \frac{dy}{dx} = \zeta_2.$$

Как мы увидим, введение этих двух семейств в качестве координатных кривых сильно упрощает задачу о решении дифференциального уравнения.

В эллиптическом случае, когда $4ac - b^2 > 0$, таких характеристик не существует. В предельном параболическом случае, когда $4ac - b^2 = 0$, два семейства характеристик совпадают.

Характеристические полосы — это единственные полосы, по которым возможно *ветвление* интегральной поверхности. Под полосой, по которой возможно ветвление, мы подразумеваем полосу, которой касаются две различные интегральные поверхности, так что при этом значения величин u, p, q для них совпадают, а некоторые производные более высокого порядка оказываются различными. На нехарактеристической полосе все вторые производные (и аналогично все производные более высоких порядков, до тех пор, пока они существуют и непрерывны) определены однозначно. Следовательно, полосы, по которым происходит ветвление, должны быть характеристическими.

Если дифференциальное уравнение эллиптическое, то на интегральной поверхности не существует полос, по которым возможно ветвление. Если, кроме того, мы предположим, что это уравнение — аналитическое и что в соответствии с этим производные любого порядка однозначно определены на каждой полосе, лежащей на интегральной поверхности, то мы естественно придем к заключению, что любое решение такого уравнения эллиптического типа должно быть *аналитической* функцией. Доказательство этого будет дано в приложении 1 к этой главе (см. также гл. IV, § 7). Здесь мы только заметим, что наличие полос, по которым возможно ветвление,

[1]) Мы снова позволяем себе употреблять термин „характеристические кривые“ для пространственных кривых на J и одновременно для их проекций на плоскость x, y. В частности, для линейных дифференциальных уравнений мы в основном будем говорить о проекциях, так как они фиксированы и не зависят от решения.

влечет за собой существование неаналитических решений уравнения.

Мы еще раз рассмотрим характеристическое условие (6), $Q = a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$, где a, b, c — известные функции x и y на интегральной поверхности J. Пусть φ — функция, удовлетворяющая соотношению (6), которое мы будем рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных: мы видим, что тогда кривая $\varphi = \text{const}$ является характеристической кривой на поверхности J. Ясно, что если φ является решением уравнения (6), то решением является также $\varphi - \text{const}$; следовательно, все кривые семейства $\varphi = \text{const}$ являются характеристическими на J. Обратно, если уравнение $\varphi = \text{const}$ задает такое семейство характеристик, то функция φ удовлетворяет уравнению (6), рассматриваемому как дифференциальное уравнение в частных производных.

В качестве примера можно привести дифференциальное уравнение $u_{xy} = 0$. Характеристическое соотношение имеет вид $\varphi_x\varphi_y = 0$. Ему удовлетворяет любая функция φ, которая является функцией одного только x или одного только y. Поэтому проекциями характеристик являются линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$.

3. Характеристики как линии разрыва. Фронт волны. Распространение разрывов. Мы ввели характеристики как линии, по которым происходит ветвление интегральных поверхностей, т. е. как кривые, на которых некоторые производные функции u имеют разрывы. Этот пункт посвящен замечательному факту, который далее будет рассматриваться для более общего случая (см., например, гл. VI, § 4). Он состоит в следующем: величина таких разрывов первого рода подчиняется некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка вдоль характеристической кривой.

Мы опишем здесь это явление для случая распространения разрывов вторых производных.

Пусть кривая C задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$ и разделяет области, где $\varphi \geqslant 0$ и $\varphi \leqslant 0$; пусть $u(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) в каждой из этих областей, причем функция u и ее первые производные непрерывны при переходе через кривую C, а „внешние“ вторые производные u терпят разрыв при переходе через C. Однако при этом внутренние производные непрерывны на кривой $\varphi = 0$ в следующем смысле: если, как и раньше, $\lambda = \psi$ и $\eta = \varphi$ являются координатами на интегральной поверхности J в окрестности кривой C, а λ есть параметр на C, то все производные функций u, p, q по λ непрерывны при переходе через C.

Через $[f]$ мы обозначим скачок функции f при переходе через C в направлении возрастания значений функции φ. По предположению, функция u_x непрерывна вместе со своей внутренней производной

(см. гл. II, § 1), которая определяется формулой $u_{xx}\varphi_y - u_{xy}\varphi_x$; непрерывна также внутренняя производная от u_y, определяемая формулой $u_{xy}\varphi_y - u_{yy}\varphi_x$.

Таким образом, мы имеем для скачков два соотношения

$$[u_{xx}]\varphi_y - [u_{xy}]\varphi_x = 0,$$
$$[u_{xy}]\varphi_y - [u_{yy}]\varphi_x = 0,$$

которые сразу дают

$$[u_{xx}] = k\varphi_x^2, \quad [u_{xy}] = k\varphi_x\varphi_y, \quad [u_{yy}] = k\varphi_y^2,$$

с некоторым коэффициентом пропорциональности k (между прочим, легко видеть, что $k = [u_{\varphi\varphi}]$).

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (2) в двух точках P_1 и P_2, лежащих по разные стороны от кривой C, вычтем одно из этих уравнений из другого и устремим точки P_1 и P_2 к точке P, лежащей на C (рис. 23). Непрерывные члены пропадут, и соотношение примет вид

$$a[u_{xx}] + b[u_{xy}] + c[u_{yy}] = 0,$$

или, в соответствии с результатом, полученным выше, после сокращения на множитель k,

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = Q(\varphi, \varphi) = 0,$$

Рис. 23.

что является просто характеристическим соотношением. Таким образом подтверждается, что разрывы указанного вида могут происходить только на характеристике.

Чтобы дать физическую интерпретацию, мы будем рассматривать $y = t$ как время, а решение $u(x, t)$ будем представлять себе как „волну“ или такую величину, которая изменяется в пространстве x с течением времени t. Если эта волна имеет разрыв на характеристике $\varphi(x, t) = 0$, то мы будем считать, что уравнение $\varphi = 0$ разрешено относительно $x : x = x(t)$ и

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\varphi_t}{\varphi_x}.$$

Это позволяет нам на плоскости x, t интерпретировать кривые $\varphi = 0$, на которых происходит разрыв, как траектории точек разрыва x, передвигающихся с течением времени по оси x со скоростью dx/dt.

Коэффициент пропорциональности k характеризует величину разрыва. Он обладает следующим замечательным свойством. *Вдоль*

характеристики C множитель k удовлетворяет обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению, а именно

$$\alpha k_\lambda + \beta k = 0, \tag{10}$$

где коэффициенты α и β определяются формулами

$$\alpha = 2Q(\varphi, \psi), \; \beta = L[\varphi] + Q_\varphi(\varphi, \varphi).$$

Для доказательства мы продифференцируем по φ уравнение $L[u] + d = 0$, где оператор L задается формулой (7), и составим выражение для скачка. В него войдут только члены, содержащие производные по φ второго и высших порядков. Учитывая, что на C $Q(\varphi, \varphi) = 0$, мы приходим к дифференциальному уравнению (10) для k.

Из этого результата следует, что множитель k либо нигде не обращается в нуль, либо равен нулю всюду на рассматриваемой части кривой C.

Выше были рассмотрены разрывы производных второго или более высокого порядка. Разрывы первых производных исключаются по самому смыслу дифференциального уравнения. Тем не менее в § 9 мы обобщим понятие решения так, что станут возможны эти и некоторые другие разрывы. В действительности, разрывы первых производных могут происходить вдоль произвольной свободной кривой C. Мы различными способами можем дополнить C до полосы C_1. Тогда (см. вторую часть этой главы) мы можем решить соответствующие задачи Коши, и, объединяя решение, построенное с одной стороны кривой C, с любым другим решением, построенным с другой стороны, мы получим обобщенное решение u, которое само непрерывно и имеет первые производные, разрывные при переходе через C.

Однако легко видеть, что было бы бесполезным обобщением допускать обобщенные „решения", которые сами непрерывны и имеют производные, разрывные при переходе через некоторую (свободную) кривую C. Такие функции всегда можно было бы построить, рассматривая по разные стороны кривой C два различных решения u_1 и u_2, для которых начальные полосы C_1 и C_2 являются различными полосами, построенными на кривой C; например, $u = 0$ для $y > 0$ и $u = y$ для $y < 0$ для уравнения $u_{yy} - u_{xx} = 0$ и линии $y = 0$ в качестве кривой C.

Однако в § 9 мы дадим нетривиальное расширение понятия решения, введя „слабые решения". Такие решения могут иметь разрывы первых производных, причем здесь снова окажется, что эти разрывы могут происходить только вдоль характеристик.

В случае линейных дифференциальных уравнений отличительное свойство характеристик как линий, на которых возможны разрывы, сохраняется также для разрывов самой функции u. Во всех этих

случаях мы найдем обыкновенные дифференциальные уравнения вида (10) для распространения этих разрывов.

4. Общие дифференциальные уравнения второго порядка. Предыдущие результаты легко распространить на общее дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t)=0. \tag{11}$$

Мы снова рассмотрим кривую C в пространстве x, y, u и предположим, что она дополнена до полосы первого порядка C_1 или до полосы второго порядка C_2. Мы будем считать, что C_2 — интегральная полоса, т. е. что соответствующие величины x, y, u, p, q, r, s, t удовлетворяют уравнению $F=0$.

Первым шагом к решению задачи Коши является дополнение интегральной полосы C_2 до полосы третьего порядка C_3, несущей величины, соответствующие третьим производным функции $u(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению (11).

Мы можем следующим образом получить характеристическое соотношение: пусть λ — параметр на кривой C, проекция C_0 которой на плоскость x, y задается уравнением $\varphi(x, y)=0$. Мы введем новые координаты λ и φ в окрестности C_0. Тогда функция $u(x, y)$ перейдет в функцию $u(\lambda, \varphi)$, и мы можем написать

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t)=G(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi}, u_{\varphi\varphi}).$$

Начальная интегральная полоса C_2 называется *характеристической*, если не все старшие производные функции u, в частности, не все третьи производные, однозначно определяются на этой полосе дифференциальным уравнением. Если вторая выводящая производная $u_{\varphi\varphi}$ может быть определена на полосе из дифференциального уравнения $G=0$, т. е. если это дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$u_{\varphi\varphi}=g(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi}),$$

то с помощью дифференцирования мы получаем третью внешнюю производную $u_{\varphi\varphi\varphi}$; очевидно, вместе с ней мы определяем все остальные третьи производные на полосе C_2. Другими словами, если $G_{u_{\varphi\varphi}} \neq 0$, то все старшие производные на полосе C_2 могут быть определены, и полоса C_2 является свободной, т. е. нехарактеристической. Следовательно, для характеристической полосы C_2 должно выполняться условие $G_{u_{\varphi\varphi}}=0$. Это „характеристическое соотношение" легко привести к виду

$$F_r\varphi_x^2+F_s\varphi_x\varphi_y+F_t\varphi_y^2=0. \tag{12}$$

Несколько другим путем, который более соответствует п. 1, мы можем вывести характеристическое соотношение, вычисляя на начальной

полосе C_2 третьи производные, например r_x, s_x, t_x. Дифференцируя уравнение $F=0$ по x, вводя сокращенные обозначения

$$\{F\}_x = F_p r + F_q s + F_u p + F_x$$

и применяя соотношения полосы, мы приходим к линейной системе

$$\begin{aligned} F_r r_x + F_s s_x + F_t t_x &= -\{F\}_x, \\ \dot{x} r_x + \dot{y} s_x \qquad\qquad &= \dot{r}, \\ \dot{x} s_x + \dot{y} t_x &= \dot{s}. \end{aligned}$$

К этой системе можно применить в точности те же рассуждения, которые применялись к системе (4) в п. 1.

Если определитель

$$Q = \begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{y}\dot{x} + F_t \dot{x}^2$$

отличен от нуля, то интегральная полоса C_2 свободна и старшие производные на C_2 однозначно определяются. Если определитель обращается в нуль всюду на полосе, то полоса называется характеристической. В этом случае величины x, y, u, p, q, r, s, t, определяющие характеристическую полосу, должны удовлетворять двум дополнительным условиям для того, чтобы полосу C_2 можно было включить в интегральную поверхность (или даже просто дополнить до полосы третьего порядка). Первое условие выражает тот факт, что правые части написанных выше уравнений линейно зависимы между собой, так же как и левые части; второе условие получается аналогичным образом, если мы продифференцируем уравнение $F=0$ по y.

Если $\varphi(x, y)=0$ — уравнение проекции характеристики, то характеристическое соотношение

$$F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{x}\dot{y} + F_t \dot{x}^2 = 0 \qquad (12')$$

отличается от условия (12) только множителем. Условия (12) и (12′) могут выполняться в некоторой точке полосы C_2 для действительного отношения $-\varphi_y : \varphi_x$ или $\dot{x} : \dot{y}$, только если в этой точке

$$4F_r F_t - F_s^2 \leqslant 0.$$

Как и раньше, мы назовем оператор F *гиперболическим* в точке восьмимерного пространства x, y, u, p, q, r, s, t, если в этой точке выполняется строгое неравенство

$$4F_r F_t - F_s^2 < 0. \qquad (13)$$

Дифференциальный оператор называется гиперболическим на полосе второго порядка или на поверхности $u(x, y)$, если неравенство (13) выполняется в каждой точке.

Как и в частном случае квазилинейных уравнений, надо заметить, что характеристическое соотношение на данной интегральной поверхности можно рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции φ, а характеристические кривые образуются семействами решений $\varphi = \text{const}$.

5. Дифференциальные уравнения высших порядков. При изучении дифференциального уравнения n-го порядка с неизвестной функцией $u(x, y)$ мы будем пользоваться следующими сокращенными обозначениями

$$p_\nu = \frac{\partial^n u}{\partial x^\nu \partial y^{n-\nu}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, u, \ldots, p_0, \ldots, p_n) = 0; \tag{14}$$

здесь явно не выписаны производные порядка меньшего, чем n. Мы введем понятия характеристик и характеристического соотношения следующим образом. Предположим, что $u = u(x, y)$ — интегральная поверхность и что на ней задана кривая C вместе с соответствующей полосой n-го порядка C_n, причем проекция кривой C: $\varphi(x, y) = 0$ отделяет область, где $\varphi > 0$, от области, где $\varphi < 0$. Пусть λ — параметр на полосе. Снова на интегральной поверхности $u(x, y)$ мы введем λ и φ в качестве независимых переменных вместо x и y. Мы обозначим через $u(\lambda, \varphi)$ функцию, в которую перейдет $u(x, y)$, и введем обозначение

$$\omega = u_{\varphi \ldots \varphi} = \frac{\partial^n u}{\partial \varphi^n}$$

для n-й производной функции u, выводящей из полосы C_n. Тогда мы получим

$$p_\nu = \omega \varphi_x^\nu \varphi_y^{n-\nu} + \ldots,$$

где точки поставлены вместо членов, не содержащих n-й производной ω. Заданное дифференциальное уравнение (14) можно теперь рассматривать как дифференциальное уравнение относительно функции $u(\lambda, \varphi)$. Если на кривой C уравнение (14) может быть приведено к виду

$$\omega = f(\lambda, \varphi, u, \ldots),$$

где ω уже не содержится явно в правой части, то мы можем с помощью дифференцирования по φ однозначно определить выводящую

$(n+1)$-ю производную ω_φ и все остальные производные $(n+1)$-го порядка от функции u. Это всегда возможно, если $F_\omega \neq 0$. Если $F_\omega = 0$ для всех λ, то мы будем говорить, что C_n — *характеристическая полоса*. Если записать это соотношение в старых координатах, то получится основное *характеристическое соотношение*

$$F_{p_n}\varphi_x^n + F_{p_{n-1}}\varphi_x^{n-1}\varphi_y + \ldots + F_{p_0}\varphi_y^n = 0. \tag{15}$$

Мы считаем полосу n-го порядка с проекцией $\varphi = 0$ характеристической, если 1) всюду на ней выполняется соотношение (15), и 2) она является интегральной полосой.

Вопрос о том, можно ли определенную таким образом характеристическую полосу включить в интегральную поверхность, т. е. вопрос о существовании решения задачи Коши, остается здесь открытым.

Теперь мы вернемся к рассмотрению характеристических интегральных полос на заданной интегральной поверхности J. На поверхности J: $u = u(x, y)$ соотношение (15) выполняется в том случае, если всюду в (15) подставлена функция $u(x, y)$ и значения ее производных, а область изменения x и y ограничена дополнительным условием $\varphi = 0$. Если кривая $\varphi = 0$ записана в виде $y = y(x)$, то для наклона $y' = -\varphi_x : \varphi_y$ характеристическое соотношение переходит в уравнение

$$F_{p_n}y'^n - F_{p_{n-1}}y'^{n-1} + \ldots = 0, \tag{16}$$

т. е. в обыкновенное дифференциальное уравнение для характеристической кривой C на J.

Если рассматривать соотношение (15) как дифференциальное уравнение в частных производных с неизвестной функцией двух независимых переменных $\varphi(x, y)$, то любое решение этого уравнения дает на поверхности не только отдельную характеристическую кривую C, но и целое семейство характеристических кривых $\varphi(x, y) = c$ с параметром c.

Характер корней алгебраического уравнения относительно переменной ζ

$$F_{p_n}\zeta^n - F_{p_{n-1}}\zeta^{n-1} + \ldots + (-1)^n F_{p_0} = 0 \tag{17}$$

определяет тип дифференциального уравнения (14) в окрестности интегральной полосы. Если это алгебраическое уравнение имеет n различных действительных корней, то дифференциальное уравнение называется *вполне гиперболическим*, или просто *гиперболическим*, в точке пространства $x, y, u, \ldots, p_0, \ldots, p_n$, или на полосе C_n, или на поверхности $u = u(x, y)$. Если все корни алгебраического уравнения комплексные, то дифференциальное уравнение называется *эллиптическим*. Если некоторые из действительных корней совпа-

дают, то дифференциальное уравнение часто называют *параболическим*[1]). (Однако в дальнейшем мы несколько изменим эту классификацию, отнеся к гиперболическим некоторые классы уравнений с кратными характеристиками, для которых все-таки разрешима задача Коши.)

6. Инвариантность характеристик при преобразованиях координат. Характеристики дифференциальных уравнений в частных производных инвариантны относительно преобразований координат. Другими словами, при преобразованиях независимых переменных характеристики переходят в соответствующие характеристики преобразованного дифференциального уравнения. Доказательство становится ясным при рассмотрении простейшего случая дифференциального уравнения второго порядка $F(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots)=0$, которое при переходе к новым переменным ξ, η преобразуется в уравнение $G(u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta})=0$. Инвариантность и здесь либо непосредственно следует из интуитивного понятия характеристической полосы, либо из тождества

$$F_{u_{xx}}\varphi_x^2+F_{u_{xy}}\varphi_x\varphi_y+F_{u_{yy}}\varphi_y^2=G_{u_{\xi\xi}}\varphi_\xi^2+G_{u_{\xi\eta}}\varphi_\xi\varphi_\eta+G_{u_{\eta\eta}}\varphi_\eta^2,$$

которое получается после элементарных вычислений.

Из инвариантности характеристик следует, что гиперболические уравнения *обратимы по времени*, т. е. гиперболичность сохраняется при преобразовании $x'=x$, $y'=-y$, где y рассматривается как время.

Так как любая нигде не характеристическая кривая может быть преобразована в нигде не характеристическую прямую, то достаточно решить задачу Коши лишь для случая, когда ось x выбрана в качестве начальной линии.

7. Сведение к квазилинейным системам первого порядка. Без ограничения общности при изучении задачи Коши можно рассматривать лишь задачи, касающиеся квазилинейных систем первого порядка (см. также гл. I, § 7, п. 2). Здесь мы повторим обычные приемы, с помощью которых производится такое сведение.

Если дифференциальное уравнение

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t)=0 \tag{12}$$

не является квазилинейным, то уравнение, полученное из него дифференцированием, например по y,

$$(F)_y=F_r r_y+F_s s_y+F_t t_y+F_p p_y+F_q q_y+F_u q+F_y=0 \tag{18}$$

[1]) Определение параболических уравнений и систем в узком смысле или, как говорят, параболических по И. Г. Петровскому, дано, например, в книге И. Г. Петровского [1], изд. 3, стр. 352. Этот класс уравнений сохраняет многие свойства простейшего параболического уравнения — уравнения теплопроводности. — *Прим. ред.*

является квазилинейным. Оно вместе с уравнениями

$$u_y = q, \quad p_y = s, \quad q_y = t, \quad r_y = s_x, \quad s_y = t_x$$

дает квазилинейную систему первого порядка относительно неизвестных функций u, p, q, r, s, t. Если заданы начальные условия $u = f(x)$, $u_y = g(x)$ (при $y = 0$), то начальными значениями для функций, входящих в систему, будут $u = f$, $p = f'$, $q = g$, $r = f''$, $s = g'$, а $t(x, 0)$ определяется из уравнения $F = 0$. Решение u, p, q, r, s, t системы дает решение u исходного уравнения. Чтобы убедиться в этом, мы заметим, что из нашей системы следуют соотношения

$$s_y = t_x = q_{yx} = q_{xy}, \quad (s - q_x)_y = 0.$$

Так как $s = q_x$ при $y = 0$, мы имеем $s \equiv q_x \equiv u_{xy}$. Аналогично можно отождествить другие неизвестные функции системы с производными функции u. Наконец, проверяется, что $dF/dy = 0$; так как на начальной прямой $F = 0$, то отсюда следует, что u является решением исходного уравнения.

Такое сведение к квазилинейным системам первого порядка всегда можно произвести в силу нашего обычного предположения о том, что все входящие в задачу функции достаточное число раз дифференцируемы (см. также гл. I, § 7, п. 2). В соответствии с этим мы в дальнейшем сосредоточим свое внимание на квазилинейных системах первого порядка; мы напомним и расширим те рассмотрения, которым посвящен § 1 гл. III.

§ 2. *Характеристическая нормальная форма для гиперболических систем первого порядка*

1. Линейные, почти линейные и квазилинейные системы. Квазилинейная система первого порядка записывается в виде[1])

$$L^\varkappa[u] \equiv \sum_{i=1}^{k} \left(a^{\varkappa i} u_x^i + b^{\varkappa i} u_y^i\right) = c^\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \tag{1}$$

или, в матричных обозначениях, где A, B — матрицы, а c — вектор,

$$L[u] = Au_x + Bu_y = c. \tag{1'}$$

Мы предположим, что в рассматриваемой области матрица B неособая, т. е. что определитель $\|B\| = \|b^{\varkappa i}\|$ не обращается в нуль.

Если матрицы A, B не зависят от неизвестного вектора u, а c зависит от u линейно, то система называется *линейной*; если A и B

---

[1]) Мы рассматриваем только „определенные системы“ (см. гл. I, § 2, п. 3), где число k уравнений равно числу неизвестных.

не зависят от u, а c зависит от u, но не линейно, то система называется *почти линейной* и с ней можно обращаться почти так же, как с линейной. В противном случае, если A и B зависят также и от u, система называется *квазилинейной*. Как мы видели, любая нелинейная система, если ее продифференцировать, становится по существу эквивалентной некоторой квазилинейной системе.

В силу того, что $\|B\| \neq 0$, мы можем разрешить систему (1) относительно u_y и записать ее в эквивалентной форме

$$u_y + Au_x = c, \qquad (1'')$$

где $B = I$ — единичная матрица, откуда следует, что линии $y = \text{const}$ — нехарактеристические, или свободные.

Мы дополним основные факты, касающиеся системы (1″), рассмотрев сначала линейный или почти линейный случай (см. гл. III, § 2, п. 1). Характеристические кривые C вида $\varphi(x, y) = 0$ задаются дифференциальным уравнением

$$dx : dy = \tau \qquad (2)$$

или

$$\tau\varphi_x + \varphi_y = 0, \qquad (2')$$

причем τ является корнем алгебраического уравнения

$$Q = \|A - \tau I\| = 0. \qquad (3)$$

Из этого уравнения следует, что матрица $A - \tau I$ особая, поэтому для характеристической кривой существует собственный вектор $l = (l_1, \ldots, l_k)$, для которого

$$lA = \tau l. \qquad (4)$$

В соответствии с § 2 гл. III гиперболичность системы L определяется с помощью требования, чтобы все корни $\tau_1, \ldots, \tau_k$ уравнения $Q = 0$ были действительны и чтобы, кроме того, существовали k линейно независимых собственных векторов $l^1, \ldots, l^k$. В частности, так будет обстоять дело, если все корни τ и, следовательно, все характеристики, различны.

Гиперболическую систему можно заменить системой, эквивалентной ей с точностью до линейного преобразования, причем эта система получается из уравнений (1″), если умножить их соответственно на компоненты собственного вектора l^i, $i = 1, \ldots, k$, и сложить или если умножить систему (1), (1′) или (1″) слева на левые собственные векторы l и воспользоваться соотношением (4). Из (1″) с помощью умножения на $l = l^i$ получается эквивалентная система

$$l^i L[u] = \Lambda^i[u] = l^i(u_y + \tau_i u_x) = l^i c \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \qquad (5)$$

В предположении, что эта система линейная или почти линейная, мы можем еще более упростить систему (5), введя вместо неизвестных

функций u новый неизвестный вектор U с k компонентами, получаемый с помощью линейного преобразования

$$U^{\varkappa}=l^{\varkappa}u \qquad (\varkappa=1, \ldots, k). \tag{6}$$

Если на характеристике C_i ввести дифференцирование по направлению характеристики,

$$D^i=\frac{\partial}{\partial y}+\tau_i\frac{\partial}{\partial x}, \tag{7}$$

и положить

$$g^i=l^i c+u\left(l_y^i+\tau l_x^i\right) \qquad (\tau=\tau_i),$$

то система примет вид

$$D^i U^i=g^i. \tag{8}$$

Обозначая дифференцирование по независимой переменной y вдоль характеристики через d/dy, систему (8) можно записать в виде

$$\frac{d}{dy}U^i=g^i(x, y, U) \quad \text{на} \quad C_i, \tag{9}$$

или, короче, в матричном виде

$$U_y+TU_x=g, \tag{9'}$$

где T — диагональная матрица с элементами τ_i на диагонали. Формы (5), (9), (9′) являются *нормальными формами системы*. Очевидно, что имеет место следующий факт: почти линейная гиперболическая система эквивалентна *симметричной системе* с матрицами коэффициентов A и B, причем одна из этих матриц, например матрица A, положительно определенная[1]). В частности, мы всегда можем предполагать, что матрица A в уравнении (1″) симметрична. Для квазилинейных систем введение новых переменных U не привело бы к такому простому виду, как (9), так как производные от коэффициентов l также содержали бы неизвестные функции. Следовательно, в этом случае мы должны удовлетвориться нормальной формой (5).

---

[1]) В матричных обозначениях преобразование системы (1″) к симметричному (диагональному) виду может быть описано следующим образом. Мы полагаем $U=Hu$, где строки матрицы H являются собственными векторами l^i, и подставляем в (1″) выражения

$$u=H^{-1}U, \quad u_x=H^{-1}U_x+H_x^{-1}U, \quad u_y=H^{-1}U_y+H_y^{-1}U.$$

Уравнение (1″) принимает вид

$$AH^{-1}U_x+H^{-1}U_y=c-\left(AH_x^{-1}+H_y^{-1}\right)U.$$

Далее, умножая слева на H, мы получаем систему в диагональном виде

$$U_y+HAH^{-1}U_x=G,$$

где $G=H\left(c-AH_x^{-1}U-H_y^{-1}U\right)$ — известный вектор, линейно зависящий от U и не зависящий от производных U.

Тем не менее просто с помощью дифференцирования уравнений (5) по x и y можно было бы получить для производных функции u упрощенные уравнения, обладающие более слабой нелинейностью, причем введение линейных комбинаций этих производных уже дает нужный эффект.

Если мы снова ограничимся линейными операторами L, то из нормальной формы мы можем сразу вывести основные свойства характеристических кривых. В частности, нормальная форма делает ясным тот факт, что на характеристической кривой линейная комбинация lL является внутренним дифференциальным оператором.

Кроме того, нормальная форма подсказывает нам, что, кроме решений с разрывными производными, рассмотренными в § 1, можно ввести в рассмотрение *обобщенные решения*, которые сами *имеют разрывы*, в частности, претерпевают скачок при переходе через кривую C, а в остальном — гладкие функции; при этом кривая C должна быть характеристикой. В гл. VI, § 4 мы рассмотрим в более общей форме разрывы и их распространение вдоль характеристик. Здесь будет отмечен только следующий факт, который очевидным образом следует из формулы (8).

Все компоненты вектора U, кроме $U^{\varkappa}$, непрерывны при переходе через кривую $C^{\varkappa}$. Распространение скачка $[U^{\varkappa}] = \omega$ вдоль C происходит в соответствии с обыкновенным дифференциальным уравнением [1])

$$\frac{d\omega}{dy} = g(x, y, \omega).$$

2. Случай $k = 2$. Линеаризация с помощью преобразования годографа [2]). Для гиперболических систем двух уравнений, так же как для одного уравнения второго порядка, можно (как в § 1) ввести два семейства характеристических кривых в качестве координатных кривых. Это значит, что вводятся две характеристические переменные α и β, такие, что уравнения

$$\alpha = \varphi(x, y) = \text{const} \quad \text{и} \quad \beta = \psi(x, y) = \text{const}$$

дают два различных семейства характеристик; в квазилинейном случае они зависят от рассматриваемого частного решения u^1, u^2, а в линейном случае они не зависят от u и известны a priori. Введение характеристических переменных α и β особенно удобно при изучении нелинейного уравнения Монжа — Ампера (см. приложение 1, § 2).

Мы можем рассматривать u^1, u^2, x, y как четыре функции двух независимых переменных α и β и получить эквивалентную систему

---

[1]) В квазилинейном случае уравнение для скачка исследовал Нитше [3].

[2]) См. гл. III, § 2, п. 5.

четырех уравнений с характеристическими независимыми переменными

$$h^{11}u^1_\alpha + h^{12}u^2_\alpha = \gamma^1, \quad h^{21}u^1_\beta + h^{22}u^2_\beta = \gamma^2, \tag{11а}$$

$$x_\alpha = \tau^1 y_\alpha, \quad x_\beta = \tau^2 y_\beta, \tag{11б}$$

где $h^{i\varkappa}$, $\gamma^\varkappa$, $\tau^\varkappa$ — известные функции u^1, u^2, x, y, x_α, ..., y_β.

Для линейной системы уравнения (11б) и уравнения (11а) независимы; для квазилинейной системы эти уравнения связаны. Во всяком случае, совокупность этих уравнений заменяет исходную систему, причем полученная система четырех уравнений проще и не содержит явно независимых переменных.

В одном важном частном случае квазилинейная система с двумя неизвестными функциями сразу сводится к линейной системе путем замены зависимых переменных независимыми, т. е. x и y надо считать функциями $u = u^1$ и $v = u^2$. Такое сведение возможно для системы, состоящей из дифференциальных уравнений, однородных относительно производных, вида

$$a^1 u_x + b^1 u_y + c^1 v_x + d^1 v_y = 0,$$
$$a^2 u_x + b^2 u_y + c^2 v_x + d^2 v_y = 0,$$

где $a^1, \ldots, d^2$ — функции только u, v, причем якобиан $J = u_x v_y - u_y v_x$ не обращается в нуль. Мы имеем

$$u_x = J y_v, \qquad u_y = -J x_v,$$
$$v_x = -J y_u, \quad v_y = J x_u,$$

и наша система переходит в линейную систему

$$a^1 y_v - b^1 x_v - c^1 y_u + d^1 x_u = 0,$$
$$a^2 y_v - b^2 x_v - c^2 y_u + d^2 x_u = 0$$

относительно функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$. Это преобразование играет важную роль в гидродинамике, причем u, v обозначают компоненты скорости в стационарном двумерном потоке. Оно называется *преобразованием годографа*, так как на плоскости u, v образ траектории частицы, движущейся по плоскости x, y, т. е. траектория конца вектора скорости, называется „годографом“ этой частицы.

§ 3. Приложение к динамике сжимаемой жидкости

Движение сжимаемой жидкости дает поучительный и важный пример, поясняющий понятие характеристик [1]). В главе VI мы рассмотрим

[1]) Чтобы облегчить сопоставления с литературой по гидродинамике, мы в этом параграфе применяем обозначения, несколько отличные от обозначений § 2. Например, вместо y мы употребляем букву t, обозначающую время. Дальнейшие подробности относительно приведенных здесь примеров можно найти в книге Куранта и Фридрихса [1].

такое течение, зависящее от трех пространственных переменных и от времени. Здесь мы ограничимся случаями, которые можно описать с помощью двух переменных.

1. Одномерное изэнтропическое течение. Дифференциальные уравнения для скорости $u(x, t)$ и плотности $\rho(x, t)$ при одномерном изэнтропическом течении имеют вид

$$L^1[u, \rho] \equiv \rho u_x + u\rho_x + \rho_t = 0,$$
$$L^2[u, \rho] \equiv \rho u u_x + \rho u_t + c^2 \rho_x = 0.$$

„Скорость звука“ $c(\rho)$ определяется формулой $c = \sqrt{f'(\rho)} > 0$, где $p = f(\rho)$ — заданная монотонная функция, выражающая зависимость давления p от плотности ρ. (Условие $f'(\rho) > 0$ выражает гиперболичность этой системы.) Для этой квазилинейной системы первого порядка характеристические направления $\tau = dx : dt$ определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} 1 & u - \tau \\ u - \tau & c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, $\tau = u \pm c$. Система гиперболическая, так как существуют два различных действительных корня τ. Для каждого из этих значений τ существует нетривиальное решение (λ^1, λ^2) системы

$$\lambda^1 + (u - \tau)\lambda^2 = 0,$$
$$(u - \tau)\lambda^1 + c^2\lambda^2 = 0.$$

Если $\tau = u + c$, то $\lambda^1 : \lambda^2 = c$; если $\tau = u - c$, то $\lambda^1 : \lambda^2 = -c$. При каждом из этих значений отношений $\lambda^1 : \lambda^2$ линейная комбинация $\lambda^1 L^1 + \lambda^2 L^2$ содержит производные от функций u и ρ по одному и тому же направлению (по соответствующему характеристическому направлению). В соответствии с этим мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\Lambda^1[u, \rho] \equiv \rho[u_t + (u + c)u_x] + c[\rho_t + (u + c)\rho_x] = 0,$$
$$\Lambda^2[u, \rho] \equiv \rho[u_t + (u - c)u_x] - c[\rho_t + (u - c)\rho_x] = 0.$$

Мы можем ввести характеристические переменные $\alpha = \varphi(x, t)$, $\beta = \psi(x, t)$ так, что уравнения

$$\psi(x, t) = \text{const}$$

и

$$\varphi(x, t) = \text{const}$$

будут определять характеристические кривые, для которых

$$-\psi_t : \psi_x = dx : dt = u + c$$

и

$$-\varphi_t : \varphi_x = dx : dt = u - c.$$

Так как $-\psi_t : \psi_x = x_\alpha : t_\alpha$ и $-\varphi_t : \varphi_x = x_\beta : t_\beta$, мы получим уравнения

$$\begin{aligned} \rho u_\alpha + c\rho_\alpha &= 0, \\ \rho u_\beta - c\rho_\beta &= 0, \end{aligned} \tag{1а}$$

$$\begin{aligned} x_\alpha &= (u+c)\,t_\alpha, \\ x_\beta &= (u-c)\,t_\beta \end{aligned} \tag{1б}$$

для четырех функций u, ρ, x, t характеристических переменных α, β (см. § 2, п. 3).

Характеристические кривые в этом примере можно рассматривать как „звуковые волны" (распространение малых возмущений), скорость которых

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c,$$

называемая „характеристической скоростью", отличается от „скорости потока" u на $\pm c$.

Отметим, что уравнения (1а) приводят к так называемым „*инвариантам Римана*", т. е. к функциям, постоянным вдоль характеристик. Их можно ввести следующим образом.

Нам нужно записать уравнения (1а) в виде

$$\frac{dr}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{ds}{d\beta} = 0$$

с некоторыми функциями $r(u, \rho)$, $s(u, \rho)$ для того, чтобы иметь $r = \text{const}$ при $\beta = \text{const}$ и $s = \text{const}$ при $\alpha = \text{const}$. Ясно, что мы должны найти такие функции g и l, что $r_u = g\rho$, $r_\rho = gc$; $s_u = l\rho$, $s_\rho = -lc$, причем „интегрирующие множители" $g(u, \rho)$ и $l(u, \rho)$ должны удовлетворять условиям совместности $(g\rho)_\rho = (gc)_u$, $(l\rho)_\rho = (-lc)_u$. Легко видеть, что

$$g = \frac{1}{2\rho}, \qquad l = -\frac{1}{2\rho}$$

удовлетворяют этим условиям и приводят к инвариантам Римана

$$2r = u + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho')}{\rho'}\, d\rho' = \text{const} \qquad \text{при} \quad \beta = \text{const},$$

$$2s = -u + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho')}{\rho'}\, d\rho' = \text{const} \qquad \text{при} \quad \alpha = \text{const}.$$

В важном случае идеальных „политропных" газов давление задается формулой

$$p = f(\rho) = A\rho^\gamma,$$

где A и γ — постоянные, $\gamma > 1$. В этом случае

$$c^2 = f'(\rho) = A\gamma\rho^{\gamma-1},$$

и если мы возьмем $\rho_0 = 0$, то инвариантами Римана будут

$$r = \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1}, \quad s = -\frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1}.$$

Этими функциями можно пользоваться при решении задачи Коши.

Наконец, заметим, что нелинейная система $L^1[u, \rho] = 0$, $L^2[u, \rho] = 0$ принадлежит классу систем, допускающих линеаризацию с помощью преобразования годографа, введенного в § 2. Это преобразование приводит к следующим линейным уравнениям для x, t как функций u и ρ:

$$\rho t_\rho - u t_u + x_u = 0,$$
$$\rho u t_\rho - \rho x_\rho - c^2 t_u = 0,$$

которые справедливы до тех пор, пока определитель $u_x\rho_t - u_t\rho_x$ отличен от нуля. (Подробный анализ см. в книге Куранта и Фридрихса [1].)

2. Сферически симметричное течение. Так же можно исследовать дифференциальные уравнения

$$L^1[u, \rho] \equiv \rho u_x + u\rho_x + \rho_t = -\frac{2\rho u}{x},$$
$$L^2[u, \rho] \equiv \rho u u_x + \rho u_t + c^2\rho_x = 0,$$

описывающие сферически симметричное изэнтропическое течение. Так как операторы L^1 и L^2 такие же, как в случае одномерного течения (см. п. 1), то характеристические направления τ задаются соотношениями $\tau = u \pm c$. Аналогично, значения λ^1/λ^2 снова определяются формулой $\lambda^1/\lambda^2 = \pm c$, что дает систему дифференциальных уравнений

$$\Lambda^1[u, \rho] = -\frac{2c\rho u}{x},$$

$$\Lambda^2[u, \rho] = \frac{2c\rho u}{x},$$

где операторы Λ^1 и Λ^2 такие же, как и раньше. Уравнения, аналогичные (1а), имеют вид

$$\rho u_\alpha + c\rho_\alpha = -\frac{2c\rho u}{x} t_\alpha,$$
$$\rho u_\beta - c\rho_\beta = \frac{2c\rho u}{x} t_\beta, \tag{2a}$$

а уравнения (1б) остаются без изменения.

3. Стационарное безвихревое течение. В двумерном стационарном безвихревом изэнтропическом течении компоненты скорости u, v удовлетворяют системе уравнений

$$L^1[u, v] \equiv u_y - v_x = 0,$$
$$L^2[u, v] \equiv (c^2 - u^2) u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2) v_y = 0,$$

где скорость звука c — известная функция $u^2 + v^2$. В этом случае характеристические направления τ удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} -\tau & c^2 - u^2 + uv\tau \\ -1 & -uv - (c^2 - v^2)\tau \end{vmatrix} = (c^2 - v^2)\tau^2 + 2uv\tau + c^2 - u^2 = 0.$$

Во всех точках, где $u^2 + v^2 > c^2$ (т. е. где поток сверхзвуковой), это уравнение имеет два различных действительных корня τ^1, τ^2, и система является гиперболической. Для каждого из этих значений τ соответствующее значение $\lambda^1 : \lambda^2$ равно $-uv - (c^2 - v^2)\tau$. Каждый раз мы берем линейную комбинацию $\lambda^1 L^1 + \lambda^2 L^2$ и приходим к системе

$$\Lambda^i[u, v] \equiv (c^2 - u^2)(u_y + \tau^i u_x) + \\ + (c^2 - v^2)\tau^i(v_y + \tau^i v_x) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Уравнения для u, v, x, y как функций α и β имеют вид

$$\begin{gathered} (c^2 - u^2) u_\alpha + (c^2 - v^2)\tau^1 v_\alpha = 0, \\ (c^2 - u^2) u_\beta + (c^2 - v^2)\tau^2 v_\beta = 0 \end{gathered} \qquad (3а)$$

и

$$\begin{gathered} x_\alpha = \tau^1 y_\alpha, \\ x_\beta = \tau^2 y_\beta. \end{gathered} \qquad (3б)$$

Уравнения (3а) можно записать в эквивалентной форме

$$\begin{gathered} \tau^2 u_\alpha + v_\alpha = 0, \\ \tau^1 u_\beta + v_\beta = 0. \end{gathered} \qquad (3а')$$

Для дифференциальных уравнений

$$L^1[u, v] \equiv u_y - v_x = 0,$$
$$L^2[u, v] \equiv (c^2 - u^2) u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2) v_y = -\frac{c^2 v}{y},$$

описывающих стационарное безвихревое трехмерное изэнтропическое течение, обладающее цилиндрической симметрией, операторы L^1 и L^2 такие же, как в предыдущем примере, так что характеристические направления снова удовлетворяют уравнению

$$(c^2 - v^2)\tau^2 + 2uv\tau + c^2 - u^2 = 0.$$

Уравнения, аналогичные уравнениям (3а), в этом случае имеют вид

$$u_\alpha + \frac{1}{\tau^2} v_\alpha = -\frac{c^2 v}{(c^2 - u^2) y} x_\alpha,$$
$$u_\beta + \frac{1}{\tau^1} v_\beta = -\frac{c^2 v}{(c^2 - u^2) y} x_\beta, \tag{4a}$$

а уравнения (3б) остаются без изменения.

Уравнения стационарного безвихревого течения также допускают линеаризацию с помощью преобразования годографа, введенного в § 2. Предположив, что

$$u_x v_y - u_y v_x \neq 0,$$

мы получаем линейную систему

$$x_v - y_u = 0,$$
$$(c^2 - u^2) y_v + uv(x_v + y_u) + (c^2 - v^2) x_u = 0$$

для x, y как функций u и v.

4. Системы трех уравнений для неизэнтропического течения. В (нестационарном) одномерном неизэнтропическом течении скорость $u(x, t)$, давление $p(x, t)$ и удельная энтропия $S(x, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$L^1[u, p, S] \equiv \rho c^2 u_x + u p_x + p_t = 0,$$
$$L^2[u, p, S] \equiv \rho u u_x + \rho u_t + p_x = 0,$$
$$L^3[u, p, S] \equiv u S_x + S_t = 0,$$

где ρ и $c \neq 0$ — заданные функции p и S. Характеристические направления τ определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} c^2 & u-\tau & 0 \\ u-\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u-\tau \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим

$$\tau^1 = u + c,$$
$$\tau^2 = u - c,$$
$$\tau^3 = u;$$

поэтому система гиперболическая. Для каждого из характеристических направлений τ^1, τ^2, τ^3 существует нетривиальное решение λ^1, λ^2, λ^3 системы

$$c^2 \lambda^1 + (u - \tau) \lambda^2 = 0,$$
$$(u - \tau) \lambda^1 + \lambda^2 = 0,$$
$$(u - \tau) \lambda^3 = 0,$$

которые с точностью до коэффициента пропорциональности определяются равенствами

$$(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = \begin{cases} (1, c, 0) & \text{для} \quad \tau = \tau^1, \\ (-1, c, 0) & \text{для} \quad \tau = \tau^2, \\ (0, 0, 1) & \text{для} \quad \tau = \tau^3. \end{cases}$$

Взяв для каждого из τ линейную комбинацию $\lambda^1 L^1 + \lambda^2 L^2 + \lambda^3 L^3$, мы получим систему

$$\begin{aligned} &\Lambda^1 [u, p, S] \equiv \rho c [u_t + (u + c) u_x] + p_t + (u + c) p_x = 0, \\ &\Lambda^2 [u, p, S] \equiv \rho c [u_t + (u - c) u_x] - [p_t + (u - c) p_x] = 0, \\ &\Lambda^3 [u, p, S] \equiv S_t + u S_x = 0. \end{aligned}$$

Хотя мы не вводим вместо x, t характеристические переменные, как мы делали в случае двух неизвестных функций, мы можем тем не менее записать эти уравнения в более сжатой форме, вводя параметры s_1, s_2, s_3 на каждом семействе характеристических кривых. Тогда уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{\partial p}{\partial s_1} &= 0, \\ \rho c \frac{\partial u}{\partial s_2} - \frac{\partial p}{\partial s_2} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial s_3} &= 0. \end{aligned}$$

В приведенном примере характеристические кривые, определенные уравнением $dx : dt = u + c$, представляют собой звуковые волны (как и в изэнтропическом случае), а характеристические кривые, для которых $dx : dt = u$, представляют собой траектории частиц.

В качестве другого примера мы рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \rho u u_x + \rho v u_y + c^2 \rho_x &= 0, \\ \rho u v_x + \rho v v_y + c^2 \rho_y &= 0, \\ \rho (u_x + v_y) + u \rho_x + v \rho_y &= 0 \end{aligned}$$

(здесь скорость звука $c = c(\rho) \neq 0$ — известная функция), которым удовлетворяют компоненты скорости $u(x, y)$, $v(x, y)$ и плотность $\rho(x, y)$ стационарного двумерного вихревого изэнтропического течения. Характеристические направления удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} u - \tau v & 0 & 1 \\ 0 & u - \tau v & -\tau \\ c^2 & -\tau c^2 & u - \tau v \end{vmatrix} \equiv (u - \tau v) [(u - \tau v)^2 - (1 + \tau^2) c^2] = 0.$$

Два семейства характеристик $dx : dy$ определяются корнями квадратного уравнения

$$(1+\tau^2)c^2-(u-\tau v)^2 \equiv (c^2-v^2)\tau^2+2uv\tau+c^2-u^2=0,$$

которое совпадает с уравнением для τ, рассмотренным в нашем примере для потенциального случая. Эти два семейства характеристик различны и действительны в точках, где $u^2+v^2>c^2$ (т. е. там, где поток сверхзвуковой). Иногда характеристические кривые этих двух семейств называются *линиями Маха*. Третье семейство характеристик определяется соотношением $dx : dy = u : v$ (т. е. $u-\tau v=0$) и состоит из *линий тока*, т. е. из кривых, касающихся векторов скорости. Легко видеть, что направления линии тока и линии Маха не могут совпадать ни в какой точке, так что система вполне гиперболична при $u^2+v^2>c^2$.

Для первых двух характеристических направлений мы с точностью до коэффициента пропорциональности получаем

$$(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)=(-1,\ \tau^i,\ u-\tau^i v) \quad (i=1,\ 2),$$

а для третьего характеристического направления

$$(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)=(u,\ v,\ 0).$$

Взяв для каждого характеристического направления линейную комбинацию $\lambda^1L^1+\lambda^2L^2+\lambda^3L^3$ и введя на характеристических кривых трех семейств параметры s_1, s_2, s_3, мы получим систему

$$\rho v\frac{\partial u}{\partial s_i}-\rho u\frac{\partial v}{\partial s_i}-[uv+\tau^i(c^2-v^2)]\frac{\partial\rho}{\partial s_i}=0 \quad (i=1,\ 2),$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial s_3}+\rho v\frac{\partial v}{\partial s_3}+c^2\frac{\partial\rho}{\partial s_3}=0.$$

5. Линеаризованные уравнения. Нелинейные уравнения гидродинамики можно приближенно заменить линейными, если предположить, что рассматриваемый поток отличается от некоторого постоянного состояния только на „малые“ величины, так что можно пренебрегать членами второй степени, содержащими эти величины и их производные. Достаточно привести следующий пример. Построим линейное приближение для уравнений, рассмотренных в последнем примере предыдущего пункта, т. е. для стационарного двумерного вихревого изэнтропического течения. Мы предположим, что скорость мало отличается от некоторой постоянной скорости $\tilde{u}$, параллельной оси x, и что плотность ρ также мало отличается от некоторой постоянной плотности $\tilde{\rho}$. Положим

$$u=\tilde{u}+\omega, \quad v=\lambda, \quad \rho=\tilde{\rho}+\sigma.$$

где ω, λ, σ — малые величины. Далее, мы предположим, что движение жидкости можно достаточно точно описать, отбросив в дифференциальных уравнениях произведения и высшие степени величин ω, λ, σ и их производных. Тогда исходная система дифференциальных уравнений заменяется следующей системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\tilde{u}\,\tilde{\rho}\omega_x + c^2\sigma_x = 0,$$
$$\tilde{u}\,\tilde{\rho}\lambda_x + c^2\sigma_y = 0,$$
$$\tilde{\rho}(\omega_x + \lambda_y) + \tilde{u}\sigma_x = 0,$$

где $c = c(\tilde{\rho})$. Мы сразу получаем соотношение

$$\omega_{xy} = \lambda_{xx},$$

т. е.

$$\omega_y - \lambda_x = F(y),$$

где $F(y)$ — некоторая функция. Это соотношение выражает так называемую *теорему о вихре*. Положив $\tilde{u}/c = k$, мы получим теперь систему

$$k\tilde{\rho}\lambda_x + c\sigma_y = 0,$$
$$k\tilde{\rho}\lambda_y - (1 - k^2)c\sigma_x = 0,$$

из которой с помощью исключения получаются два дифференциальных уравнения

$$(1 - k^2)\lambda_{xx} + \lambda_{yy} = 0,$$
$$(1 - k^2)\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0.$$

Из этих уравнений сразу видно, что при $k > 1$, т. е. при $\tilde{u} > c$, мы имеем дело с гиперболическим случаем. Характеристики являются тогда прямыми линиями, образующими с осью x угол α, который называется *углом Маха* и для которого $|\sin\alpha| = 1/k = c/\tilde{u}$.

Два семейства характеристик можно обнаружить экспериментально при движении жидкости или газа, если основная скорость $\tilde{u}$ параллельна плоской стенке. Мы образуем на малом интервале AB этой стенки маленькую шероховатость или выступ, порождающий около стенки небольшую вертикальную компоненту скорости λ. В предположении, что движение описывается нашей приближенной системой уравнений, возмущение должно распространяться в область, где течет жидкость, вдоль двух параллельных отрезков характеристик, берущих начало на AB и образующих угол α со стенкой.

§ 4. Единственность. Область зависимости

В этом параграфе мы часто будем подчеркивать, что переменная y имеет смысл времени, и писать t вместо y.

Доказательство существования решения задачи Коши для гиперболической системы

$$L[u]=f(x, t)$$

с заданными начальными значениями

$$u(x, 0)=\psi(x)$$

будет дано в §§ 6, 7, 8. Здесь мы будем предполагать, что решение существует, и докажем, что решение однозначно определяется данными задачи, т. е. функциями $f(x, t)$ и $\psi(x)$. Более того, в любой точке P решение, если оно существует, определяется значениями $f(x, t)$ и $\psi(x)$ только в части пространства Г. Такая зависимость решения u от данных задачи связана с конечной скоростью распространения возмущений в задачах, описываемых гиперболическими уравнениями.

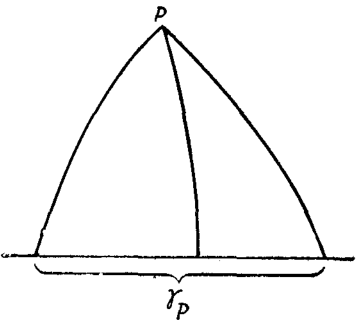


Рис. 24.

1. Области зависимости, влияния и определенности. Решение $u(P)$ задачи Коши в точке P с координатами x, t ($t>0$) зависит только от значений данных задачи в конечной „области зависимости" Γ_P точки P; эта область зависимости состоит из множества точек в верхней полуплоскости, ограниченного крайними характеристиками [1]), проходящими через точку P (см. рис. 24). Если дифференциальное уравнение однородно, т. е. $f=0$, то $u(P)$ зависит только от начальных данных $\psi(x)$ на отрезке γ_P оси x, отсекаемом крайними характеристиками [2]). Этот факт можно выразить также следующим образом:

[1]) Если крайняя характеристика пересекается с другой, то крайнюю характеристику надо продолжать как дугу этой другой характеристики.

[2]) Для наглядности имеет смысл предполагать, что, как и на рис. 24, в рассматриваемой области плоскости x, t характеристики, проходящие через точку P, образуют пучок из k кривых, не пересекающих друг друга и соединяющих точку P с некоторыми точками оси x. Рис. 25, относящийся к уравнению $u_{tt}-t^2u_{xx}=0$ с характеристиками $x-x_0=\pm t^2/2$, показывает, что две характеристики, проходящие через одну точку при $t=0$, касаются друг друга, так что крайние характеристики не состоят из одного аналитического куска. Однако такое пересечение характеристик не исключалось предыдущими рассуждениями.

$u(P)$ не зависит от начальных данных вне γ_P; или, другими словами, если $\psi(x) = \psi^*(x)$ на γ_P и $f = f^*$ в Γ_P, то решения $u(P)$ и $u^*(P)$ уравнений $L[u] = f$ и $L[u] = f^*$, принимающие начальные значения $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$ соответственно, совпадают в точке P. Иногда говорят также, что величина $u(P)$ „не замечает" данных задачи вне Γ_P. В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные гиперболические уравнения $L[u] = 0$ (как мы знаем, это не ограничивает общности), и будем называть отрезок γ_P оси x *областью зависимости* для точки P.

Соответственно мы определим *область влияния* множества $\mathfrak{S}$, принадлежащего оси x, как такую область верхней полуплоскости, точки P которой имеют области зависимости, содержащие точки

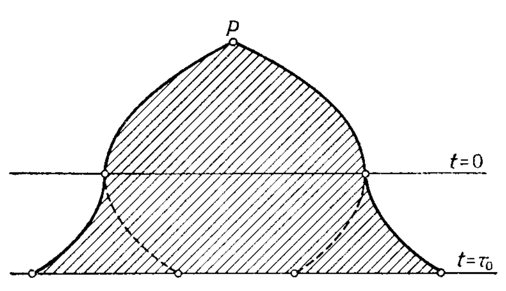


Рис. 25. Область зависимости для $(\partial/\partial t + t\,\partial/\partial x)(\partial/\partial t - t\,\partial/\partial x)\,u = 0$.

множества $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{S}$ — отрезок, то его область влияния ограничена внешними крайними характеристиками [1]), выходящими из концов отрезка $\mathfrak{S}$ в сторону верхней полуплоскости. Эта область влияния неограничена, если мы можем продолжать характеристики для сколь угодно больших значений t.

Наконец, *область определенности* отрезка $\mathfrak{S}$ на оси x состоит из тех точек P, соответствующих $t > 0$, для которых области зависимости γ_P целиком лежат на $\mathfrak{S}$. Очевидно, что эта область ограничена отрезком $\mathfrak{S}$ и внутренними крайними характеристиками, выходящими из концов $\mathfrak{S}$ в сторону верхней полуплоскости; отрезок $\mathfrak{S}$ является областью зависимости для точки пересечения этих характеристик. Значение этих тесно связанных между собой понятий становится полностью ясным в связи с доказательствами единственности, данными в следующих пунктах.

Заметим попутно, что эти понятия и доказанные ниже теоремы единственности указывают только на отрицательный факт, а именно на то, что $u(P)$ не зависит от начальных данных вне γ_P. Однако

[1]) См. предыдущую сноску.

в случае двух независимых переменных можно показать, что γ_P является областью зависимости в строгом смысле, а именно, что для каждой точки Q на γ_P существуют такие начальные данные ψ, что $u(P)$ действительно зависит от значений функции ψ в Q и в окрестности Q. Как мы увидим в гл. VI, для более чем двух независимых переменных соответствующий вопрос об области зависимости в строгом смысле представляет большие трудности.

Если бы допустимые начальные данные $\psi(x)$ для задачи Коши принадлежали только классу аналитических функций, то значения функции ψ на сколь угодно малом открытом множестве на начальной прямой определяли бы значения ψ на всей этой прямой. Следовательно, понятия области зависимости, влияния и определенности не имели бы смысла. Чтобы выяснить эти важные понятия, надо допустить более широкий класс начальных значений. Таким образом, для гиперболических задач естественно строить решения с помощью методов, пригодных для неаналитических начальных данных, а не опираться на доказанную в гл. I, § 7 теорему существования Коши — Ковалевской, которая предполагает аналитичность дифференциального уравнения и начальных условий.

2. Доказательство единственности для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В этом пункте мы установим следующие факты. Для линейных гиперболических уравнений второго порядка область зависимости для точки P заключена между двумя характеристическими кривыми, проходящими через точку P в направлении убывания времени, и начальной кривой. Если уравнение однородное, то основание γ получающегося при этом „треугольника“ является искомой областью зависимости для точки P (этот вопрос уже рассматривался для волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в гл. III, § 7).

Областью определенности отрезка γ является вся эта треугольная область, так как она содержит все точки, для которых области зависимости содержатся в γ. Две другие („внешние“) характеристики, проходящие через концы отрезка γ, ограничивают область влияния этого отрезка, состоящую из точек, для которых области зависимости имеют общие точки с γ.

Чтобы показать, что основание γ нашей треугольной области является областью зависимости для вершины P, достаточно доказать единственность, т. е. установить, что решение однородного уравнения $L[u] = 0$ обращается в нуль в точке P, если начальные значения равны нулю на γ; если начальные значения для двух решений уравнения $L[u] = f$ отличаются только вне отрезка γ, то разность этих решений является решением однородного уравнения с начальными данными, равными нулю на γ.

Следующее ниже доказательство единственности опирается на некоторые *интегралы энергии*, связанные с дифференциальным

уравнением. Мы уже встречали пример такого интеграла в связи с доказательством единственности для гиперболического уравнения теплопроводности (см. гл. III, § 6). Для гиперболических уравнений аналогичная идея оказывается эффективной, если области интегрирования ограничены характеристиками [1]).

Теорема единственности для линейных задач утверждает следующее.

Если на части σ начальной кривой начальные данные равны нулю, то однородное уравнение имеет только тривиальное, т. е. тождественно равное нулю, решение в треугольной области, ограниченной внутренними характеристиками, проходящими через концы отрезка σ.

Идею доказательства можно проиллюстрировать на примере волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} = 0. \tag{1}$$

Пусть Г — треугольная область на плоскости x, t, ограниченная начальной кривой AB, которая нигде не имеет характеристических направлений, и двумя характеристическими кривыми PA и PB (см. рис. 26).

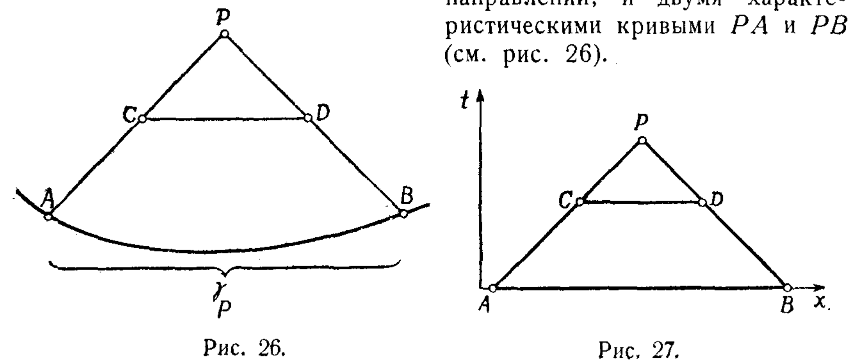


Рис. 26. Рис. 27.

Нашей целью является доказательство того, что если u и производная u_t, а следовательно, и производная u_x, обращаются в нуль на AB, то функция u тождественно равняется нулю во всей области Г. Для этого мы отсечем вершину нашего треугольника прямой $t = \text{const}$, пересекающей кривые PA и PB в точках C и D, и рассмотрим оставшуюся область Г' с границей γ'. По этой области мы проинтегрируем выражение

$$-2u_t(u_{xx} - u_{tt}) = (u_x^2)_t + (u_t^2)_t - 2(u_x u_t)_x,$$

---

[1]) Ссылки на литературу и изучение общего случая $n+1$ переменных можно найти в гл. VI, § 8.

которое имеет вид дивергенции. Принимая во внимание само дифференциальное уравнение, мы получим после интегрирования по Γ'

$$0=\iint_{\Gamma'}\left[(u_x^2)_t+(u_t^2)_t-2\,(u_x u_t)_x\right]dx\,dt=$$
$$=\int_{\gamma'}\left[(u_x^2+u_t^2)\,t_\nu-2\,(u_x u_t)\,x_\nu\right]ds,$$

где через x_ν, t_ν обозначены направляющие косинусы внешней нормали к кривой γ' (т. е. $AB+BD+DC+CA$), а s — длина дуги. На характеристических сторонах CA и DB мы имеем $x_\nu^2=t_\nu^2={}^1/_2$. Следовательно, соответствующую часть интеграла по границе можно записать в виде

$$\int_{AC+BD}\frac{1}{t_\nu}(u_x t_\nu-u_t x_\nu)^2\,ds,$$

откуда видно, что она неотрицательна. На AB подинтегральная функция равна нулю, так как начальные данные обращаются в нуль, а на CD мы имеем $t_\nu=1$, $x_\nu=0$, $ds=dx$. Таким образом, мы получаем

$$\int_{CD}(u_x^2+u_t^2)\,dx=0,$$

откуда следует, что $u_x^2+u_t^2=0$ всюду на CD. Так как расстояние прямой CD от оси x было произвольным, мы можем сделать вывод, что u_x и u_t равны нулю во всех точках области Γ, принадлежащих некоторой окрестности вершины P. Но любую точку P области Γ можно рассматривать как вершину соответствующей меньшей треугольной области, содержащейся в Γ и имеющей основание, лежащее на AB; следовательно, u_x и u_t равны нулю во всех точках области Γ. Поэтому функция u постоянна всюду в Γ и, так как на начальной кривой она обращается в нуль, то u тождественно равна нулю, что и утверждалось.

Аналогичное рассуждение можно применить к линейному гиперболическому уравнению второго порядка

$$L[u]=u_{tt}-u_{xx}-\alpha u_t-\beta u_x-\delta u=0\ ^{1)}, \qquad (1)$$

где α, β, δ — непрерывные функции x и t. Для краткости мы ограничимся такой задачей Коши, когда начальные данные заданы на прямой $t=0$. В этом случае теорема единственности утверждает следующее. *Если функции u и u_t обращаются в нуль на основании AB треугольника Γ (т. е. треугольника ABP, стороны*

[1]) Линейное гиперболическое уравнение второго порядка общего вида получается из него с помощью преобразования координат.

которого являются отрезками характеристик $x+t=\text{const}$, $x-t=\text{const}$, *а основание* AB *лежит на прямой* $t=0$, *см. рис.* 27), *то функция* u *равна нулю во всем треугольнике.*

Сначала мы заметим, что для любой точки (x, t) треугольника Γ

$$u(x, t)=\int_0^t u_\tau(x, \tau)\,d\tau;$$

следовательно, в силу неравенства Шварца,

$$u^2(x, t)\leqslant t\int_0^t u_\tau^2(x, \tau)\,d\tau.$$

Мы снова отсечем вершину нашего треугольника с помощью прямой $t=\text{const}$, получая меньший треугольник, основание которого мы обозначим через H_t, и трапецию Γ_t с параллельными сторонами AB и H_t. Тогда имеет место оценка

$$\int_{H_t} u^2\,dx\leqslant t\iint_{\Gamma_t} u_\tau^2(x, \tau)\,dx\,d\tau$$

для той части нашего треугольника, которая является трапецией (с основанием AB). Интегрируя это выражение по t от $t=0$ до $t=h$, получим

$$\iint_{\Gamma_h} u^2\,dx\,dt\leqslant\int_0^h\left[t\iint_{\Gamma_t} u_\tau^2(x, \tau)\,dx\,d\tau\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^h\left[h\iint_{\Gamma_h} u_\tau^2(x, \tau)\,dx\,d\tau\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant h^2\iint_{\Gamma_h}\left(u_\tau^2+u_x^2\right)dx\,d\tau.$$

Теперь мы определим „интеграл энергии“

$$E(h)=\int_{H_h}\left(u_x^2+u_t^2\right)dx$$

и проинтегрируем тождество

$$0=2u_tL[u]=\left(u_x^2+u_t^2\right)_t-2\left(u_xu_t\right)_x-2\alpha u_t^2-2\beta u_xu_t-2\delta uu_t$$

по области Γ_h. Так как прямая H_h соответствует отрезку CD на рис. 27, мы получим с помощью таких же рассуждений, как

раньше, что

$$0 \leqslant \int\limits_{AC+BD} \frac{1}{t_\nu}(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2\, ds + E(h) =$$

$$= 2 \int\limits_{\Gamma_h}\int \left(\alpha u_t^2 + \beta u_t u_x + \delta u u_t\right) dx\, dt \equiv R,$$

откуда следует неравенство

$$E(h) \leqslant R.$$

Оценим правую часть, принимая во внимание, что

$$2\left|u_x u_t\right| \leqslant u_t^2 + u_x^2, \quad 2\left|u u_t\right| \leqslant u_t^2 + u^2.$$

Если обозначить через M верхнюю грань непрерывных функций α, β, δ, то мы получим

$$R \leqslant 4M \int\limits_{\Gamma_h}\int \left(u_t^2 + u_x^2 + u^2\right) dx\, dt$$

и, следовательно, в силу доказанного выше неравенства

$$\int\limits_{\Gamma_h}\int u^2\, dx\, dt \leqslant h^2 \int\limits_{\Gamma_h}\int \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx\, dt,$$

имеем

$$R \leqslant 4M(1+h^2) \int\limits_{\Gamma_h}\int \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx\, dt \leqslant C \int\limits_0^h E(\alpha)\, d\alpha,$$

где $C = 4M(1+h^2)$, а h — высота трапеции Γ_h. Если l — любое число, такое, что $l > h$, то

$$E(h) \leqslant C \int\limits_0^h E(\alpha)\, d\alpha \leqslant C \int\limits_0^l E(\alpha)\, d\alpha.$$

Интегрируя это неравенство по h в пределах от 0 до l, получим

$$\int\limits_0^l E(h)\, dh \leqslant Cl \int\limits_0^l E(h)\, dh.$$

Если бы величина $E(h)$ была отлична от нуля где-нибудь на отрезке $0 \leqslant h \leqslant l$, то мы имели бы

$$1 \leqslant Cl,$$

что, очевидно, невозможно при $l < 1/C$. Следовательно, на отрезке $0 \leqslant h \leqslant l$ мы имеем $E \equiv 0$. Повторяя эти рассуждения для начальных

прямых $t=l$, $t=2l$, ..., после конечного числа шагов мы убедимся, что интеграл E обращается в нуль во всем треугольнике Г; следовательно, функция u постоянна и равна нулю, что мы и хотели доказать.

3. Общая теорема единственности для линейных систем первого порядка. Метод интегралов энергии позволяет построить очень ясное доказательство единственности для гиперболических систем

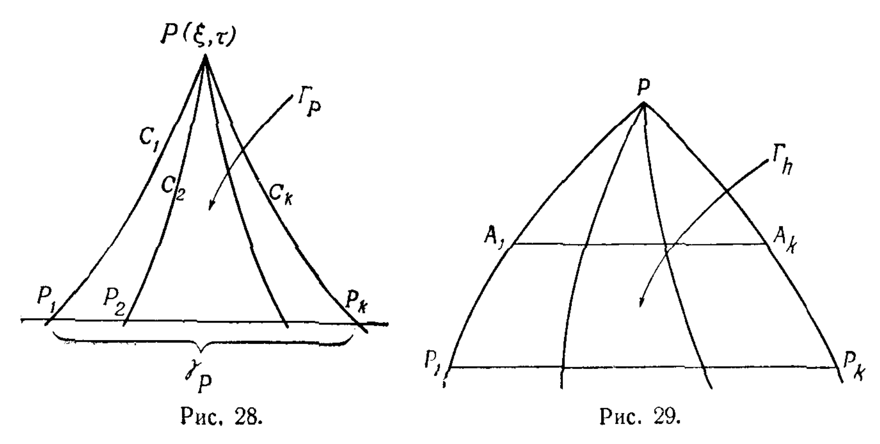


Рис. 28. Рис. 29.

первого порядка. Мы запишем неоднородную систему в матрично-векторной форме

$$u_t + Au_x + Bu + c = 0, \tag{2}$$

где u — вектор неизвестных функций, $A(x, t)$ и $B(x, t)$ — заданные матрицы, а $c(x, t)$ — заданный вектор.

Без ограничения общности мы можем предполагать, что $A = (a_{ik}(x, t))$ — *симметричная* матрица, вспоминая, что линейные гиперболические системы могут быть приведены к симметричной форме (т. е. к характеристической нормальной форме, см. § 2, п. 2). Кроме того, мы предположим, что A имеет непрерывные производные, а B и c непрерывны.

Через точку P с координатами ξ, τ мы проведем характеристики $C_1, C_2, \ldots, C_k$ в обратном направлении и получим точки их пересечения $P_1, P_2, \ldots, P_k$ с начальной прямой $t=0$ [1]) (см. рис. 28). Теперь мы можем утверждать, что справедлива следующая теорема единственности. *Если $c=0$ и $u(x, 0)=0$ на некотором отрезке прямой $t=0$, включающем все точки $P_\varkappa$, то $u(\xi, \tau)=0$.*

[1]) Некоторые из этих характеристик могут быть кратными в рассматриваемой области.

Наименьший такой интервал, т. е. интервал, высекаемый крайними характеристиками, проходящими через точку P, содержит область зависимости [1]) точки P. Действительно, если $u(x, 0)=0$ на отрезке P_1P_k, то $u(x, t)=0$ в треугольной области Γ_P, высекаемой крайними характеристиками, проходящими через точку P, и имеющей в качестве основания отрезок P_1P_k прямой $t=0$.

Для доказательства мы воспользуемся тождеством Грина, которое имеет вид

$$(u, Au)_x=(u_x, Au)+(u, A_x u)+(u, Au_x).$$

Так как матрица A симметричная, то $(u, Au_x)=(Au, u_x)$, и это тождество сводится к

$$2(u, Au_x)=(u, Au)_x-(u, A_x u).$$

Умножив дифференциальное уравнение (2) скалярно на u и применяя только что полученное соотношение, мы получим (для $c=0$)

$$\frac{1}{2}(u, u)_t+\frac{1}{2}(u, Au)_x-\frac{1}{2}(u, A_x u)+(u, Bu)=0.$$

Полезным приемом является введение вместо u неизвестного вектора

$$v=e^{-\mu t}u,$$

где μ — постоянная; это приводит к дифференциальному уравнению

$$v_t+Av_x+B^*v=0 \qquad (2')$$

с начальным условием $v(x, 0)=0$; здесь B^* выражается через B и единичную матрицу I:

$$B^*=B+\mu I.$$

Предыдущее тождество для квадратичных форм, если снова писать u вместо v, примет вид

$$\frac{1}{2}(u, u)_t+\frac{1}{2}(u, Au)_x=(u, \widehat{B}u);$$

квадратичная форма в правой части образована с помощью матрицы

$$\widehat{B}=-B^*+\frac{1}{2}A_x,$$

получение которой является целью нашего приема. Выбирая μ достаточно большим, мы можем добиться того, чтобы матрица $\widehat{B}$ была отрицательно определенной, т. е. чтобы было $(u, \widehat{B}u)\leqslant 0$.

Теперь мы проинтегрируем это тождество по трапециевидной области Γ_h с границей $\beta_h=P_1P_kA_kA_1$ (см. рис. 29); обозначая компо-

---

[1]) Отрезок P_1P_k действительно является областью зависимости для P; здесь также применимы замечания, сделанные в п. 2.

ненты единичного вектора внешней нормали через x_ν, t_ν, получим формулу Грина

$$0 \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma_h}\int [(u, u)_t + (u, Au)_x]\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\beta_h} [(u, u)\, t_\nu + (u, Au)\, x_\nu]\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{A_1A_k + P_kP_1} (u, u)\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{C_1 + C_k} x_\nu \left(u, \left[A + \frac{t_\nu}{x_\nu} I\right] u\right) ds.$$

Если воспользоваться обозначением

$$E(h) = \frac{1}{2} \int\limits_{A_1}^{A_k} (u, u)\, dx,$$

то мы получим

$$E(h) - E(0) \leqslant -\frac{1}{2} \int\limits_{C_1 + C_k} x_\nu \left(u, \left[A + \frac{t_\nu}{x_\nu} I\right] u\right) ds. \qquad (3)$$

Мы покажем, что правая часть неравенства неположительна. Для этого мы напомним, что кривые C_1 и C_k являются характеристическими и определяются уравнениями $\varphi^1(x, t) = 0$, $\varphi^k(x, t) = 0$. Следовательно, они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$-\frac{\varphi^1_t}{\varphi^1_x} = \tau^1, \qquad -\frac{\varphi^k_t}{\varphi^k_x} = \tau^k,$$

где τ^1, τ^k — собственные значения матрицы A, т. е. такие числа, что матрица $A - \tau I$ — особая (см. § 2).

Вдоль характеристики C_1: $\varphi^1 = 0$ внешняя нормаль имеет компоненты, пропорциональные производным φ^1_x, φ^1_t; следовательно, $-t_\nu/x_\nu = \tau^1$. Так как C_1 является крайней слева характеристикой, τ^1 является наибольшим собственным значением матрицы A. Аналогично, на характеристике C_k: $\varphi^k = 0$ компоненты нормали пропорциональны производным φ^k_x, φ^k_t, и $-t_\nu/x_\nu = \tau^k$ — наименьшее собственное значение матрицы A. Мы напомним, что для симметрической матрицы A наибольшее и наименьшее собственные значения определяются как

$$\tau^1 = \max \frac{(u, Au)}{(u, u)}, \quad \tau^k = \min \frac{(u, Au)}{(u, u)}$$

(см. т. I, гл. 1, § 4, п. 1). Следовательно,

$$(u,\ u)\tau^1 \geqslant (u,\ Au), \quad (u,\ u)\tau^k \leqslant (u,\ Au)$$

или

$$(u,\ [A-\tau^1 I]\,u) \leqslant 0, \quad (u,\ [A-\tau^k I]\,u) \geqslant 0.$$

Так как $x_\nu < 0$ на C_1 и $x_\nu > 0$ на C_k, мы имеем

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{C_i} x_\nu\left(u,\ \left[A+\frac{t_\nu}{x_\nu}I\right]u\right)ds \leqslant 0 \text{ для } i=1,\ k.$$

Это показывает, что правая часть формулы (3) неположительна и, следовательно, мы можем утверждать, что

$$E(h) \leqslant E(0). \tag{4}$$

Так как по предположению $E(0)=0$, мы имеем $0 \leqslant E(h) \leqslant 0$; поэтому $E(h)=0$ для $h>0$ и, следовательно, $u=0$ для $t=h$.

4. Единственность для квазилинейных систем. Только что доказанная теорема единственности справедлива также и для квазилинейных систем первого порядка:

$$u_t + A(x,\ t,\ u)\,u_x + B(x,\ t,\ u) = 0, \tag{5}$$

несмотря на то, что характеристики системы (5) $C_\varkappa$ зависят от решения u.

Мы предположим, что матрицы A и B в рассматриваемой области имеют непрерывные производные по x, t и u.

Пусть u и v — два решения системы (5), определенные в области D и удовлетворяющие на начальном отрезке одинаковым начальным условиям. Тогда функция

$$z(x,\ t) = u - v$$

имеет нулевые начальные значения.

Вычитая дифференциальное уравнение, записанное для функции v, из уравнения для u, мы получим

$$z_t + A(v)\,z_x + [A(u) - A(v)]\,u_x + B(u) - B(v) = 0; \tag{6}$$

здесь не указано, что коэффициенты еще явно зависят от x и t.

В силу непрерывности и дифференцируемости матриц A и B мы можем воспользоваться следующей теоремой о конечных приращениях:

$$A(u) - A(v) = H(u,\ v)\,z; \quad B(u) - B(v) = K(u,\ v)\,z,$$

где H, K — непрерывные функции. Рассмотрим теперь u, v, u_x как известные функции x и t и подставим их в H и K, а также в $A(v)$;

тем самым уравнение (6) будет сделано линейным однородным дифференциальным уравнением относительно функции z вида

$$z_t + az_x + bz = 0$$

с нулевыми начальными значениями. Теорема из п. 3 утверждает теперь, что z тождественно обращается в нуль, и, таким образом, теорема единственности доказана также и для квазилинейных уравнений.

5. Энергетические неравенства. Неравенство (4) п. 3 утверждает, что значение $E(h)$ для положительных h ограничено величиной, отличающейся от $E(0)$ только фиксированным постоянным множителем. Во многих уравнениях, описывающих физические явления, величину $E(h)$ можно истолковать как энергию некоторой части физической системы в момент времени h. Поэтому неравенство (4) в таких случаях (и по аналогии в общем случае) называется *энергетическим неравенством*.

В гл. VI, § 9 такие энергетические неравенства будут применяться для доказательства существования решения задачи Коши в случае n независимых переменных. Но для двух независимых переменных в § 6 этой главы будут построены решения прямым методом, который одновременно дает другое доказательство только что полученной теоремы единственности.

§ 5. Представление решений в форме Римана

Начало современной теории гиперболических уравнений в частных производных было положено Б. Риманом, получившим представление решения задачи Коши для уравнения второго порядка [1]). В его работе нет общего доказательства существования и способа построения решений, а лишь рассмотрены некоторые примеры, допускающие явное решение. В предположении, что решение u существует, Риман дает лишь изящное явное интегральное представление u в форме, аналогичной представлениям решений краевых задач для эллиптических уравнений с помощью функции Грина; это интегральное представление является типичным образцом для большого числа аналогичных формул, определяющих „линейные функционалы“ [2]). Элементарное изложение теории Римана будет в дальнейшем сильно обобщено.

---

[1]) Риман развил эту теорию как приложение к своей классической работе о динамике сжимаемых газов (см. Риман [1]).

[2]) См. примечание на стр. 450 и дальнейшие рассуждения, в частности, гл. VI, § 15 и приложение.

1. Задача Коши. Любое линейное гиперболическое уравнение второго порядка после соответствующего преобразования может быть записано в одной из двух форм (ср. гл. III, § 2, п. 1)

$$L[u] \equiv u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{1}$$

$$L[u] \equiv u_{yy} - u_{xx} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{1'}$$

где a, b, c, f — заданные (непрерывно дифференцируемые) функции независимых переменных x, y.

Начальная кривая C предполагается „свободной", т. е. она нигде не касается характеристических направлений; характеристиками для уравнения (1) являются прямые, параллельные осям координат; для уравнения (1') это прямые $x + y = \text{const}$ и $x - y = \text{const}$.

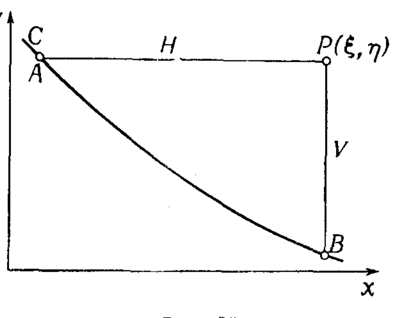


Рис. 30.

Наша цель состоит в том, чтобы выразить решение u в точке P через функцию f и начальные данные, т. е. через значения функции u и некоторой „выводящей из C" производной u на кривой C. (Из таких начальных данных на C определяются и $u_x = p$, и $u_y = q$). Из § 4 мы заключаем, что область зависимости для точки $P: (\xi, \eta)$ — это область, ограниченная двумя характеристиками, проходящими через P, и кривой C. В случае уравнения (1) это треугольная область ◺, изображенная на рис. 30.

Если начальная кривая вырождается в прямой угол, образованный прямыми $x = \alpha$, $y = \beta$, то мы не можем уже задавать два условия на C; вместо этого мы ставим „характеристическую задачу Коши" [1]), в которой на прямых $x = \alpha$, $y = \beta$ задаются только значения u.

2. Функция Римана. Риман обосновывал свой метод получения формулы представления с помощью аналогии между дифференциальным уравнением и конечной системой линейных уравнений. Такую систему относительно неизвестных u^i можно решать следующим образом: умножим левые части на неопределенные пока величины v^i, сложим эти произведения, перегруппируем слагаемые в этих билинейных формах, вынося за скобку неизвестные u^i, и, наконец, определим v^i так, чтобы коэффициенты при всех u^i обратились в нуль, кроме, например, коэффициента при u^1, который сделаем равным 1.

---

[1]) Иногда эту задачу называют задачей Гурса. — *Прим. ред.*

Таким образом мы получим представление для u^1, аналогично для u^2 и т. д. Соответствующие величины v^i зависят от коэффициентов, но не зависят от правых частей уравнений.

Представление для значения решения нашего дифференциального уравнения в точке P можно получить аналогичным образом: умножают дифференциальное уравнение на функцию v, интегрируют по области ◺, преобразуют интеграл с помощью формулы Грина, так чтобы функция u оказалась множителем в подинтегральной функции; затем пытаются определить функцию v так, чтобы получить требуемое представление.

Мы уже ввели понятие сопряженного оператора L^* для данного оператора L (гл. III, прил. 1, § 2); при этом выражение $vL[u]-uL^*[v]$ должно иметь вид дивергенции. Для уравнения (1) L^* определяется формулой

$$L^*[v]=v_{xy}-(av)_x-(bv)_y+cv,$$

и мы имеем

$$vL[u]-uL^*[v[=(vu_x+buv)_y-(uv_y-auv)_x.$$

Интегрируя это равенство по области G с границей Γ, мы получим с помощью формулы Гаусса

$$-\int_G\int (vL[u]-uL^*[v])\,dx\,dy=$$
$$=\int_\Gamma [(vu_x+buv)\,dx+(uv_y-auv)\,dy].$$

Применим эту формулу к области зависимости для точки P. Учитывая уравнение (1), найдем, что

$$-\int_G\int (fv-uL^*[v])\,dx\,dy=$$
$$=\int_{AB+BP+PA}[v(u_x+bu)\,dx+u(v_y-av)\,dy]=$$
$$=\int_{AB}[v(u_x+bu)\,dx+u(v_y-av)\,dy]+$$
$$+\int_{BP}u(v_y-av)\,dy-\int_{AP}v(u_x+bu)\,dx,$$

и так как

$$\int_{AP}v(u_x+bu)\,dx=v(P)\,u(P)-v(A)\,u(A)-\int_{AP}u(v_x-bv)\,dx,$$

то

$$u(P)\,v(P)=u(A)\,v(A)+\int\limits_{AP}u(v_x-bv)\,dx+\int\limits_{BP}u(v_y-av)\,dy+$$

$$+\int\limits_{AB}[v(u_x+bu)\,dx+u(v_y-av)\,dy]+\int\limits_{G}\int(fv-uL^*[v])\,dx\,dy.$$

Чтобы получить представление для $u(P)=u(\xi,\ \eta)$, мы выберем в качестве v функцию $R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$, удовлетворяющую следующим условиям:

а) R как функция x и y удовлетворяет сопряженному уравнению

$$L^*_{(x,\,y)}[R]=0. \tag{2}$$

б) $R_x=bR$ на AP, $R_y=aR$ на BP, или, если написать это подробно,

$$R_x(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=b(x,\ \eta)\,R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\quad \text{при}\quad y=\eta,$$

$$R_y(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=a(\xi,\ y)\,R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\quad \text{при}\quad x=\xi.$$

в) $R(\xi,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=1.$

Условия б) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями для функции R вдоль характеристик; интегрируя их и применяя условие в), чтобы определить значение постоянной интегрирования, мы получим для значений R на характеристиках, проходящих через P, формулы

$$R(x,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=\exp\left\{\int\limits_{\xi}^{x}b(\lambda,\ \eta)\,d\lambda\right\}, \tag{3}$$

$$R(\xi,\ y;\ \xi,\ \eta)=\exp\left\{\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,\ \lambda)\,d\lambda\right\}. \tag{3'}$$

Задача отыскания решения R уравнения (2), удовлетворяющего условиям (3), (3′), является характеристической задачей Коши. Вопрос о существовании ее решения будет рассматриваться в начале § 6. Функция R называется функцией Римана, связанной с оператором L; с помощью этой функции получается формула представления Римана

$$u(P)=u(A)\,R(A;\ \xi,\ \eta)+\int\limits_{AB}[R(u_x+bu)\,dx+u(R_y-aR)\,dy]+$$

$$+\int\limits_{G}\int Rf\,dx\,dy.$$

Чтобы получить более симметричное выражение, мы сложим это равенство с тождеством

$$0 = \frac{1}{2}\left[u(B)R(B) - u(A)R(A)\right] - \int\limits_{AB}\left[\frac{1}{2}(u_xR + uR_x)\,dx + \frac{1}{2}(u_yR + uR_y)\,dy\right],$$

которое получается, если выражение uR проинтегрировать по частям вдоль C от A до B:

$$u(P) = \frac{1}{2}\left[u(A)R(A) + u(B)R(B)\right] + \int\limits_{AB}\left(\left[\frac{1}{2}Ru_x + \left(bR - \frac{1}{2}R_x\right)u\right]dx - \left[\frac{1}{2}Ru_y + \left(aR - \frac{1}{2}R_y\right)u\right]dy\right) + \iint\limits_G Rf\,dx\,dy. \qquad (4)$$

Формула (4) дает представление решения уравнения (1) для произвольных начальных данных, заданных на произвольной нехарактеристической кривой C, через решение сопряженного уравнения R, зависящее от x, y и двух параметров ξ, η [1]).

Выводя формулу представления (4), мы *предполагали* существование решения u уравнения $L[u] = f$ с начальными данными на AB и существование функции Римана R. Легко проверить следующий факт. Если функция Римана существует и имеет достаточное число производных по своим аргументам, то функция $u(P)$, определенная формулой (4), является решением уравнения $L[u] = f$ с заданными начальными условиями, если только кривая C нигде не имеет характеристического направления. Однако это замечание на самом деле не упрощает общее доказательство существования, так как функцию

---

[1]) Формула Римана (4) является частным случаем следующего общего принципа: „Непрерывный линейный функционал" $u(P) = L[f]$, т. е. величина, линейно и непрерывно зависящая от функции $f(Q)$, может быть представлен в виде

$$u(P) = \int K(Q, P)\, f(Q)\, dQ,$$

где ядро K является функцией Q и P, а интегрирование производится по области изменения переменной Q. Естественно, что такое общее представление (оно принадлежит Ф. Риссу) справедливо только при некоторых условиях гладкости. Но во всяком случае оно является достаточным основанием для применения многих методов. В нашем случае решение u является линейным функционалом от функции $f(x, y)$ в области $\mathfrak{G}$ и начальных значений на C и зависит от ξ, η как от параметров. Как мы увидим позднее, в гл. VI, стремление получить такие интегральные представления приводит к далеко идущим обобщениям.

Римана, определенную как решение характеристической задачи Коши (с очень *частными* на вид начальными данными), вообще говоря, построить не легче, чем решение *произвольной* задачи Коши. Однако в некоторых частных случаях можно явно построить функцию Римана (см. п. 5, скажем, пример 2)[1]).

В предположении, что функция R существует, из формулы (4) следует, что решение с заданными начальными данными единственно. Ввиду теоремы Хольмгрена (см. гл. III, прил. 2) это не является неожиданным.

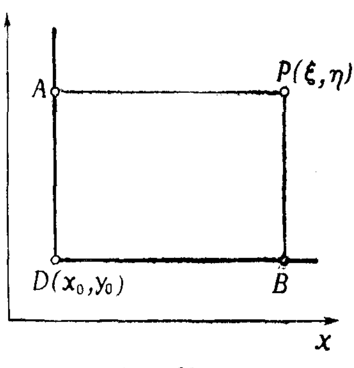


Рис. 31.

3. Симметрия функции Римана. Предположим, что u является решением уравнения $L[u] = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$, определенным в прямоугольнике $PADB$ (см. рис. 31); его стороны AD и DB являются характеристиками, в которые вырождается начальная линия AB. Тогда формула представления Римана (4) принимает вид

$$u(P) = \frac{1}{2}[u(A)R(A) + u(B)R(B)] - \\ - \frac{1}{2}\int_D^A (R_y u - u_y R - 2auR)\,dy - \frac{1}{2}\int_D^B (R_x u - u_x R - 2buR)\,dx.$$

Применяя тождество

$$R_z u - u_z R - 2guR = (uR)_z - 2R(u_z + gu)$$

и производя интегрирование в первом члене, получаем

$$u(P) = u(D)R(D) + \int_D^A R(u_y + au)\,dy + \int_D^B R(u_x + bu)\,dx. \quad (5)$$

Теперь мы выберем в качестве u функцию Римана для сопряженного уравнения $L^*[v] = v_{xy} - av_x - bv_y + dv$ (где $d = c - a_x - b_y$) и для точки D:

$$u = R^*(x, y; D).$$

---

[1]) Формула представления Римана была впервые обобщена на линейные уравнения высших порядков с двумя независимыми переменными Бургатти [1] и Реллихом [2]. Хольмгрен обобщил метод Римана на системы уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными (см. Хольмгрен [2]). См. также п. 4 и гл. VI, § 15.

Из свойств функции Римана (см. а), б), в) п. 2) следует, что

$$L^{**}[R^*] = L[R^*] = 0,$$
$$R^*_y + aR^* = 0 \quad \text{на} \quad DA,$$
$$R^*_x + bR^* = 0 \quad \text{на} \quad DB,$$

и $R^*(D, D) = 1$. Поэтому формула (5) дает

$$R^*(P;\ D) = R(D;\ P). \tag{6}$$

Другими словами: функция Римана для оператора L переходит в функцию Римана для сопряженного с ним оператора L^*, если поменять местами переменные ξ, η и x, y[1]). Из этого свойства „взаимности“ функции Римана следует, что она как функция параметров ξ, η удовлетворяет уравнению

$$L_{(\xi,\ \eta)}[R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)] = 0. \tag{7}$$

Хотя функция R сначала была определена как решение сопряженного уравнения, оказывается, что она дает также двупараметрическое семейство решений уравнения $L[u] = 0$.

4. Функция Римана и излучение из точки. Обобщение на задачи более высокого порядка. Рассмотрим уравнение (1′) (считая, что переменная y совпадает со временем t)

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} + au_x + bu_t + cu = f.$$

Пусть $\{f_k\}$ — последовательность функций, обладающих следующими свойствами:

(I) функция $f_k \geqslant 0$ отлична от нуля только в некоторой окрестности N_k фиксированной точки $Q = (\alpha, \beta)$;

(II) $\displaystyle\iint\limits_{N_k} f_k\,dx\,dt = 1$ при всех k;

(III) окрестности N_k стягиваются в точке Q при $k \to \infty$[2]).

Обозначим через u_k решение уравнения $L[u] = f_k$, равное нулю вместе со своими первыми производными на начальной кривой C. Из представления Римана следует тогда, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ существует и что

$$u(P) = R(Q;\ P).$$

---

[1]) В частности, отсюда следует, что если оператор L самосопряженный, то функция R симметрична относительно x, y и ξ, η.

[2]) Предел $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ соответствует δ-функции Дирака.

Решение $u(x, t) = R(\alpha, \beta; x, t)$ можно, следовательно, физически истолковать как интенсивность в точке (x, t) единичного излучения, исходящего из точки Q пространства-времени. Математически это кратко формулируется так: функция $u(x, t)$ при $t > 0$ является решением уравнения

$$L[u] = \delta(x - \alpha, t - \beta),$$

удовлетворяющим нулевым начальным условиям на C.

Для произвольной функции f формула Римана дает суперпозицию эффектов излучения, источниками которого являются все точки (α, β), расположенные над кривой C, лежащие в области зависимости точки (x, t). Это подсказывает, каким образом следует обобщить понятие функции Римана для задач более высокого порядка и с большим числом пространственных переменных (см. гл. VI, § 15). Здесь можно дать только краткое указание, так как в гл. VI, § 15, будет полностью изложена соответствующая теория.

Рассмотрим для краткости оператор $L[u]$, применяемый к вектору u с k компонентами, и предположим, что L состоит из k линейных операторов первого порядка. Тогда тензор Римана определяется с помощью δ-функции Дирака как решение сопряженного уравнения

$$L^*(R(x, t; \xi, \tau)) = 0, \qquad (t < \tau)$$

удовлетворяющее при $t = \tau$ условию

$$R(x, \tau; \xi, \tau) = \delta(x - \xi) I,$$

где I — единичная матрица. Построение тензора Римана и подробные объяснения даны в гл. VI, § 15; это построение основано на интегрировании по характеристикам, исходящим из точки P в сторону прямой $t = 0$, как показано в гл. VI, § 4.

5. Примеры.

1) Для простейшего волнового уравнения

$$u_{xy} = 0 \tag{8}$$

функция Римана $R(x, y; \xi, \eta)$ тождественно равна 1, и, следовательно, решение дается формулой

$$u(P) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\int_{AB}(u_x\,dx - u_y\,dy). \tag{9}$$

Вводя новые координаты

$$x + y = X,$$
$$x - y = T,$$

мы получим вместо (8) уравнение

$$u_{TT} - u_{XX} = 0, \tag{8'}$$

а вместо формулы (9) — формулу

$$u(P) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \\ + \frac{1}{2} \int_{AB} \left[(u_X + u_T) \frac{1}{2}(dX + dT) - (u_X - u_T) \frac{1}{2}(dX - dT) \right] = \\ = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2} \int_{AB} (u_T\, dX + u_X\, dT). \tag{9'}$$

Если начальной кривой служит линия $T = 0$, т. е. если A и B — это точки $(X - T,\ 0)$, $(X + T,\ 0)$, то формула (9′) дает

$$u(X,\ T) = \frac{1}{2}[u(X - T,\ 0) + u(X + T,\ 0)] + \\ + \frac{1}{2} \int_{X-T}^{X+T} u_T(\lambda,\ 0)\, d\lambda. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (8′) можно записать в различных видах, простейший из которых таков:

$$u(X,\ T) = f(X - T) + g(X + T),$$

где f и g — произвольные функции. Чтобы решить задачу Коши, надо определить f и g из начальных условий. Это приводит к формуле (10), которая обычно так и получается.

2) Далее мы рассмотрим уравнение

$$L[u] = u_{xy} + cu = g(x,\ y),$$

где c — постоянная; оно эквивалентно *телеграфному уравнению* (см. гл. III, § 4). Это уравнение является самосопряженным. Так как коэффициенты оператора L постоянные, функция $R(P,\ Q)$ зависит только от относительного положения точек P и Q. Кроме того, считая Q началом координат, можно заметить, что если функция

$$v(x,\ y) = R(x,\ y;\ 0,\ 0)$$

удовлетворяет условиям, наложенным на функцию Римана (см. условия а), б), в) п. 2), то функция

$$w(x,\ y) = v(\alpha x,\ \alpha^{-1} y)$$

также удовлетворяет этим условиям. Ясно, что из условия $L^*[v(x,\ y)] = 0$ следует, что $L^*[w] = 0$, так что условие а) выполняется. Так как $a = b = 0$, условие б) означает, что функция $v = R$ постоянна на осях координат. Если v обладает этим свойством, то им обладает

и w; наконец, из того, что $v(0, 0)=1$, следует, что $w(0, 0)=1$. Так как эти условия определяют функцию Римана однозначно (см. § 6), то мы получаем, что $w(x, y)\equiv v(x, y)$ — функция только от xy. Для более общего случая, когда $Q=(\xi, \eta)$, функция Римана $R(P, Q)$ имеет вид

$$R(x, y; \xi, \eta)=f(z),$$

где

$$z=(x-\xi)(y-\eta).$$

Из уравнения $L^*[R]=0$ тогда следует, что функция f удовлетворяет уравнению $zf''+f'+cf=0$; если положить $\lambda=\sqrt{4cz}$, оно переходит в уравнение Бесселя

$$\frac{d^2f}{d\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{df}{d\lambda}+f=0.$$

Решением, регулярным в начале координат, является функция Бесселя

$$f=J_0(\lambda)$$

(см. т. I, гл. VII, § 2). Действительно,

$$R(x, y; \xi, \eta)=J_0\left(\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)}\right)$$

есть искомая функция Римана, так как она удовлетворяет заданным условиям на прямых $x=\xi$, $y=\eta$; это легко проверить непосредственно.

3) В § 3, п. 1 мы изучали *одномерное изэнтропическое течение жидкости*; мы ввели инварианты Римана r и s и привели уравнения движения к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial}{\partial x}\right)r=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial}{\partial x}\right)s=0.$$

Эту систему можно линеаризировать с помощью преобразования годографа (см. § 2, п. 3), что приводит к системе

$$x_s-(u+c)t_s=0,$$
$$-x_r+(u-c)t_r=0.$$

Мы исключим x и получим уравнение второго порядка

$$-2ct_{rs}+(u-c)_s t_r+(u+c)_r t_s=0.$$

Для политропного газа были найдены инварианты Римана (см. § 3, п. 1)

$$r=\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1}, \quad s=-\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1},$$

так что наше уравнение второго порядка имеет вид

$$(r+s)\,t_{rs}+\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}(t_r+t_s)=0.$$

Мы теперь изменим обозначения, приведя их в соответствие с обозначениями этого пункта. Пусть $r=x$, $s=y$, $t=u$ и $(\gamma+1)/2(\gamma-1)=-n$. Тогда наше уравнение второго порядка переходит в уравнение

$$L[u]\equiv u_{xy}-\frac{n}{x+y}(u_x+u_y)=0. \tag{11}$$

Согласно п. 2, его функция Римана должна удовлетворять уравнению

$$L^*[R]\equiv R_{xy}+\frac{n}{x+y}(R_x+R_y)-\frac{2n}{(x+y)^2}R=0 \tag{12}$$

и условиям

$$R_x(x,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=-\frac{n}{x+\eta}R(x,\ \eta;\ \xi,\ \eta),$$

$$R_y(\xi,\ y;\ \xi,\ \eta)=-\frac{n}{\xi+y}R(\xi,\ y;\ \xi,\ \eta)$$

и $R(\xi,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=1$. Если проинтегрировать эти условия по характеристикам, то получатся соотношения

$$R(x,\ \eta;\ \xi,\ \eta)=\left(\frac{x+\eta}{\xi+\eta}\right)^{-n}, \tag{13}$$

$$R(\xi,\ y;\ \xi,\ \eta)=\left(\frac{\xi+y}{\xi+\eta}\right)^{-n} \tag{13'}$$

для решения уравнения (12) (ср. уравнения (2), (3) и (3')).

Уравнение (11) имеет решения особенно простого вида, если n — целое положительное число. Умножая уравнение (11) на $x+y$ и дифференцируя его n раз по x, мы получим, согласно формуле Лейбница,

$$(x+y)\,D_x^{n+1}u_y-nD_x^{n+1}u=0, \tag{14}$$

где через D_x и D_y обозначены $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$.

Из свойства взаимности функции Римана следует, что R как функция ξ, η удовлетворяет уравнению

$$L_{(\xi,\ \eta)}[R]=R_{\xi\eta}-\frac{n}{\xi+\eta}(R_\xi+R_\eta)=0 \tag{12'}$$

(см. уравнение (7)). Следовательно, мы имеем также

$$(\xi+\eta)\,D_\xi^{n+1}R_\eta-nD_\xi^{n+1}R=0, \tag{15}$$

Уравнения (14) и (15) — это обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функций $D_x^{n+1}u$ и $D_\xi^{n+1}R$ соответственно; они имеют решения

$$D_x^{n+1}u = A(x;\ \xi,\ \eta)(x+y)^n$$

и

$$D_\xi^{n+1}R = B(\xi;\ x,\ y)(\xi+\eta)^n.$$

Применяя условие (13), мы убеждаемся, что при $\eta = y$ $D_\xi^{n+1}R(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = 0$. Отсюда $B(\xi;\ x,\ \eta) = 0$ и, следовательно, $B(\xi;\ x,\ y) = 0$. Из этого равенства и из соответствующего рассуждения для $(n+1)$-й производной по η мы делаем вывод, что R является полиномом степени не выше n по ξ, η.

Решение уравнения (12′), удовлетворяющее нужным граничным условиям при $\xi = x$, $\eta = y$, мы ищем в виде полинома

$$R(\xi,\ \eta;\ x,\ y) = \frac{(\xi+\eta)^n}{(x+y)^n}\psi(w), \tag{16}$$

где

$$w = -\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{(\xi+\eta)(x+y)} \quad \text{и} \quad \psi(w) = 1 + a_1 w + \ldots + a_n w^n.$$

Подставляя выражение (16) в уравнение (12′) и учитывая, что

$$\psi_\xi = \psi' w_\xi, \quad \psi_\eta = \psi' w_\eta, \quad \psi_{\xi\eta} = \psi'' w_\xi w_\eta + \psi' w_{\xi\eta},$$

мы получим, что функция ψ удовлетворяет уравнению

$$w(w-1)\psi''(w) + (2w-1)\psi'(w) - n(n+1)\psi(w) = 0. \tag{17}$$

Единственным решением[1]) этого уравнения, для которого $\psi(0) = 1$, является гипергеометрический ряд

$$\psi(z) = \psi(1+n,\ -n,\ 1;\ z).$$

Таким образом, функцию R мы получаем в виде

$$R(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = \frac{(\xi+\eta)^n}{(x+y)^n}\psi\left(1+n,\ -n,\ 1;\ -\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{(x+y)(\xi+\eta)}\right); \tag{18}$$

для целых положительных n она обращается в полином степени $n-1$. Из наших рассуждений следует, что формула (18) дает функцию Римана для произвольных n[2]).

---

[1]) См. Магнус и Оберхеттингер [1], гл. II, § 1 [а также Трикоми Ф., Лекции по уравнениям с частными производными, М., 1957, гл. I. — *Прим. ред.*]

[2]) Копсон (в работе [1]) сделал обзор уравнений, для которых можно получить функцию Римана в замкнутом виде. Читатель найдет там также интересные сведения о методах получения явных решений.

§ 6. Решение задачи Коши для линейных и почти линейных гиперболических уравнений с помощью итераций

В последующих параграфах даны конструктивные доказательства существования решения задачи Коши. Они основаны на том же методе последовательных приближений, который хорошо известен в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как говорилось раньше, задачу Коши можно свести к такой задаче Коши, для которой начальные данные, или „данные Коши“, обращаются в нуль. Для этого мы вычитаем из неизвестной функции u подходящим образом подобранную[1]) фиксированную функцию ω и рассматриваем дифференциальное уравнение для новой неизвестной функции. Кроме того, мы можем так преобразовать независимые переменные, чтобы нехарактеристическая начальная кривая C перешла в прямую $y=0$. Без ограничения общности мы можем производить эти упрощения и снова обозначать неизвестную функцию через u.

1. Построение решения уравнения второго порядка. Сначала мы вкратце рассмотрим характеристическую задачу Коши, в частности с целью доказать существование функции Римана, введенной в предыдущем пункте.

Сначала мы рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$L[u]=u_{xy}+au_x+bu_y+cu=f(x, y), \tag{1}$$

которое можно записать также в виде системы двух линейных уравнений первого порядка относительно функций u и $v=u_y+au$:

$$u_y=v-au,$$
$$v_x=-bv+(a_x+ab-c)u+f.$$

Вместо того чтобы решать задачу Коши для уравнения (1), можно рассмотреть задачу Коши для более общего уравнения

$$u_{xy}=F(x, y, u, p, q), \tag{1'}$$

что так же просто, а с формальной точки зрения даже яснее; снова, как и прежде, мы будем пользоваться сокращенными обозначениями

$$u_x=p, \quad u_y=q.$$

Дифференциальное уравнение и в этом случае можно заменить почти линейной системой трех уравнений относительно функций u, p, q:

$$u_x=p, \ p_y=F(x, y, u, p, q), \ q_x=F(x, y, u, p, q).$$

---

[1]) Если начальная кривая C задана уравнением $y=y(x)$ и если на C заданы неоднородные данные Коши: $u=u(x)$, $u_x=p(x)$, $u_y=q(x)$, удовлетворяющие условию полосы $u'=p+qy'$, то такая функция определяется, как легко проверить, например, формулой $\omega(x, y)=u(x)+(y-y(x))q(x)$.

Мы ставим себе целью построить такое решение u, которое на некоторой гладкой нехарактеристической кривой C принимает начальные значения $u = p = q = 0$.

Здесь предполагается, что функция F имеет непрерывные производные по аргументам x, y, u, p, q. Относительно решения u предполагается, что оно имеет непрерывные производные первого порядка и смешанную производную $s = u_{xy}$, которая в силу уравнения $(1')$ также должна быть непрерывной[1]).

Задача сохраняет смысл, и описанное ниже построение дает решение также и в случае *характеристической* задачи Коши. Это — предельный случай, для которого кривая C состоит из двух характеристических линий AD и BD (см. рис. 32). Нам достаточно задать на C только начальные значения функции u, и, как мы видели раньше,

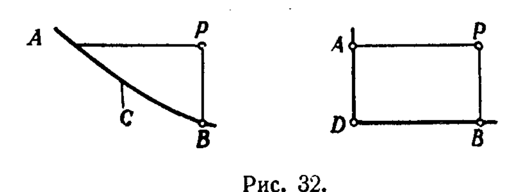


Рис. 32.

дифференциальное уравнение (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для функций p и q на линиях AD и BD соответственно. Это уравнение, вместе с условием, что $p = q = 0$ в точке D, определяет значения p и q на C. В остальном нет необходимости делать здесь различие между задачей Коши и характеристической задачей Коши.

Решение строится в достаточно малой треугольной области ◹ плоскости x, y, которая содержит заданный отрезок начальной кривой C или прилегает к нему и состоит из таких точек P, которые соединяются с кривой C двумя отрезками характеристик PP_1 и PP_2, так что точки P_1 и P_2 лежат на данном отрезке.

Область ◹ расширяется до области $\bar{G}$ пространства x, y, u, p, q с помощью неравенств $|u| \leqslant \mu$, $|p| \leqslant \mu$, $|q| \leqslant \mu$, где μ — некоторая постоянная. Мы предполагаем, что в этой области $|F| < \lambda$, $|F_u| \leqslant \lambda$, $|F_p| \leqslant \lambda$, $|F_q| \leqslant \lambda$ с некоторой постоянной λ. Для начальных данных $u = p = q = 0$ (а в случае характеристической

---

[1]) Относительно u_{xx}, u_{yy} не надо делать таких предположений. Однако, если функция F и начальные данные имеют непрерывные вторые производные, то описанное ниже построение решения обеспечивает существование непрерывных производных $r = u_{xx}$, $t = u_{yy}$ и даже непрерывных третьих производных p_{xy}, q_{xy}.

задачи Коши просто $u=0$) уравнение (1′) может быть записано в проинтегрированной форме

$$u(P)=\iint\limits_{\triangledown} F(x, y, u, p, q)\,dx\,dy \tag{2}$$

для точки P области $\triangledown$ (см. гл. I, § 1, п. 1).

Теперь мы определим ***интегральное преобразование*** функции $v(x, y)$ в новую функцию $v'(x, y)$ с помощью формулы

$$v'(P)=Tv=\iint\limits_{\triangledown} F(x, y, v, v_x, v_y)\,dx\,dy. \tag{2′}$$

Искомое решение является „неподвижной точкой" этого преобразования T в функциональном пространстве, и эту неподвижную точку можно получить с помощью процесса последовательных приближений. Она будет пределом последовательности u_n, в которой $u_{n+1}=Tu_n$ и u_0 — произвольная функция, удовлетворяющая начальным условиям, например, $u=0$, $p=0$, $q=0$.

Для достаточно малых областей $\triangledown$ последовательные приближения безусловно сходятся к решению. Чтобы избежать повторений, мы не будем проводить доказательство в этом пункте. Как указывалось выше, характеристическая задача Коши эквивалентна задаче Коши для линейных или почти линейных систем первого порядка; ниже мы построим решения таких систем с помощью последовательных приближений.

2. Обозначения и результаты для линейных и почти линейных [1]) систем первого порядка. В последующих пунктах мы будем писать t вместо y. Как и в § 2, мы рассмотрим систему k дифференциальных уравнений первого порядка для вектор-функции $u(x, t)$ с компонентами $u^1, u^2, \ldots, u^k$:

$$u_t+Au_x+B=0, \tag{3}$$

где матрица $A(x, t)$ размера $k\times k$ и вектор $B(x, t, u)$ имеют непрерывные первые производные и где B может зависеть от пере-

---

[1]) Результаты, касающиеся квазилинейных систем, которые будут получены с помощью рассуждений этого и следующего параграфов, принадлежат Шаудеру [1]. Дальнейшие доказательства были даны Чинквини-Чибрарио [1], Фридрихсом [1], Курантом и П. Лаксом [1]. Более тонкие результаты были получены Дуглисом [1], Хартманом и Винтнером [1] и П. Лаксом [5]. Теорема существования при более сильных предположениях о дифференцируемости для одного дифференциального уравнения n-го порядка была много лет назад получена Э. Леви [2]. Работа Леви о гиперболических уравнениях оставалась забытой, пока почти все его результаты не были заново открыты. Его замечания о нелинейных уравнениях с кратными характеристиками (см. Леви [1]) до сих пор остаются не продолженными.

менных u как линейно, так и нелинейно. Без ограничения общности мы можем предполагать, что ось x: $t=0$ является начальной линией, и задать начальные данные

$$u(x, 0)=\psi(x),$$

где вектор $\psi(x)$ имеет непрерывную первую производную. Система (3) предполагается гиперболической в смысле § 2, т. е. матрица A имеет k действительных собственных значений $\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^k$ и k линейно независимых левых собственных векторов $l^1, l^2, \ldots, l^k$, образующих матрицу Λ с определителем 1. Предполагается, что собственные векторы $l^\varkappa$ имеют непрерывные производные по x и t. Наконец, мы предполагаем, что первые производные коэффициентов и, следовательно, первые производные собственных элементов, имеют модуль непрерывности, удовлетворяющий специальным требованиям, например, *условию Липшица*. Характеристические кривые определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями $dx/dt=\tau^\varkappa$, и характеристики $C_\varkappa$, выходящие из точки P с координатами ξ, τ, могут быть представлены с помощью функций

$$C_\varkappa:\ x=x^\varkappa(t;\ \xi,\ \tau),$$

имеющих непрерывные производные по t и по параметрам ξ, τ. В силу соотношения $l^\varkappa A=\tau^\varkappa l^\varkappa$, характеризующего собственные векторы, умножая систему (3) на собственный вектор $l^\varkappa$, мы получаем систему уравнений в характеристической форме

$$l^\varkappa D^\varkappa u+l^\varkappa B=0 \tag{3'}$$

или, короче,

$$lDu+lB=0,$$

где $D^\varkappa$ — дифференциальный оператор $D^\varkappa=\partial/\partial t+\tau^\varkappa(\partial/\partial x)$. Оператор $D^\varkappa$ можно рассматривать как дифференцирование d/dt вдоль кривой $C_\varkappa$.

В соответствии с нашими предположениями мы будем считать, что собственные значения $\tau^\varkappa$ и собственные векторы $l^\varkappa$ являются функциями x и t с непрерывными первыми производными.

Иногда мы будем опускать явное указание на определенную характеристику и будем вместо $D^\varkappa$ и $l^\varkappa$ писать D, l. Отметим также полезную формулу $D(ab)=aD(b)+bD(a)$, справедливую для произвольной пары функций a, b.

Вид (3′) системы уравнений наводит на мысль о том, чтобы ввести новые неизвестные функции $U^\varkappa=l^\varkappa u$, или, коротко, $U=\Lambda u$ или $U=lu$. Так как $lD(u)=D(lu)-uDl$, система уравнений принимает вид

$$DU=-lB-(Dl)u=-b-(Dl)u. \tag{3''}$$

Поскольку u можно выразить через U с помощью соотношения $u = \Lambda' U$, где Λ' — матрица, обратная Λ, то систему (3″) всегда можно записать как

$$DU = F(x,\ t;\ U), \tag{3‴}$$

где правая часть — непрерывная вектор-функция от переменных x, t, U, обладающая непрерывными производными по переменным U. Конечно, через D здесь обозначена диагональная матрица с компонентами $D_\varkappa$.

Заметим, что начальные значения $\varphi(x)$ функции u переходят в начальные значения $\Psi(x)$ для U, заданные при $t = 0$, причем $\Psi(x,\ t) = \Lambda\varphi$. Наши предположения обеспечивают эквивалентность задачи Коши для u и U.

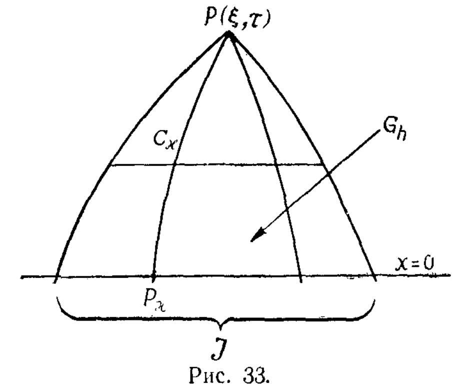


Рис. 33.

Рассмотрим на плоскости x, t замкнутую область G, такую, что все характеристики $C_\varkappa$, проведенные из точки P в область G в направлении, обратном по отношению к возрастанию значения t, пересекают заданный отрезок $\mathcal{J}$ оси x в точках $P_\varkappa$ с координатами $x_\varkappa = x(0;\ \xi,\ \tau)$, так что отрезок $\mathcal{J}$ содержит область зависимости для всех точек P области G. Полоса $0 < t < h$ области G обозначается G_h (см. рис. 33).

В п. 3 мы получим следующий результат. *Задача Коши* с начальными значениями φ на отрезке $\mathcal{J}$ *имеет единственное решение и с непрерывными производными в полосе* G_h при достаточно малых h.

Из доказанного в § 4 следует, что решение определяется однозначно. Мы увидим также, что *решение можно распространить на всю область* G, *если только коэффициенты сохраняют свою гладкость*. Кроме того, если A и B имеют непрерывные производные до порядка n включительно, то решение u также имеет производные этих порядков. Наконец, если коэффициенты и начальные данные φ зависят от некоторого параметра, по которому они непрерывны и дифференцируемы, то такими же свойствами обладает и решение.

3. Построение решения. Чтобы построить решение системы, записанной в виде (3‴), принимающее начальные значения $\Psi(x)$, мы заменим U в правой части вектор-функцией $V = \Lambda v$ и рассмотрим множество, или „пространство“, S функций, определенных в области G, обладающих непрерывными производными и принимающих начальные

значения $\Psi(x)$. Интегрирование уравнений (3″) или (3‴) вдоль характеристик $C_\varkappa$ от $P_\varkappa$ до P подсказывает, что надо исследовать интегральное преобразование

$$W^\varkappa(\xi, \tau) = \Psi(x_\varkappa) + \int_0^\tau F^\varkappa(x, t; V)\,dt =$$
$$= \Psi^\varkappa(x_\varkappa) - \int_0^\tau \left(b^\varkappa(x, t, V) + \left(D^\varkappa l^\varkappa\right)v\right)dt, \qquad (4)$$

где в $F^\varkappa(x, t, V(x, t))$ вместо x подставлена функция $x^\varkappa(t)$. Символически это преобразование можно записать в виде

$$W = TV;$$

оно переводит функцию V пространства S в функцию W, принимающую те же начальные значения. Мы ищем решение задачи Коши как элемент, не изменяющийся при этом преобразовании.

При преобразовании T каждая компонента вектора $W(\xi, \tau)$ в точке P выражается как соответствующий интеграл по характеристике $C_\varkappa$; это значит, что в $F^\varkappa(x, t, V(x, t))$ мы должны заменить x на $x_\varkappa(t; \xi, \tau)$ и затем просто проинтегрировать по t от 0 до τ.

Для достаточно узкой полоски G_h искомый неподвижный элемент можно найти с помощью итераций, т. е. как равномерный предел при $n \to \infty$ последовательности

$$U_{n+1} = TU_n,$$

причем начинать можно с любой допустимой функции $U_0 = \Psi(x, t)$, принимающей начальные значения $\Psi(x)$.

С этой целью мы используем *максимум-норму* $\|f\|$, или $\|f\|_0$, для непрерывной вектор-функции f, равную наибольшему значению, которое в замкнутой области G принимают модули компонент f. Мы положим $N = \|\Psi(x, t)\|$ и ограничим множество допустимых функций из S такими, для которых $\|V\| < 2N$. Для этих допустимых функций существует общая верхняя граница, т. е. такое число μ, что в G, а тем более в G_h

$$\|F^\varkappa\| < \mu, \quad \|F^\varkappa_V\| < \mu, \quad \|F^\varkappa_x\| < \mu, \quad \|F^\varkappa_t\| < \mu,$$

где F_V обозначает градиент функции F по переменным V. Мы можем также предполагать, что величина μ ограничивает абсолютные величины подинтегральных функций в формуле (4).

Тогда, если h выбрано достаточно малым, преобразование T переводит допустимую функцию V в допустимую функцию W. Действительно, заметим, что из формулы (4) следует, что $\|W\| \leqslant N + h\mu$; поэтому, если мы выберем h так, что $h\mu < N$, то $\|W\| \leqslant 2N$. В том, что W имеет непрерывные производные, мы сейчас убедимся

Чтобы доказать равномерную сходимость последовательных приближений U_n, мы рассмотрим разности $Z_n = U_{n+1} - U_n$, для которых в силу (4) справедливы равенства

$$Z_n^{\varkappa}(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} \left(F^{\varkappa}(x, t, U_{n+1}) - F^{\varkappa}(x, t, U_n)\right) dt \qquad (x = x_{\varkappa}(t; \xi, \tau)).$$

Так как функция $F(x, t, V)$ имеет непрерывные производные по V, мы можем применить теорему о конечных приращениях и для некоторых промежуточных значений $\tilde{U}$ получить соотношение

$$Z_n^{\varkappa}(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} F_U^{\varkappa}(x, t; \tilde{U}^{\varkappa}) Z_{n-1}(x, t)\, dt.$$

Так как $\|F_u^{\varkappa}\| < \mu$, мы сразу же, как и раньше, видим, что

$$\|Z_n\| < hk\mu \|Z_{n-1}\|.$$

Поэтому, выбирая h достаточно малым и таким, чтобы $hk\mu = \theta < 1$, например, $\theta = 1/2$, мы получим, что

$$\|Z_n\| \leqslant \theta \|Z_{n-1}\|.$$

Тогда мы можем утверждать, что преобразование T является *сжимающим относительно данной нормы* и Z_n равномерно стремятся к нулю в области G_h при $n \to \infty$; следовательно, функции U_n равномерно сходятся в G_h к некоторой непрерывной функции U. Предельный вектор U, принимающий, очевидно, начальные значения $\Psi(x)$, является неподвижным элементом преобразования T и решением системы интегральных уравнений $U = TU$. Так как применение к содержащимся в этой системе интегралам дифференцирования по направлению $D^{\varkappa}$ дает подинтегральную функцию, то U является также решением нашей системы дифференциальных уравнений, записанной в характеристической нормальной форме (3‴)[1]).

Однако из существования производных по направлениям непосредственно еще не следует существование и непрерывность производных U_x, U_t для предельной функции U. То, что эти производные существуют и непрерывны, будет доказано ниже, а именно, будет установлено, что производные U_n равномерно сходятся, если равномерно сходятся сами функции U_n. Тогда, согласно элементарным теоремам анализа, предельные функции для производных будут производными предельной функции U.

Мы можем ограничиться случаем производной по x (или по ξ), так как производную по t можно тогда выразить через известную

[1]) Приведенное выше рассуждение показывает, что решение единственно. Действительно, в силу того, что преобразование T является сжимающим, разность двух решений тождественно равна нулю.

производную по направлению D^{x}. При дифференцировании формул (4) по ξ под знаком интеграла член $(Dl)v$ дал бы вторые производные от собственных векторов l, в то время как мы предполагали лишь существование первых производных. Мы легко можем обойти эту трудность, предположив сначала, что существуют непрерывные вторые производные, а затем, после дифференцирования, избавиться от этого предположения с помощью предельного перехода. Однако мы могли бы применить следующий более прямой прием (предложенный П. Унгаром) дифференцирования по ξ интеграла вида $K(\xi) = \int\limits_0^\tau P(t, \xi) DQ(t, \xi)\, dt$, где D обозначает дифференцирование по переменной t (в нашем случае дифференцирование вдоль характеристики). Вместо $K(\xi)$ мы рассмотрим функцию двух параметров α и β:

$$H(\alpha, \beta) = \int\limits_0^\tau P(t, \alpha) DQ(t, \beta)\, dt,$$

так что $K(\xi) = H(\xi, \xi)$, а $K_\xi = H_\alpha + H_\beta$ для $\alpha = \beta = \xi$. Тогда член H_α получается с помощью прямого дифференцирования под знаком интеграла:

$$H_\alpha = \int\limits_0^\tau P_\alpha(t, \alpha) DQ(t, \beta)\, dt.$$

Чтобы получить выражение для второго члена, мы сначала проинтегрируем по частям, а затем уже продифференцируем по β; наконец, мы снова положим $\alpha = \beta = \xi$. Складывая результаты этих операций, мы получаем

$$K_\xi = \int\limits_0^\tau [P_\xi(t, \xi) DQ(t, \xi) - DP(t, \xi) Q_\xi(t, \xi)]\, dt + \\ + P(\tau, \xi) Q_\xi(\tau, \xi) - P(0, \xi) Q_\xi(0, \xi).$$

Эта формула позволяет нам непосредственно дифференцировать интеграл от $vD(l)$. Комбинируя различные выражения и сокращая граничные члены, мы можем, наконец, записать выражение $W = TV$ в виде

$$W_\xi(\xi, \tau) = -\int\limits_0^\tau x_\xi [b_x + b_V V_x + l_x Dv - v_x Dl]\, dt + \\ + l_x v\,|_{t=\tau} - l_x \psi'\,|_{t=0}. \tag{5}$$

Независимо от того, выражаем ли мы v под знаком интеграла через V или нет, эта формула представляет производную W_ξ через функцию V и ее первые производные, не включая вторых производных от l.

Она показывает, что функция W имеет непрерывные первые производные. Кроме того, формула (5) указывает на следующий факт: производные функции W ограничены, если ограничены $\|V\|$ и $\|V\|_1$; здесь $\|V\|_1$ есть *максимум-норма первого порядка*, т. е. наибольшее значение, которое в нашей области принимают функции $|V_x^{\varkappa}|$ или $|V_t^{\varkappa}|$ [1]).

Точнее, если задана оценка M для $\|V\|$, то можно определить величину M_1, ограничивающую $\|V\|_1$, так что для достаточно малых h величины $\|W\|$ и $\|W\|_1$ ограничены соответственно величинами M и M_1.

Более того, так же как и выше, можно сделать следующий вывод: для достаточно малых h преобразование TV является сжимающим также и для первых производных. Поэтому не только функции U_n, но и первые производные последовательных приближений U_n равномерно сходятся в достаточно узкой полосе G_h. Соответствующие пределы должны быть производными предельной функции U. Поэтому функция U является решением задачи Коши.

Можно добавить следующее замечание: из формулы (5) легко следует, что некоторый „модуль непрерывности" для функции V_ξ становится также модулем непрерывности для W_ξ. В частности, если V_ξ (или V_τ) удовлетворяют условию Липшица с постоянной Липшица σ, т. е. если разностные отношения равномерно ограничены величиной σ, то аналогичное утверждение будет справедливо для производных функции TV.

Следовательно, производные последовательных приближений равностепенно непрерывны. По теореме Арцела они образуют в этом случае компактное множество, так как они равномерно ограничены, и в силу теоремы единственности могут иметь только один предельный элемент. Таким образом получается несколько иной вариант доказательства.

Наконец, мы сделаем важное замечание, которое будет использовано в § 7: даже если на каждом шаге преобразование (5) $T = T_n$ изменяется, равностепенная непрерывность производных и условие Липшица сохраняются при применении преобразования T до тех пор, пока члены $D^{\varkappa} l^{\varkappa}$ остаются равномерно ограниченными.

Кроме того, предыдущие рассуждения можно без изменения распространить на старшие производные. Если начальные данные и коэффициенты дифференциального уравнения имеют непрерывные производные до порядка n, то решение будет иметь такую же гладкость. Мы будем говорить, что свойства гладкости функции *и продолжимы*, т. е. дифференцируемость любого порядка сохраняется

---

[1]) Норму $\|V\|_1$ можно было бы определить и несколько иначе, а именно как максимум величин $|V^{\varkappa}|$, $|V_x^{\varkappa}|$, $|V_t^{\varkappa}|$, где $1 \leqslant \varkappa \leqslant k$.

при переходе от $t=0$ к $t=h$. В гл. VI, § 10, мы изучим роль, которую играет понятие *продолжимых начальных условий*.

Теорема, сформулированная в начале п. 2, справедлива в более широкой области. Чтобы доказать это, мы возьмем прямую $t=h$ за новую начальную прямую, а значение функции $U(x, h)$ за новые начальные данные и будем решать ту же самую задачу в полосе $h \leqslant t \leqslant 2h$. Этот процесс мы будем продолжать шаг за шагом и таким образом получим решение для произвольно больших t, если только при этом будут сохраняться предположения о непрерывности и ограниченности.

4. Замечания. Зависимость решений от параметров. Легко установить важное следствие оценок, которые применяются для доказательства сходимости в методе последовательных приближений: если коэффициенты дифференциального оператора или начальные данные φ непрерывным образом зависят от параметра ε и имеют по ε непрерывные производные до порядка s, то аналогичное утверждение справедливо относительно характера зависимости функции u от ε.

В заключение следует отметить, что, применяя описанное выше построение к начальным значениям $\psi(x)$, мы получим обобщенное решение, даже если функция ψ имеет разрывы, например скачок в некоторой точке (пусть это будет точка $x=0$).

Такие разрывы распространяются от начальной точки разрыва P^* вдоль каждой из характеристик, выходящих из P^*. Подробный анализ таких разрывных решений в более общем виде будет дан в гл. VI, § 4,

5. Смешанные начальные и граничные задачи [1]. Многие интересные физические явления происходят в части пространства, ограниченной подвижной или неподвижной границей. Эти границы математически выражаются с помощью соотношений между переменными, описывающими физическую систему. Укажем несколько примеров таких граничных условий.

а) Нормальная компонента скорости идеальной жидкости около подвижной стенки должна быть равной нормальной компоненте скорости стенки.

б) Смещение колеблющейся струны, закрепленной в конечных точках, должно быть равным нулю в этих конечных точках.

в) Нормальная компонента градиента амплитуды звуковых волн у идеально отражающей стенки должна равняться нулю.

Мы предположим, что система рассматривается только на положительной полуоси x, $x \geqslant 0$, и постараемся решить линейную или почти линейную систему в характеристической нормальной форме (3''):

---

[1]) См. также приложение 2 к этой главе, а также гл. VI, § 8, п. 4.

$D^\varkappa u^\varkappa = F^\varkappa(x, t, u^1, \ldots, u^k)$; решение мы будем строить в малой области, примыкающей к положительной полуоси x, $x > 0$ и к полуоси $t > 0$. Условия, заданные на осях x и t, должны определять корректно поставленную смешанную задачу.

Мы предположим, что r — число положительных собственных значений τ:

$$\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_r > 0,$$

а $\tau_{r+1}, \ldots, \tau_k$ — отрицательны. Согласно нашим предположениям, ни одно из собственных значений не должно обращаться в нуль. Другими словами, r есть число характеристик, проходящих через начало координат O, идущих вверх, в первый квадрант плоскости x, t.

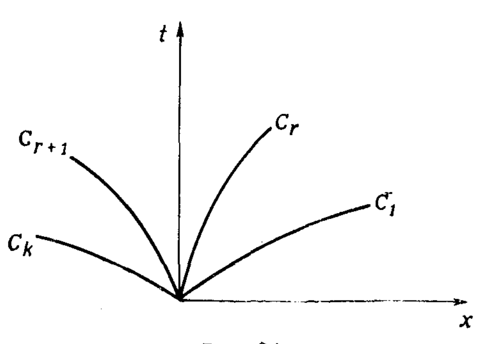


Рис. 34.

Тогда первые r характеристик, проходящие через точку, достаточно близкую к O $(t > 0)$, также идут в первый квадрант. Кроме того, мы будем считать, что характеристики не пересекают друг друга. Тогда характеристика C_r, проведенная через точку O, разделяет квадрант, примыкающий к этой точке, на две области. При этом все r характеристик, проведенные через точку P в области слева от C_r в направлении убывающих значений t, пересекают положительную часть оси t, если мы будем рассматривать достаточно малую область, примыкающую к точке O (рис. 34).

На положительной полуоси x мы зададим начальные данные Коши, т. е. k значений $u(x, 0) = \psi(x)$. В дополнение к этим данным Коши, заданным при $x > 0$, мы при $x = 0$ зададим r граничных условий

$$u^\rho = \chi^\rho(t) \tag{8}$$

с известными функциями $\chi^\rho(t)$, $\rho \leqslant r$, или, в более общем виде,

$$u^\rho - \sum_{j=r+1}^{k} m^{j,\rho} u^j = \chi^\rho(t) \qquad (\rho = 1, \ldots, r). \tag{9}$$

Здесь $(k-r)r$ величин $m^{j,\rho}$ известны и могут быть выбраны так, что

$$\sum_{j=r+1}^{k} |m^{j,\rho}| < 1. \tag{10}$$

Из условий (9) ясно, что r функций $u^1, \ldots, u^r$ можно линейно выразить через остальные функции $u^{r+1}, \ldots, u^k$. Условие (10) нужно лишь для того, чтобы технически упростить приводимое ниже доказательство сходимости. Ему всегда можно удовлетворить, если вместо функций $u^{r+1}, \ldots, u^k$ ввести новые зависимые переменные $\mu u^{r+1}, \ldots, \mu u^k$ с достаточно большим положительным множителем μ.

Наконец, мы заметим следующее: вдоль характеристик, проходящих через точку O, решение будет иметь разрывы, если значения функций u при $x=0$, $t=0$ в точке O не удовлетворяют некоторым „условиям согласования". В частности, согласование нулевого порядка, т. е. непрерывность функций u, заключается в выполнении условий

$$\chi^\rho(0) + \sum_{j=r+1}^{k} m^{j,\rho}\psi^j(0) = \psi^\rho(0) \qquad (\rho = 1, \ldots, r).$$

Аналогичные условия для непрерывности производных получаются с помощью дифференцирования.

Мы утверждаем, что при заданных условиях *дифференциальное уравнение* (3) *имеет единственное решение в квадранте* $0 \leqslant x$, $0 \leqslant t$. Если коэффициенты дифференциального уравнения и начальные и граничные данные имеют непрерывные производные порядка s и если данные задачи удовлетворяют условиям согласования порядка s, то решение имеет непрерывные производные до порядка s включительно. Если условия согласования выполняются только до порядка p, то производные решения порядка выше p имеют разрывы на характеристиках $C_1, \ldots, C_r$, исходящих из начала координат.

Построение решений с помощью итераций происходит почти точно так же, как в п. 3. Снова обозначим через $P_\varkappa$ пересечение характеристик $C_\varkappa$ с прямой $t=0$ или $x=0$; в очевидных обозначениях мы имеем

$$u^\varkappa(P) = u^\varkappa(P_\varkappa) + \int_{P_\varkappa}^{P} F^\varkappa(x, t, u^1, \ldots, u^k)\,dt. \tag{11}$$

Если точка $P_\varkappa$ лежит на оси t, что может случиться только при $k \leqslant r$, мы подставим вместо величины $u^\varkappa(P_\varkappa)$ ее значение из формулы (9), а если $P_\varkappa$ лежит на оси x, то мы подставим начальные данные $\psi^\varkappa(P_\varkappa)$. Затем мы так же, как и раньше, введем интегральное преобразование

$$v_{n+1} = Tv_n,$$

приняв за Tu правую часть формулы (11). Чтобы доказать сходимость последовательности $\{v_n\}$, мы опять рассмотрим ряд, составленный из разностей $w_{n+1} = v_{n+1} - v_n$. Если точка $P_\varkappa$ лежит на оси t, мы имеем рекуррентные соотношения

$$w^\varkappa_{n+1} = \sum_{i=r+1}^{k} m^{i,\,\varkappa} w^i_n - \int_{P_\varkappa}^{P} \sum_{i=1}^{k} b^{\varkappa i} w^i_n \, dt.$$

То, что преобразование, переводящее w_n в w_{n+1}, является сжимающим, как в максимум-норме, так и в максимум-норме s-го порядка, для достаточно малой полоски устанавливается так же, как в п. 3. Таким образом, решение снова получается как неподвижный элемент преобразования T.

Если физическая система ограничена двумя стенками, а не одной, например линиями $x = 0$ и $x = a$, то на линии $x = a$ надо задавать граничные условия в соответствии с теми же принципами. Другими словами, мы должны задавать столько граничных условий, сколько характеристик из точки $(a, 0)$ входит в нашу область, причем эти условия должны удовлетворять условиям согласования и линейной независимости, аналогичным тем условиям, которые раньше ставились при $x = 0$. Тогда мы получаем единственное решение в полуполосе.

Область, изменяющаяся с течением времени, математически описывается следующим образом: задается ее положение в момент $t = 0$ — некоторый отрезок (a, b) на оси x, и задается движение ее концов с помощью двух кривых, исходящих из концов отрезка a и b в направлении положительных значений t. Если эти кривые достаточно гладкие, то задача для такой области может быть заменой независимых переменных сведена к той задаче, которая рассматривалась выше.

До сих пор мы предполагали, что граничные кривые нигде не имеют характеристического направления; но тот же самый метод построения решений можно применять и в случае, когда одна из граничных кривых (или обе) характеристическая. Число условий, которые надо здесь задать, равно числу характеристик, входящих в рассматриваемую область, *не считая* самой граничной кривой. Это согласуется с замечаниями, касающимися характеристической задачи Коши (см. п. 1).

Примеры. 1) Движение натянутой струны в плоскости подчиняется уравнению

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad (12)$$

где u обозначает смещение струны, а c — постоянная, зависящая от плотности и натяжения струны. Задаются начальное положение и

скорость струны (данные Коши), а концы струны $(a, 0)$ и $(b, 0)$ фиксированы, т. е. граничные условия имеют вид

$$u(a, t)=u(b, t)=0.$$

Сведем уравнение второго порядка (12) к системе первого порядка, имеющей диагональный вид, введя новые неизвестные функции $v=cu_x+u_t$, $w=cu_x-u_t$. Тогда мы имеем

$$v_t-cv_x=0,$$
$$w_t+cw_x=0.$$

Характеристические скорости здесь равны $\pm c$. Рассматриваемой областью является полуполоса $a\leqslant x\leqslant b$, $t\geqslant 0$; из каждого угла в эту область входит ровно одна характеристика. Поэтому $r=1$ для обеих граничных прямых. Следовательно, мы имеем на каждой границе одно граничное условие:

$$v(a, t)-w(a, t)=v(b, t)-w(b, t)=0.$$

Кроме того, легко проверить, что в этом случае выполняется условие линейной независимости.

2) Движение сжимаемого газа в трубке, закрытой подвижными поршнями, можно описать, зная скорость потока u и плотность ρ. Уравнение неразрывности и уравнение сохранения количества движения имеют вид

$$\rho_t+u\rho_x+\rho u_x=0$$

и

$$u_t+uu_x+\frac{1}{\rho}p_x=0.$$

Здесь p обозначает давление; уравнение состояния газа задает p как известную[1]) (и монотонно возрастающую) функцию ρ.

Эти уравнения нелинейные. Теория задачи Коши для таких уравнений во многом аналогична теории для линейного случая; она будет рассматриваться в следующем параграфе. Аналогия переходит также на теорию смешанных начальных и граничных задач, как показывает данный ниже пример. Конечно, для нелинейных систем надо учитывать тот факт, что все утверждения будут справедливы только для достаточно малых областей.

В начальный момент u и ρ задаются как известные функции x $(a<x<b)$. На кривых $x=a(t)$ и $x=b(t)$, соответствующих положению поршней, замыкающих трубку, мы требуем, чтобы скорость потока была равна скорости поршня:

$$u(a(t), t)=\frac{da}{dt},$$
$$u(b(t), t)=\frac{db}{dt}.$$

[1]) Тем самым мы, как и в § 3, п. 1, предполагаем, что поток изэнтропический.

Характеристические скорости равны $u+c$ и $u-c$, где $c^2=dp/d\rho$. Рассматриваемая область имеет вид $a(t)\leqslant x\leqslant b(t)$, $t\geqslant 0$. Здесь снова $r=1$ на обеих границах, т. е. на каждой границе задано одно условие.

В теории, построенной для линейного случая, число условий должно было быть равным числу характеристик, входящих в область. Аналогичное условие должно выполняться для нелинейного случая. В нашем примере это условие действительно выполняется, как легко видеть непосредственно.

§ 7. Задача Коши для квазилинейных систем

Мы рассмотрим теперь строго квазилинейную систему

$$u_t+A(x,\ t;\ u)\,u_x+B(x,\ t;\ u)=0 \tag{1}$$

и вкратце укажем, как на основании результатов § 6 можно для нее решить задачу Коши с помощью слегка измененного итерационного процесса. Результат получается точно такой же, как для линейных или почти линейных систем. В частности, если коэффициенты A, B и начальные значения $\psi(x)$ имеют первые производные по x, t, u, удовлетворяющие условию Липшица, то в некоторой окрестности $0\leqslant t\leqslant h$ отрезка $\mathcal{J}$ оси x существует единственное решение, имеющее производные, удовлетворяющие условию Липшица, если только система гиперболическая для заданных начальных значений $u(x,\ 0)=\psi(x)$; как и раньше, гиперболичность означает, что существует k линейно независимых левых собственных векторов $(l^1,\ \ldots,\ l^k)$. Мы можем предполагать, что они нормированы таким образом, чтобы составленная из них матрица Λ имела определитель, равный 1. Характеристики $C_\varkappa$, собственные значения $\tau^\varkappa$ и собственные векторы зависят теперь от конкретных функций u. Мы будем рассматривать функции v (не обязательно решения) с заданными начальными значениями $v(x,\ 0)=\psi(x)$, причем первые производные удовлетворяют условию Липшица, а сами функции подчиняются неравенствам

$$\|v\|\leqslant M,\quad \|v\|_1\leqslant M_1$$

с фиксированными M и M_1. Мы предположим, что матрица $A(x,\ t;\ v)$ имеет k действительных собственных значений $\tau^\varkappa(x,\ t;\ v)$, короче $\tau(v)$, и что существует матрица $\Lambda(v)$, составленная из линейно независимых собственных векторов $l^\varkappa$, первые производные которых по всем аргументам существуют[1]) и удовлетворяют условию Липшица; все эти условия должны выполняться в фиксированной обла-

---

[1]) Для случая различных собственных значений эти свойства собственных элементов следуют из предположений относительно матрицы A.

сти G_n, которую мы сейчас опишем, взяв за v любую „допустимую" функцию, удовлетворяющую указанным выше условиям. Решения обыкновенных дифференциальных уравнений $dx/dt = \tau^\varkappa$ называются характеристиками $C^\varkappa$ поля v. Наклоны характеристик для допустимых функций равномерно ограничены: $|\tau^\varkappa| < \mu$; мы определим теперь замкнутую область G и в ней полоску G_h: область G состоит из таких точек, что проведенные через них v-характеристики $C^\varkappa$ в направлении к прямой $t = 0$ остаются в области G и пересекают часть $\mathcal{J}$ оси x. Множество или „пространство" всех функций v снова обозначается через S_h. Собственные векторы l и собственные значения, а также их первые производные зависят от переменных x, t и v и удовлетворяют условию Липшица. Как и раньше, мы определим дифференциальные операторы вдоль характеристик в поле v формулой $D = \partial/\partial t + \tau\partial/\partial x$.

Теперь мы введем естественный итерационный процесс. (Сравните с гл. IV, § 7, где дана аналогичная схема для эллиптических уравнений, и с гл. VI, § 10, п. 5 — для гиперболических уравнений с числом независимых переменных, большим чем два.)

Чтобы допустить достаточную свободу выбора функций v, мы можем положить $M = N + 1$, считая, что $\|\psi(x)\| < N$. Тогда, подставляя в A и B допустимую функцию $v(x, t)$, мы получим из уравнения (1) линейное уравнение, так же как это было в § 6. Найдем решение u задачи Коши с заданными начальными значениями $u(x, 0) = \psi(x)$ и положим $u = Tv$. Тогда мы получим решение уравнения (1) как неподвижный элемент преобразования T; в частности, его можно получить как предел при $n \to \infty$ равномерно сходящейся последовательности $Tu_n = u_{n+1}$, с $u_0 = \psi(x)$, где $T = T_n$ зависит от n.

Решение строится следующим образом (см. Курант [1]). Сначала мы так же, как и в § 6, получаем преобразование $u = Tv$, вводя новые функции с помощью равенств $U = \Lambda u$, $V = \Lambda v$, $\Psi = \Lambda\psi$ и т. д. Затем в основных формулах (5) и (6), § 6 мы должны только заметить, что при дифференцировании по x надо учитывать зависимость $l, \ldots$ от v; т. е. мы должны считать, что $(d/dx)\,l = l_x + l_v v_x, \ldots$ вводя, таким образом, производные от v. Это непосредственным образом приводит к следующей лемме: для $M = N + 1$ мы можем выбрать достаточно большое M_1 и достаточно малое h так, что *любая функция* v *из* S_h *переходит в функцию* $w = Tv$ *также из* S_h.

Кроме того, последовательные приближения u_n равномерно сходятся в области G_h к некоторой предельной функции u. Эта функция определяется однозначно и, очевидно, удовлетворяет дифференциальному уравнению, записанному в характеристической форме $lDu + lB = 0$. То, что преобразование является сжимающим, а также единственность функции u устанавливается, как и в § 6, с помощью оценки разности $z = u - u^*$ двух допустимых функций $u = Tv$ и

$u^* = Tv^*$, где $\zeta = v - v^*$; для z справедливо дифференциальное уравнение

$$z_t + A(v) z_x + (A(v) - A(v^*)) z_x^* + B(v) - B(v^*) = 0.$$

Применяя теорему о конечных приращениях и ссылаясь на формулу (4) из § 6, мы получаем

$$z_t + A(v) z_x + \zeta K = 0,$$

где K — ограниченная функция от x, t, и, как в § 6, устанавливаем неравенство вида

$$\|z\| < M_3 hk \|\zeta\|.$$

При достаточно малых h мы можем добиться того, чтобы было $\|z\| \leqslant \frac{1}{2}\|\zeta\|$, и следовательно, чтобы преобразование T было сжимающим, поэтому функции u_n в области G_h равномерно сходятся к некоторой функции u.

Чтобы показать, что функция u имеет производные, удовлетворяющие условию Липшица, и является решением уравнения (1) в строгом смысле, мы сошлемся на замечания в конце § 6. Из формулы (5), § 6 можно установить, что преобразование Tv сохраняет условие Липшица для производных. Поэтому первые производные последовательных приближений u_n равностепенно непрерывны, образуют компактное множество и предельная функция имеет, как и утверждалось, производные, удовлетворяющие условию Липшица.

Приведем несколько иное рассуждение, которое также можно было использовать. Сначала мы аппроксимируем функции A, B и ψ соответствующим образом подобранными функциями с непрерывными и ограниченными вторыми производными. Тогда соответствующие решения u_n будут иметь равномерно ограниченные вторые производные. Максимум модуля вторых производных после предельного перехода станет просто константой Липшица для первых производных функции u. Во всяком случае, для нелинейных систем получается такой же результат, как и для линейных.

Между прочим, нетрудно заменить предположение о выполнении условия Липшица предположением о том, что имеется любой заданный (вогнутый) модуль непрерывности (А. Дуглис [1]).

§ 8. *Задача Коши для одного гиперболического дифференциального уравнения высшего порядка*

Одно дифференциальное уравнение высшего порядка заслуживает отдельного рассмотрения, так как оно имеет ряд черт, отличающих его от систем первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение порядка k относительно одной функции $u(x, t)$ записывалось уже раньше в символической форме

$$L[u] \equiv (P^k + P^{k-1} + \ldots + P^0)\, u + f = 0, \tag{1}$$

где

$$P^{\varkappa} = P^{\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = a_0^{\varkappa} \frac{\partial^{\varkappa}}{\partial t^{\varkappa}} + a_1^{\varkappa} \frac{\partial^{\varkappa}}{\partial t^{\varkappa-1}\,\partial x} + \ldots + a_k^{\varkappa} \frac{\partial^{\varkappa}}{\partial x^{\varkappa}} \tag{1a}$$

$$(\varkappa = 0, 1, \ldots, k)$$

— однородный многочлен степени $\varkappa$ относительно производных $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$ с коэффициентами $a_i^{\varkappa}$, зависящими от x и t.

Задача Коши с начальной линией $t = 0$ состоит в том, чтобы найти решение u уравнения (1), если на прямой $t = 0$ заданы значения u и его частных производных $u_t, u_{tt}, \ldots, u_{t^{k-1}}$. Без существенного ограничения общности мы предположим, что данные Коши равны нулю, так что функция u и ее производные до порядка $k-1$ включительно тождественно равны нулю при $t = 0$.

Мы предположим, что в рассматриваемой области $t \geqslant 0$ уравнение (1) гиперболично [1]) в том смысле, что в каждой точке существует k различных характеристических направлений (см. § 2) с различными характеристическими дифференциальными операторами

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Как и в § 1, коэффициенты $\tau_i = -\varphi_t^i/\varphi_x^i$ соответствуют семействам характеристик $\varphi^i(t, x) = \mathrm{const}$, которые удовлетворяют характеристическому уравнению

$$P^k(\varphi_t, \varphi_x) = 0.$$

Мы предположим, что линии $t = \mathrm{const}$ не являются характеристиками, т. е. что $\varphi_x \neq 0$ и $a_0^k \neq 0$. Разделив характеристическое уравнение на a_0^k, мы можем заменить a_0^k на 1, а характеристическое уравнение на уравнение

$$P^k(\tau, -1) = 0.$$

---

[1]) Для постоянных коэффициентов более широкое определение гиперболичности было дано Гордингом [2]; оно включает некоторые уравнения с действительными кратными характеристиками. Некоторые из методов этого параграфа применимы и к таким уравнениям. Заметим, что столь общие определения позволяют получить эффективные критерии корректности постановки задачи Коши. [Определение гиперболичности для общих нелинейных систем уравнений с любым числом независимых переменных впервые было дано И. Г. Петровским в работе [5]. — *Прим. ред.*]

В этом параграфе мы укажем несколько методов решения задачи Коши для уравнения (1) в гиперболическом случае. Мы рассмотрим даже более общий случай, когда задача Коши разрешима, хотя уравнение может иметь кратные характеристики.

1. Сведение к характеристической системе первого порядка. Задачу Коши для уравнения (1) можно свести к задаче Коши для линейной системы первого порядка в диагональной форме.

Сначала мы произведем это сведение, вводя в качестве новых неизвестных функций производные функции u (как мы делали и раньше). Система первого порядка, которая получается в результате, будет иметь те же k различных характеристик, что и уравнение (1), и, кроме того, линии $x = \text{const}$ будут тривиальными кратными характеристиками. Эту систему можно привести к диагональной нормальной форме, рассмотренной в § 6, п. 2. В пункте 3 мы рассмотрим более изящные и общие способы приведения к диагональной нормальной форме.

Мы будем писать a_i вместо a_i^k и положим $a_0 = 1$; уравнение (1) можно заменить системой дифференциальных уравнений с $\frac{1}{2}k(k-1)$ неизвестными функциями

$$p^{i,j}(x, t) \qquad (i+j \leqslant k-1);$$

эти функции отождествляются с производными $\partial^{i+j}u/\partial t^i\,\partial x^j$. Основное уравнение имеет вид

$$p_t^{k-1,0} + \left(a_1 p_x^{k-1,0} + a_2 p_x^{k-2,1} + \ldots + a_k p_x^{0,k-1}\right) + H = 0. \qquad (2)$$

Здесь все k-е производные, которые были в уравнении (1a), кроме k-х производных по t, заменены производными по x от величин $p^{i,j}$ для $i+j = k-1$. Величина H есть линейное выражение относительно $p^{i,j}$, $i+j < k-1$, и не содержит производных. К уравнению (2) добавляются еще уравнения

$$p_t^{i,j} - p^{i+1,j} = 0 \quad \text{для} \quad i+j = 0, 1, \ldots, k-2, \qquad (2')$$

$$p_t^{i,j} - p_x^{i+1,j-1} = 0 \quad \text{для} \quad i+j = k-1,\ i \neq k-1. \qquad (2'')$$

В качестве начальных данных мы берем те, которые уже даны или получаются из исходных данных Коши, т. е. при $t = 0$ мы полагаем функции $p^{i,0}$ равными $\partial^i u(x, t)/\partial t^i$, $i = 0, \ldots, k-1$. Тогда из уравнений (2′) и (2″) следует, что начальные данные для $p^{i,j}$ равны нулю и, кроме того, что всюду $p^{i,j} = \partial^{i+j}\left(p^{0,0}\right)/\partial t^i\,\partial x^j$; $i+j < k$.

Теперь мы обозначим через $U(x, t)$ вектор-столбец с компонентами $p^{i,j}$, упорядоченными в порядке убывания $i+j$ и возраста-

ния j, как в формулах (2), (2') и (2''). Тогда наша система примет вид

$$U_t + AU_x + BU + c = 0, \tag{2'''}$$

где матрица A такова:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & 0 \dots 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{Vmatrix};$$

легко найти вид характеристического уравнения $\|I\tau + A\| = 0$, а именно:

$$\|I\tau + A\| = \tau^N P^k(-\tau, 1) = 0,$$

где $N = \frac{1}{2} k(k-1)$. Множитель τ^N соответствует тривиальным кратным характеристикам $x = \text{const}$ нашей системы.

Таким образом, система (2''') принадлежит классу, рассмотренному в § 6, п. 2.

Следовательно, задача Коши с указанными выше данными имеет единственное решение, которое одновременно является решением исходной задачи для уравнения (1).

2. Представление оператора $L[u]$ через характеристики. Более общий метод решения задачи Коши для гиперболического уравнения (1) основан на представлении оператора $L[u]$ через производные по направлению характеристик.

Предварительно мы рассмотрим r производных по направлениям, не обязательно характеристическим, но различным:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x} \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

где $\tau_i \neq \tau_j$ для $i \neq j$. Функции $\tau_i(x, t)$ предполагаются достаточно гладкими. Тогда легко устанавливаются следующие леммы:

Лемма А. $\quad D_i(\alpha D_j) = \alpha D_i D_j + \beta D_j, \quad \beta = D_i(\alpha).$

Лемма Б. $\quad D_i D_j - D_j D_i = a(x, t)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{a}{\tau_i - \tau_j}(D_i - D_j),$

где коэффициент a определяется формулой

$$a = -\frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \frac{\partial \tau_j}{\partial t} + \tau_i \frac{\partial \tau_j}{\partial x} - \tau_j \frac{\partial \tau_i}{\partial x} = -D_j \tau_i + D_i \tau_j.$$

(*Если величины* τ_i, τ_j *постоянны, то* a *обращается в нуль и операторы* D_i, D_j *коммутируют.*)

Лемма Б′. *Перестановка операторов* D_i *в произведении* k *различных операторов дифференцирования по направлению оставляет это произведение неизменным с точностью до слагаемого, которое представляет собой линейный дифференциальный оператор порядка меньше* k. (*В случае постоянных коэффициентов этот дополнительный оператор равен нулю.*)

По индукции отсюда можно легко получить следующую лемму.

Лемма В. *Любой линейный дифференциальный оператор* N_r *порядка* $r < k$ *можно представить как сумму вида*

$$N_r = \sum_{i \leqslant r+1} a_i U^{r,\,i} + N_{r-1}, \tag{3}$$

где $U^{r,\,i}$ *есть произведение* r *из* $r+1$ *операторов* $D_1, \ldots, D_{r+1}$: $U^{r,\,i} = D_{r+1} \ldots D_{i+1}, D_{i-1} \ldots D_1$, *т. е. из произведения* $D_1 \ldots D_{r+1}$ *исключается* i-*й сомножитель, например* $U^{r,r+1} = D_r \ldots D_1$, *или*

$$U^{r,\,1} = D_{r+1} D_r \ \ldots \ D_2.$$

Дополнительный член N_{r-1} *является оператором порядка не большего, чем* $r-1$.

Применяя лемму В к оператору N_{r-1} и повторяя этот процесс, мы получаем следующую лемму.

Лемма В′. *Любой оператор порядка* r *может быть записан в виде*

$$N_r = \sum a_i^s U^{s,\,i} \qquad (i \leqslant s+1,\ s \leqslant r). \tag{4}$$

Лемма В доказывается просто по индукции. Мы имеем

$$\partial/\partial x = [1/(\tau_2 - \tau_1)]\,(D_2 - D_1)$$

и

$$\partial/\partial t = [1/(\tau_2 - \tau_1)]\,(\tau_1 D_2 - \tau_2 D_1).$$

Отсюда следует лемма В для $s = r = 1$. Предположим, что лемма В справедлива для $r = s \leqslant k-1$, и покажем, что производные $\partial(N_r)/\partial x$ и $\partial(N_r)/\partial t$ имеют вид (4). Рассмотрим член $U^{s,\,i}$. Оба дифференциальных оператора $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$ имеют вид $pD_i + qD_{s+2}$. Согласно леммам Б и Б′, мы получаем, что $pD_i U^{s,\,i} = pU^{s+1,\,s+2} + N_s$ и $qD_{s+2} U^{s,\,i} = qU^{s+1,\,i}$. Если мы применим это рассуждение ко всем членам оператора N_s, то лемма В будет доказана по индукции.

Процесс оканчивается при $s = k-1$, если рассматривается всего k производных D_i. Если заданы k различных производных D_i, то, вообще говоря, линейный дифференциальный оператор порядка $r = k$ нельзя выразить в виде (3). Мы можем не-

посредственно убедиться, используя, например, результаты п. 1, что если $D_1, \ldots, D_k$ — операторы дифференцирования по направлению характеристик гиперболического оператора $L[u]$, то из разложения характеристического полинома P^k на линейные множители получается основная формула разложения

$$L[u] = Mu + N_{k-1}u, \tag{5}$$

где

$$Mu = D_k D_{k-1} \ldots D_1 u, \tag{6}$$

а N_{k-1} — оператор порядка не выше $k-1$. Поэтому, учитывая те члены N_{k-1}, которые не содержат производных функции u, мы можем в силу леммы B′ записать дифференциальное уравнение (1) в нормальной форме:

$$L[u] = M[u] + N_{k-1}u = Mu + \sum_{\substack{s<k \\ i \leqslant s+1}} a_s^i U^{s,\,i} u + au = -f(x,\ t). \tag{7}$$

3. Решение задачи Коши. Задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями $u = 0$, $U^{s,\,i} u = 0$ при $t = 0$ можно теперь сразу решить, приведя уравнение к диагональной нормальной форме. Слегка изменяя обозначения, положим $u = U^0$ и заменим $U^{s,\,i} u$ просто символом $U^{s,\,i}$. Величины U^0, $U^{s,\,i}$ рассматриваются как неизвестные функции, образующие вектор U с $k(k+1)/2$ компонентами.

Обозначая через $l(U)$ линейное выражение относительно компонент вектора U, мы, согласно п. 2 и равенству (4), легко получим, что

$$D_i U^{s,\,i} = l_{s,\,i}(U) \qquad (s < k-1,\ i < s+1) \tag{8}$$

и

$$D_i U^{k-1,\,i} = Mu + l_{k-1,\,i}(U) = l^*_{k-1,\,i}(U) - f, \tag{9}$$

где $l^*_{k-1,\,i}(U)$ снова есть линейное выражение относительно компонент вектора U.

Система (8), (9) является как раз системой в характеристической диагональной форме, которая решалась в § 6.

Таким образом, задача Коши решается с помощью приведения уравнения к характеристической нормальной форме.

Данное выше решение можно сразу распространить на случай кратных характеристик при выполнении некоторого естественного условия.

Чтобы оправдать это условие, мы заметим, что для оператора $L[u]$ возможно приведение к виду (5) также и в случае, когда некоторые из характеристических направлений совпадают. Но тогда может оказаться невозможным представление (7), ибо оно может не пройти для члена N_{k-1}. Например, для $k = 4$, если $D_1 = D_2$, $D_3 = D_4$, оператор $L[u] = D_4 D_3 D_2 D_1 + D_4 D_3 D_3$ имеет вид (5), но не вид (7).

Но мы можем представить себе, что кратные характеристики получаются при непрерывном изменении некоторых параметров, в результате чего некоторые из первоначально различных производных D_l совпадают. Выражение N_{k-1} принимает вид, указанный в формуле (7), только некоторые из множителей D_l совпадают. Теперь мы сформулируем это наводящее соображение „как условие А". Оператор $L[u]$ можно привести к виду (7), причем ни один из членов не должен содержать более высоких степеней D_l, чем главный член M. При выполнении этого условия приведение уравнения (1) к нормальной диагональной форме остается буквально без изменений. Следовательно, условие А обеспечивает единственность решения и корректность постановки задачи Коши и в случае кратных характеристик [1]).

4. Другие варианты решения. Теорема П. Унгара. В предыдущем пункте нам удалось избежать появления дополнительных характеристик, но мы ввели много новых неизвестных, отчего характеристики приобрели высокую кратность.

а) Сводя одно уравнение к диагональной системе, мы можем, (см. Унгар [1]), избежать введения как посторонних характеристик, так и лишних уравнений, если будем пользоваться следующей замечательной теоремой.

Теорема Унгара. *Если L — оператор порядка k, удовлетворяющий условию А, то задачу Коши для уравнения $L[u]=f$ можно свести к задаче Коши для диагональной системы, состоящей ровно из k уравнений первого порядка.*

Запишем формулу (5), изменив порядок сомножителей:

$$L = D_1 D_2 \ldots D_k + N_{k-1};$$

здесь совпадающие D_j перенумерованы подряд. Существует последовательность операторов

$$\begin{aligned} L_0 &= 1, \\ L_1 &= D_1 L_0 + R_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{k-1} &= D_{k-1} L_{k-2} + R_{k-2}, \\ L = L_k &= D_k L_{k-1} + R_{k-1}, \end{aligned}$$

[1]) В связи с содержанием предыдущего и следующего пунктов мы сошлемся на работу Э. Леви [3]. Эти результаты были независимо получены А. Лакс [1]. В этой работе для уравнений с постоянными коэффициентами показано, что в случае кратных характеристик условие А не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы задача Коши была корректно поставлена. Для уравнений с n переменными и с постоянными коэффициентами Гординг [2] указал необходимое и достаточное условие, связанное с поведением корней полинома, соответствующего оператору.

где $R_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} a_i^\nu L_i$. Вводя новые переменные $u_0 = u$, $u_i = L_i u$ ($i = 1, 2, \ldots, k-1$), мы получим диагональную систему уравнений

$$u_\nu = D_\nu u_{\nu-1} + \sum_{i=0}^{\nu-1} a_i^{\nu-1} u_i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{10}$$

$$f = D_k u_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{k-1} u_i.$$

Как и раньше, условия Коши, заданные для функции u, индуцируют соответствующие начальные значения для функций u_i. В частности, они равны нулю, если данные Коши для u нулевые.

б) Непосредственно обобщая решение уравнения $u_{xy} = -au_x - bu_y + f$, данное в § 6, п. 1, мы получим другой вариант решения. Мы приведем его краткое описание.

Снова запишем дифференциальное уравнение $L[u] = f$ в виде

$$L[u] = Mu + N_{k-1}u = -f,$$

или

$$Mu = -Nu - f.$$

Уравнение

$$Mu = -Nv - f \tag{11}$$

вместе с начальными условиями определяет преобразование

$$u = Tv.$$

Нам надо показать, что последовательные приближения

$$v^n = Tv^{n-1}$$

сходятся; в частности, мы покажем, что

$$\|Tv^n - Tv^{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2}\|v^n - v^{n-1}\|,$$

где $\|w\|$ — некоторая подходящая норма. Удобно пользоваться нормой

$$\|w\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant h} |Mw|,$$

так как в достаточно узкой полоске $0 \leqslant t \leqslant h$ для функции w с начальными данными, равными нулю, легко получить оценку

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant h} |Nw| \leqslant \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant h} |Mw| \tag{12}$$

с помощью повторного интегрирования вдоль характеристик и применения лемм А и Б п. 2.

Таким образом устанавливается, что преобразование T сжимающее, и в достаточно узкой области, примыкающей к начальной

кривой, итерации v^j равномерно сходятся к некоторой функции u, для которой

$$u = Tu,$$

т. е.

$$Mu + Nu = -f.$$

Нетрудно показать, что функция u не только имеет все нужные производные по направлениям, но также удовлетворяет начальным условиям и, таким образом, является решением нашей задачи Коши.

5. Замечания. Как и в случае гиперболических систем, полученные выше решения задачи Коши не только единственны, но и непрерывно зависят от начальных данных. Задача Коши „корректно поставлена" в смысле гл. III, § 6. Этот факт лежит в основе построения наших решений.

Нарушение условия А может привести к тому, что решение задачи Коши не будет непрерывно зависеть от начальных данных.

В гл. III, § 5, п. 3, стр. 220 было показано, что задача Коши для параболического уравнения

$$u_{tt} - u_x = 0$$

с начальными условиями при $t = 0$ поставлена некорректно, так как решение такой задачи Коши не будет непрерывно зависеть от начальных данных. Очевидно, что уравнение $u_{tt} - u_x = 0$ имеет вид (7), однако для него не выполнено условие А.

§ 9. Разрывы решений. Ударные волны

Явления, связанные с распространением волн, описываются решениями гиперболических уравнений с заданными начальными и граничными условиями. Если эти данные разрывны (как, например, в случае волны, возникающей под действием импульса), то решение также будет разрывным.

Нашей целью является уточнение понятия „разрывного решения". Например, функция $u = f(x+t) + g(x-t)$ является классическим решением волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$, если функции f и g дважды дифференцируемы. Если же f и g не дифференцируемы, то их можно рассматривать как некоторое „решение в обобщенном смысле". Мы приведем теперь точную формулировку этих понятий.

1. Обобщенные решения. Слабые решения[1]. Пусть, как и в § 3, $L[u] = 0$ — линейная система:

$$L[u] \equiv Au_x + Bu_t + Cu = 0$$

---

[1]) Несколько другой и более обстоятельный подход см. в гл. VI, § 4, и в приложении.

относительно неизвестного вектора $u^1, u^2, \ldots, u^k$. Мы определим оператор L^*, сопряженный к L, с помощью выражения $\zeta L[u] - uL^*[\zeta]$, которое должно иметь вид дивергенции, т. е.

$$L^*[\zeta] = -(A\zeta)_x - (B\zeta)_t + C\zeta,$$

так что

$$\zeta L[u] - uL^*[\zeta] = (\zeta Au)_x + (\zeta Bu)_t. \tag{1}$$

В области G, в которой рассматривается u, мы теперь введем „пробные функции“ ζ, тождественно равные нулю вне некоторой подобласти R области G[1]).

Интегрируя равенства (1) по R, мы получим, в силу теоремы Гаусса,

$$\iint_R (\zeta L[u] - uL^*[\zeta])\, dx\, dt = 0. \tag{2}$$

Если $L[u] = 0$, то

$$\iint_R uL^*[\zeta]\, dx\, dt = 0. \tag{3}$$

Обратно, если соотношение (3) выполняется для некоторой функции u, обладающей непрерывными производными, и для всех допустимых пробных функций ζ во всех подобластях R области G, то из равенства (2) следует, что

$$\iint_R \zeta L[u]\, dx\, dt = 0. \tag{4}$$

Отсюда, в силу основной леммы вариационного исчисления (см. т. I, гл. IV, § 3, п. 1), мы делаем вывод, что $L[u] = 0$.

Теперь мы дадим некоторое обобщение понятия решения, которое заключается в том, что вектор-функция и ее производные могут быть кусочно-непрерывными, т. е. они могут иметь разрывы первого рода вдоль кусочно-гладких кривых C. Такая функция u называется *слабым решением* уравнения $L[u] = 0$ в области G, если

$$\iint_R uL^*[\zeta]\, dx\, dt = 0$$

для всех допустимых пробных функций ζ и всех подобластей R области G[2]).

---

[1]) Такие функции иногда называются финитными или функциями с компактным носителем; область, где функция не равна нулю, называется ее *носителем*.

[2]) Конечно, можно обобщить это понятие, оставив только требование интегрируемости u, но это не принесло бы нам большой пользы.

Предполагая, что разрывное решение u уравнения $L[u]=0$ регулярно во всех областях, не содержащих C, мы покажем, что линии разрывов C обязательно должны быть характеристиками. Предположим, что кривая C разделяет область R на две части R_1 и R_2. Произведем в равенстве (2) интегрирование по частям отдельно в областях R_1 и R_2. Так как в каждой из этих областей $L[u]=0$ и так как $\zeta=0$ на границе области R, мы получим (обозначая через $[u]$ скачок функции u на кривой C)

$$\int_C \zeta (A[u]\varphi_x + B[u]\varphi_t)\,ds = 0.$$

Здесь φ_x и φ_t — направляющие косинусы нормали к кривой C, а ds — элемент длины дуги на кривой C. Но функция ζ произвольна на C, и, следовательно, в силу основной леммы вариационного исчисления, мы получаем, что

$$(\varphi_x A + \varphi_t B)[u] = 0. \tag{5}$$

В предположении, что скачок $[u]$ отличен от нуля, из этого линейного однородного уравнения следует, что матрица $\varphi_x A + \varphi_t B$ особая, т. е. (см. § 2) что C — характеристическая кривая. В качестве примера читатель может легко проверить, что функция $u = f(x+t) + g(x-t)$ является слабым решением волнового уравнения даже и тогда, когда функции f и g разрывны.

Аналогичное определение слабых решений можно дать для уравнений высших порядков.

Можно ввести и такие обобщенные решения u, которые обращаются в бесконечность вдоль характеристик. Возьмем, например, слабое решение u, определенное как производная $u = v_t$ функции v, которая может иметь скачки, и потребуем, чтобы равенство

$$\iint_R v \frac{\partial}{\partial t} L^*[\zeta]\,dx\,dt = 0$$

выполнялось для всех гладких пробных функций ζ. Как и раньше, мы видим, что разрывы функции v возможны только на характеристиках и что скачок $[v]$ удовлетворяет тому же соотношению, что и $[u]$ в предыдущем случае, т. е. что

$$(A\varphi_x + B\varphi_t)[v] = 0.$$

2. Разрывы в квазилинейных системах, выражающих законы сохранения. Ударные волны. Аналогичная теория разрывных решений, имеющая большое значение в динамике сжимаемой жидкости, может быть построена для квазилинейных систем, если только они

являются дивергентными уравнениями, или „законами сохранения“ [1]), т. е.

$$L[u] = p_t(x, t, u) + q_x(x, t, u) + n(x, t, u) = 0, \tag{6}$$

где p, q, n — дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции от аргументов x, t в области G и от u в некоторой заданной области [2]). В частности, в таком виде могут быть представлены дифференциальные уравнения, возникающие в связи с принципом Гамильтона.

Чтобы определить слабые решения для систем законов сохранения, мы снова рассмотрим произвольные гладкие пробные функции ζ в области $R \subset G$, равные нулю вне R. Умножим уравнение (6) на ζ, проинтегрируем по R и получим

$$\iint_R \zeta L[u]\, dx\, dt = 0.$$

Для гладких u теорема Гаусса дает

$$\iint_R (p\zeta_t + q\zeta_x - n\zeta)\, dx\, dt = 0. \tag{7}$$

Обратно, если формула (7) справедлива для некоторой функции u, имеющей непрерывные первые производные, и для всех допустимых пробных функций ζ, то, применяя еще раз теорему Гаусса, мы получим

$$\iint_R \zeta L[u]\, dx\, dt = 0. \tag{8}$$

Как и раньше, отсюда мы делаем вывод, что $L[u] = 0$. Мы назовем функцию u *слабым решением*, если она кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывные первые производные и если соотношение (7) выполняется для всех допустимых пробных функций ζ и для всех подобластей R области G.

Мы снова получим соотношение на скачке для разрывного слабого решения u. Пусть C — линия разрыва, разделяющая R на две области. Применяя теорему Гаусса отдельно к каждой из этих областей и принимая во внимание, что $\zeta = 0$ вне R и $L[u] = 0$ вне C, мы получим

$$\int_C \zeta(\varphi_t[p] + \varphi_x[q])\, ds = 0,$$

[1]) См. замечание V в конце этого пункта, которое показывает, что такие законы сохранения не определяются однозначно одним только дифференциальным уравнением, а нуждаются в дополнительном физическом обосновании.

[2]) Линейные системы всегда можно записать в таком виде.

и, следовательно, соотношение на разрыве вдоль линии C будет иметь вид

$$\varphi_t [p] + \varphi_x [q] = 0. \tag{9}$$

Здесь φ_t, φ_x снова обозначают направляющие косинусы нормали к C, а $[p]$, $[q]$ — скачки функций p и q при переходе через линию C.

Между этим случаем и линейным имеется много существенных различий[1]).

(I) Соотношения для скачков и для наклона линии C не разделены, а взаимно связаны. Линии разрывов C, или „ударные волны“, уже *не* являются характеристиками.

(II) В линейном случае разрывные решения могут быть получены как пределы гладких решений, поэтому слабые решения можно определить и таким образом. Но для нелинейных законов сохранения слабые решения уже не могут быть получены как пределы гладких решений.

(III) Условие (5) на скачке в линейном случае достаточно для того, чтобы определить единственное разрывное решение для заданных разрывных начальных (или смешанных начальных и граничных) условий. В нелинейном случае условия (9) на разрыве должны быть дополнены, например, так называемым условием неубывания „энтропии“, для того чтобы они определяли единственное решение соответствующей задачи.

(IV) Решения линейных уравнений разрывны только тогда, когда начальные данные разрывны. Наоборот, решения нелинейных уравнений, принимающие гладкие (даже аналитические) начальные значения, могут становиться разрывными с течением времени.

(V) Различные системы законов сохранения могут быть эквивалентными как дифференциальные уравнения, т. е. гладкие решения одной системы являются также гладкими решениями другой. Но разрывное решение одной системы не обязано быть (и, вообще говоря, не будет) решением другой системы. Поразительным примером является система, состоящая из законов сохранения массы, количества движения и энергии, с одной стороны, и из законов сохранения массы, количества движения и энтропии, с другой стороны.

Разрывные решения в связи с изучением сжимаемой жидкости рассматривали Риман, Гюгонио, Рэнкин и другие. См. работы Р. Куранта и Фридрихса [1], Олейник [4] и Гельфанда [1]. Общую теорию разрывов решений систем законов сохранения разработал П. Лакс [2].

---

[1]) Эти различия легко проследить на примере одного квазилинейного уравнения. См. приложение 2 к гл. II. — *Прим. ред.*

ПРИЛОЖЕНИЕ I К ГЛАВЕ V

ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК В КАЧЕСТВЕ КООРДИНАТ

§ 1. Дополнительные замечания относительно общих нелинейных уравнений второго порядка

Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с помощью некоторого общего метода была сведена к соответствующей задаче Коши для квазилинейных систем первого порядка. Для случая уравнений второго порядка интересен более прямой подход[1]) к этой задаче, состоящий в том, что вводится характеристическая система координат α, β и получается система уравнений для величин x, y, u, p, q, r, s, t, рассматриваемых как функции этих характеристических параметров (см. также § 2, п. 3).

1. Квазилинейное дифференциальное уравнение. Сначала рассмотрим квазилинейное уравнение

$$L[u] \equiv au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0, \tag{1}$$

где a, b, c, d — заданные функции величин x, y, u, $p = u_x$, $q = u_y$, обладающие непрерывными вторыми производными в рассматриваемой области пространства x, y, u, p, q.

Семейство кривых $\varphi(x, y) = \text{const}$ является характеристическим (см. § 1, п. 1 и 2), если

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0; \tag{2}$$

мы требуем, чтобы выполнялось неравенство

$$b^2 - 4ac > 0,$$

т. е. чтобы уравнение (1) было гиперболическим в рассматриваемой части пространства x, y, u, p, q. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, т. е. что линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ не являются характеристиками.

Как и в § 2, п. 3, два семейства характеристических кривых для решения $u(x, y)$ задаются уравнениями $\varphi = \alpha(x, y) = \text{const}$ и $\varphi = \beta(x, y) = \text{const}$, и дифференцирование по направлению характеристической кривой C по параметру на этой кривой будет обозначаться точкой. Применяя сокращенные обозначения

$$u_{xx} = r, \quad u_{xy} = s, \quad u_{yy} = t,$$

---

[1]) Подробности см. в работе Г. Леви [7] и в книге Адамара [2]. Данное Гансом Леви решение задачи Коши для нелинейного уравнения второго порядка было основным этапом в теории, которая рассматривается в настоящей главе. Случай второго порядка выделяется в силу того, что два характеристических параметра можно ввести в качестве независимых переменных,

мы запишем теперь уравнение (1) и условия полосы на характеристике C в виде

$$\begin{aligned} ar+bs+ct+d&=0,\\ \dot{x}r+\dot{y}s\qquad -\dot{p}&=0,\\ \dot{x}s+\dot{y}t-\dot{q}&=0. \end{aligned} \tag{3}$$

С одной стороны, величины r, s, t нельзя однозначно определить из уравнений (3), так как кривая C характеристическая; с другой стороны, уравнения (3) должны быть совместными, если мы хотим, чтобы решение $u(x, y)$ существовало. Поэтому матрица

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ \dot{x} & \dot{y} & 0 & -\dot{p}\\ 0 & \dot{x} & \dot{y} & -\dot{q} \end{pmatrix}$$

не может иметь ранг, больший чем 2. Это позволяет снова получить характеристическое соотношение

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = a\dot{y}^2-b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2=0 \tag{2'}$$

и

$$\begin{vmatrix} a & c & d\\ \dot{x} & 0 & -\dot{p}\\ 0 & \dot{y} & -\dot{q} \end{vmatrix} = d\dot{x}\dot{y}+a\dot{y}\dot{p}+c\dot{x}\dot{q}=0. \tag{4}$$

Так как $b^2-4ac>0$, $a\neq 0$, $c\neq 0$, мы можем записать условие (2′) в виде

$$a\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2-b\frac{\dot{y}}{\dot{x}}+c\equiv a\left(\tau^1-\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\left(\tau^2-\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=0,$$

где $\tau^1(x, y, u, p, q)$, $\tau^2(x, y, u, p, q)$ — две различные действительные функции, и два семейства характеристик определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \tau^1x_\alpha-y_\alpha&=0,\\ \tau^2x_\beta-y_\beta&=0. \end{aligned}$$

Чтобы величины α и β можно было взять в качестве координат, якобиан

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)}=x_\alpha y_\beta-x_\beta y_\alpha=(\tau^2-\tau^1)\,x_\alpha x_\beta$$

должен быть отличен от нуля, т. е. должно быть $x_\alpha^2 + x_\beta^2 \neq 0$; это можно предполагать без ограничения общности.

Теперь мы можем написать систему шести дифференциальных уравнений для пяти величин x, y, u, p, q:

$$\begin{aligned}
&(\text{а}) \quad \tau^1 x_\alpha - y_\alpha &&= 0,\\
&(\text{б}) \quad \tau^2 x_\beta - y_\beta &&= 0,\\
&(\text{в}) \quad d\tau^1 x_\alpha + a\tau^1 p_\alpha + c q_\alpha &&= 0,\\
&(\text{г}) \quad d\tau^2 x_\beta + a\tau^2 p_\beta + c q_\beta &&= 0,\\
&(\text{д}) \quad -p x_\alpha - q y_\alpha + u_\alpha &&= 0,\\
&(\text{е}) \quad -p x_\beta - q y_\beta + u_\beta &&= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Первые два уравнения возникают из условия (2′), следующие — из условия (4), а последние два являются соотношениями полосы для u. Одно из этих уравнений лишнее, оно является следствием остальных пяти[1]).

Таким образом, мы получили систему пяти уравнений для пяти величин.

Эти уравнения образуют гиперболическую систему первого порядка относительно характеристических переменных α, β, которая имеет вид, рассмотренный в § 7. Если для исходного уравнения начальные значения u, u_y заданы на некоторой кривой, которая нигде не имеет характеристических направлений, то на этой кривой они сразу определяют начальные данные для x, y, u, p, q (они рассматриваются теперь как функции переменных α, β).

---

[1]) Действительно, чтобы получить уравнение (5, е) как следствие остальных уравнений, мы продифференцируем выражение

$$B = u_\beta - p x_\beta - q y_\beta$$

по α, а уравнение (5, д) по β. Вычитая, получим

$$B_\alpha = p_\beta x_\alpha - p_\alpha x_\beta + q_\beta y_\alpha - q_\alpha y_\beta.$$

Мы выразим y_α, y_β через x_α, x_β с помощью уравнений (5, а, б); затем вычислим комбинацию последних двух членов с помощью уравнений (5, в, г). Это дает

$$B_\alpha = \left(\frac{a}{c}\tau^1\tau^2 - 1\right)(p_\alpha x_\beta - p_\beta x_\alpha).$$

Но из характеристического соотношения (2′) мы имеем $\tau^1\tau^2 = \frac{c}{a}$, следовательно,

$$B_\alpha = 0.$$

Отсюда вытекает, что $B = \text{const}$ на каждой кривой $\beta = \text{const}$. Так как предполагается, что в начальный момент данные задачи удовлетворяют нашей системе, то $B = 0$ всюду.

Существование и единственность решения уравнений (5) доказаны в § 7. Кроме того, решение x, y, u, p, q задачи Коши для уравнений (5), принимающее начальные значения, определенные через исходные данные Коши для уравнения (1), дает решение $u(x, y)$ исходной задачи Коши для уравнения (1), что можно показать следующим образом.

Прежде всего, так как якобиан $x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha$ не обращается в нуль, x и y можно взять в качестве независимых переменных, и функции u, p, q будут непрерывно дифференцируемы по x и y. Чтобы доказать равенства $u_x = p$, $u_y = q$, мы рассмотрим эквивалентные им соотношения

$$A \equiv u_\alpha - p x_\alpha - q y_\alpha = 0, \quad B \equiv u_\beta - p x_\beta - q y_\beta = 0.$$

Соотношение $A = 0$ удовлетворяется в силу уравнения (5, д); соотношение $B = 0$, как мы видели выше, есть следствие уравнений от (5, а) до (5, д) и того факта, что $B = 0$ на начальной кривой. Наконец, мы должны проверить, что величины u, p, q, $u_{xx} = r$, $u_{xy} = s$, $u_{yy} = t$, полученные из системы (5), удовлетворяют уравнению (1). Действительно, ввиду того, что

$$p_\alpha = r x_\alpha + s y_\alpha, \quad q_\alpha = s x_\alpha + t y_\alpha,$$

из системы (5) следует соотношение

$$0 = d\tau^1 x_\alpha + a\tau^1 (r x_\alpha + s y_\alpha) + c (s x_\alpha + t y_\alpha) =$$
$$= \tau^1 x_\alpha \left[d + ar + ct + s \left(a\tau^1 + \frac{c}{\tau^1} \right) \right].$$

Но так как $\tau^1 x_\alpha \neq 0$ и так как из квадратного уравнения следует, что $a\tau^1 + (c/\tau^1) = b$, мы имеем

$$0 = ar + bs + ct + d,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, задача Коши для квазилинейного уравнения решена и неявно доказана единственность решения.

Предположения, при которых доказано существование решения, можно резюмировать следующим образом: начальная полоса нигде не имеет характеристического направления и всюду гладкая, на ней заданы величины u, p, q, обладающие непрерывными производными; коэффициенты a, b, c, d имеют непрерывные производные до второго порядка. При этих условиях доказывается единственность и существование решения; область зависимости для точки P ограничена двумя характеристиками, проходящими через P, и заключенной между ними дугой начальной кривой [1]).

---

[1]) Можно делать несколько более слабые предположения, как показано Дуглисом [1] (см. также Хартман и Винтнер [1]).

Заметим также, что аналогично может быть поставлена и решена характеристическая задача Коши.

2. Общее нелинейное уравнение. Метод, примененный в предыдущем пункте, почти дословно применяется к квазилинейным системам с одинаковой главной частью, т. е. к системам вида

$$au^j_{xx}+bu^j_{xy}+cu^j_{yy}+d^j=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{1'}$$

где a, b, c, d^j — заданные функции от x, y, u^j, p^j, q^j.

Общее нелинейное гиперболическое уравнение

$$F(x,\ y,\ u,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0 \tag{6}$$

можно также свести к эквивалентной ему системе квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью; это делается с помощью дифференцирования уравнения (6) по x и y.

Вообще говоря, получается эквивалентная каноническая система первого порядка, причем независимыми переменными являются характеристические параметры; она состоит уже не из пяти, как прежде, а из восьми уравнений для восьми величин x, y, u, p, q, r, s, t, зависящих от α и β [1]). (Специальный случай уравнения Монжа — Ампера будет рассматриваться в следующем пункте.)

Тот же метод, который применялся в п. 1, дает двенадцать уравнений для восьми величин x, y, u, p, q, r, s, t, и можно доказать следующее. а) Четыре из этих двенадцати уравнений являются следствиями остальных, и только восемь из них независимы. б) Если для уравнения (6) поставлена задача Коши, то можно определить начальные значения для этой системы из восьми уравнений первого порядка. Решение x, y, u, p, q, r, s, t системы снова строится с помощью последовательных приближений и дает решение

$$u(x,\ y)=u(\alpha(x,\ y),\ \beta(x,\ y))$$

уравнения (6). в) Решение u системы имеет непрерывные производные вплоть до третьего порядка, если начальные значения для величин x, y, u, p, q, r, s, t непрерывно дифференцируемы и если функция F имеет непрерывные производные по x, y, u, p, q, r, s, t вплоть до третьего порядка.

§ 2. *Исключительный характер уравнения Монжа—Ампера*

Уравнение Монжа — Ампера

$$F=Ar+Bs+Ct+D(rt-s^2)+E=0, \tag{1}$$

---

[1]) Подробности см. в работах Г. Леви [7] и Адамара [2].

имеющее большое значение во многих областях, как, например, в дифференциальной геометрии, — существенно нелинейное: оно квадратное относительно r, t, s. Но в противоположность общему нелинейному уравнению, которое сводится к системе восьми дифференциальных уравнений, задача Коши для уравнения (1) сводится к задаче Коши для системы только пяти квазилинейных уравнений первого порядка, точно так же, как в случае квазилинейного уравнения второго порядка. Этот факт влечет за собой интересные следствия; например, класс начальных условий, допустимый для уравнения Монжа — Ампера, шире, чем для общего нелинейного уравнения (т. е. на начальные функции накладываются менее строгие условия гладкости).

Рассмотрим уравнение (1), где A, B, C, D, E являются гладкими функциями от x, y, u, p, q. Характеристическое соотношение (9) из § 1 принимает вид

$$(A+Dt)\dot{y}^2-(B-2Ds)\dot{y}\dot{x}+(C+Dr)\dot{x}^2=0. \tag{2}$$

Мы можем предполагать, что $A+Dt\neq 0$, $C+Dr\neq 0$. Уравнение (2) имеет действительные различные корни τ^1, τ^2, если уравнение (1) гиперболическое, т. е. если дискриминант

$$\Delta^2=F_s^2-4F_rF_t=B^2-4AC+4ED>0. \tag{3}$$

Замечательно, что вторые производные r, s, t не входят в выражения для дискриминанта.

Кроме того, из уравнения (1) и из вида дискриминанта Δ^2 вытекает следующее тождество

$$0=D\{Ar+Bs+Ct+D(rt-s^2)+E\}=$$
$$=(A+Dt)(C+Dr)-\frac{1}{4}(B-2Ds)^2+\frac{1}{4}\Delta^2,$$

или

$$\frac{A+Dt}{\frac{1}{2}(B-2Ds-\Delta)}=\frac{\frac{1}{2}(B-2Ds+\Delta)}{C+Dr}. \tag{4}$$

Мы решаем уравнение (2) относительно $\dot{y}/\dot{x}$ и получаем корни

$$\tau^1=\frac{B-2Ds+\Delta}{2(A+Dt)},\qquad \tau^2=\frac{B-2Ds-\Delta}{2(A+Dt)};$$

это позволяет получить уравнения

$$\begin{aligned}(A+Dt)\,y_\alpha-\frac{1}{2}(B-2Ds+\Delta)\,x_\alpha&=0,\\(A+Dt)\,y_\beta-\frac{1}{2}(B-2Ds-\Delta)\,x_\beta&=0\end{aligned} \tag{5}$$

с характеристическими независимыми переменными α и β, или

$$\begin{aligned} D(ty_\alpha + sx_\alpha) + Ay_\alpha - \frac{1}{2}(B+\Delta)\,x_\alpha = 0, \\ D(ty_\beta + sx_\beta) + Ay_\beta - \frac{1}{2}(B-\Delta)\,x_\beta = 0. \end{aligned} \tag{5'}$$

В силу соотношения полосы

$$\dot{q} = s\dot{x} + t\dot{y},$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(B+\Delta)\,x_\alpha - Ay_\alpha - Dq_\alpha = 0, \\ \frac{1}{2}(B-\Delta)\,x_\beta - Ay_\beta + Dq_\beta = 0. \end{aligned} \tag{5''}$$

Применяя тождество (4), из уравнений (5) мы получим два дополнительных уравнения

$$\begin{aligned} (C+Dr)\,x_\alpha - \frac{1}{2}(B - 2\,Ds - \Delta)\,y_\alpha = 0, \\ (C+Dr)\,x_\beta - \frac{1}{2}(B - 2\,Ds + \Delta)\,y_\beta = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

или

$$\begin{aligned} D(rx_\alpha + sy_\alpha) + Cx_\alpha - \frac{1}{2}(B-\Delta)\,y_\alpha = 0, \\ D(rx_\beta + sy_\beta) + Cx_\beta - \frac{1}{2}(B+\Delta)\,y_\beta = 0, \end{aligned} \tag{6'}$$

а с помощью соотношения полосы

$$\dot{p} = r\dot{x} + s\dot{y}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(B-\Delta)\,y_\alpha - Cx_\alpha - Dp_\alpha = 0, \\ \frac{1}{2}(B+\Delta)\,y_\beta - Cx_\beta - Dp_\beta = 0. \end{aligned} \tag{6''}$$

Заметим, что система, состоящая из пяти уравнений (5″), (6″) и соотношения полосы

$$u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha = 0, \tag{7}$$

эквивалентна исходному уравнению Монжа — Ампера (1) в следующем смысле. Если x, y, u, p, q есть решение этой системы с начальными данными, определенными через начальные данные для урав-

нения (1), и если якобиан $\partial(x, y)/\partial(\alpha, \beta)$ не обращается в нуль, то

$$u(\alpha(x, y), \beta(x, y)) = u(x, y)$$

является решением задачи Коши для уравнения (1).

Чтобы установить этот факт, мы сначала определим три величины r, s, t из четырех условий полосы

$$\begin{aligned} x_\alpha r + y_\alpha s \qquad\quad - p_\alpha &= 0, \\ x_\beta r + y_\beta s \qquad\quad - p_\beta &= 0, \\ x_\alpha s + y_\alpha t - q_\alpha &= 0, \\ x_\beta s + y_\beta t - q_\beta &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Мы исключим r из первых двух уравнений, а t — из последних двух и получим

$$s = \frac{x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)}} \quad \text{и} \quad s = \frac{y_\beta q_\alpha - y_\alpha q_\beta}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)}}.$$

Соотношения типа $q_\alpha = q_x x_\alpha + q_y y_\alpha$ показывают, что уравнения (8) совместны тогда и только тогда, когда $q_x = p_y$. Ясно, что функции r, s, t, полученные из уравнений (8), удовлетворяют уравнениям (5′) и (6′), а, следовательно, также уравнениям (5) и (6). Из первых уравнений в системах (5) и (6) мы получаем тождество

$$D\{Ar + Bs + Ct - D(rt - s^2) + E\} = 0,$$

или, так как $D \neq 0$ (иначе уравнение (1) было бы квазилинейным),

$$Ar + Bs + Ct - D(rt - s^2) + E = 0.$$

Таким образом, решение системы дает нам решение уравнения (1) и можно непосредственно проверить, что оно имеет нужные начальные значения.

Достаточно потребовать, чтобы начальные данные для уравнения Монжа — Ампера обладали следующими свойствами гладкости: функция $u(x, 0)$ должна быть дважды, а функция $u_y(x, 0)$ — один раз дифференцируемой. Другими словами, требования имеют тот же характер, что и в квазилинейном случае, но они и менее сильные, чем в общем нелинейном случае.

Другое замечание также указывает на исключительный характер уравнения Монжа — Ампера. Оно касается задачи Коши: для дифференциального уравнения, квадратного относительно вторых

производных,

$$Ar^2 + Bs^2 + Ct^2 + Drs + Ert + Fst + Gr + Hs + It + K = 0, \quad (9)$$

где $A, \ldots, K$ являются функциями от x, y, u, p, q, рассмотрим задачу Коши на кривой $x(\lambda), y(\lambda)$, задав значения $u(\lambda), p(\lambda), q(\lambda)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли условию полосы $\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}$. Затем мы должны дополнить эту полосу первого порядка до интегральной полосы второго порядка, вычисляя начальные значения для r, s, t из уравнения (9) и соотношений полосы

$$r\dot{x} + s\dot{y} = \dot{p}, \qquad s\dot{x} + t\dot{y} = \dot{q}.$$

В силу того что уравнение (9) квадратное, это дополнение, вообще говоря, можно сделать двумя способами. Однако можно показать, что из всех уравнений вида (9) только одно уравнение Монжа — Ампера допускает однозначное дополнение любой начальной полосы первого порядка до интегральной полосы.

Чтобы доказать это, мы положим в написанных выше соотношениях полосы $\dot{y}/\dot{x} = -\alpha$ и получим

$$s = \alpha t + \ldots, \qquad r = \alpha^2 t + \ldots,$$

где точками обозначены величины, известные на полосе первого порядка. Вводя эти выражения для r и s в уравнение (9), мы получим в качестве коэффициента при t^2 выражение

$$A\alpha^4 + D\alpha^3 + (E + B)\alpha^2 + F\alpha + C.$$

Если это выражение обращается в нуль при всех значениях α, то оно эквивалентно уравнениям

$$A = D = F = C = 0, \qquad E + B = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Этот результат для задачи Коши тем более замечателен, что для краевой задачи в случае эллиптического уравнения Монжа — Ампера, как было показано в гл. IV, § 5, п. 3, возможна неоднозначность решения.

§ 3. Переход в комплексной области от эллиптического случая к гиперболическому

Всюду в этой книге предполагалось, что переменные действительны; иногда комплексные переменные вводились чисто формальным образом. Но в следующих двух параграфах мы коротко расскажем о более существенном применении комплексных переменных,

начало которому положил Г. Леви [6] и которое было развито далее в работах Г. Леви, П. Гарабедяна [1]) и других.

Многие рассмотрения главы V остаются почти без изменений, если функции f и коэффициенты $a_{\nu\mu}$ являются комплекснозначными функциями действительных переменных x, y. Мы можем разбить решение $u = u_1 + iu_2$ на действительную и мнимую часть; таким образом, вместо n уравнений с комплексными коэффициентами мы получаем $2n$ действительных уравнений того же самого типа для функций u_1 и u_2. Теория интегрирования, теоремы единственности и доказанные ранее теоремы о непрерывности и дифференцируемости решений как функций параметров остаются без изменения.

Кроме того, если левая часть действительного дифференциального уравнения $F(x, y, u, \ldots) = 0$ является аналитической функцией всех своих аргументов и если мы, кроме того, знаем, что решение $u(x, y)$ аналитически зависит от x и y, то мы можем аналитически продолжить дифференциальное уравнение и его решение в комплексную область, считая, что $x = x_1 + ix_2$ и $y = y_1 + iy_2$ — комплексные переменные. Если мы это сделаем, то исчезнет различие между типами уравнений и в принципе станет возможным переход от эллиптического к гиперболическому случаю.

Простейшим типичным примером является дифференциальное уравнение

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

которое в действительной области эллиптическое. Мы предположим, что правая часть этого уравнения является аналитической функцией своих пяти аргументов. Если решение u аналитически зависит от x и y, то мы можем рассматривать u как функцию комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, или как комплексную функцию четырех действительных переменных x_1, x_2, y_1, y_2. Тогда в действительной области дифференциальное уравнение имеет вид

$$u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = f(x, y, u, u_{x_1}, u_{y_1}). \tag{2}$$

Но так как на комплексной плоскости мы можем дифференцировать как по iy_2, так и по y_1, то комплексная аналитическая функция u, рассматриваемая как функция четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2, удовлетворяет также уравнению

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} = f(x, y, u, u_{x_1}, -iu_{y_2}), \tag{3}$$

которое имеет гиперболический характер. Обоснование такого перехода связано с предполагавшейся до сих пор аналитической природой решения u, т. е. с тем фактом, что производная функции в комплексной области не зависит от направления дифференцирования.

---

[1]) См. Гарабедян и Либерштейн [1].

Теперь мы можем обратить наше рассуждение, т. е. исходить из действительного решения первоначального уравнения и пытаться продолжить это решение в комплексную область так, чтобы это продолжение удовлетворяло гиперболическому уравнению (3) или соответствующим системам, а затем доказать аналитичность таким образом полученной комплекснозначной функции. Эта основная идея впервые была применена Г. Леви [6] в его методе доказательства аналитичности решений эллиптических дифференциальных уравнений.

§ 4. *Аналитичность решений в эллиптическом случае*

1. Замечание из теории функций. Комплекснозначная функция $w(x_1, x_2, y_1, y_2) = w_1 + iw_2$, обладающая непрерывными частными производными первого порядка, называется аналитической функцией двух комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ в области B четырехмерного пространства x_1, x_2, y_1, y_2, если там выполняются уравнения Коши — Римана

$$\nabla w \equiv w_{x_1} + iw_{x_2} = 0, \quad \Lambda w \equiv w_{y_1} + iw_{y_2} = 0. \tag{1}$$

Можно дать следующее эквивалентное определение: функция w *аналитична* в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, если существует такое положительное число M, что функция w может быть разложена в степенной ряд

$$w = \sum_{\nu, \mu = 0}^{\infty} a_{\nu\mu} x^{\nu} y^{\mu} \tag{2}$$

для $|x| \leqslant M$, $|y| \leqslant M$[1]; она называется аналитической в области B, если она аналитична в окрестности каждой точки из B.

2. Аналитичность решения уравнения $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$. Мы предположим, что в дифференциальном уравнении

$$\Delta u = f(x, y, u, p, q) \tag{3}$$

функция f — (действительная) аналитическая функция своих пяти аргументов и что $u(x, y)$ — заданное дважды непрерывно дифферен-

---

[1]) Это условие можно получить, например, из определения Коши — Римана с помощью последовательного применения интегрального представления Коши для функций комплексного переменного: пусть соотношения Коши — Римана (1) выполняются в области B, определенной неравенствами $|x| < M$, $|y| < M$. Для любой пары чисел ξ_1, ξ_2, таких, что $|\xi| \leqslant \frac{M}{2}$, окружность $K_\xi : |x - \xi| = \frac{M}{2}$ целиком содержится в B; в этой области содержатся также все такие точки x, что $|x - \xi| \leqslant \frac{M}{2}$. Следовательно, если

цируемое решение этого уравнения в некоторой (действительной) окрестности точки $x=0$, $y=0$. Предполагается, что f аналитична в этой окрестности и в некоторой области значений u, p, q, определяемых рассматриваемым решением. Мы утверждаем, что рассматриваемое решение u не только дважды непрерывно дифференцируемо, но и аналитично.

Мы докажем это с помощью *продолжения в комплексную область*, непрерывно продолжая u до комплекснозначной дважды непрерывно дифференцируемой функции аргументов x_1, x_2, y_1, y_2, удовлетворяющей уравнению (1)[1]). Вводя комплексные переменные $x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2$, мы постараемся построить функцию $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — ниже будет доказано, что она аналитична по x и y, — которая при $x_2=y_2=0$ сводится к заданной функции $u(x, y)=u(x_1, y_1)$.

Продолжение осуществляется постепенно; сначала для фиксированного x_1 мы продолжим исходную функцию $u(x_1, y_1)$ до комплекснозначной функции $u(x_1, x_2, y_1)$, а затем эту функцию продолжим до комплексной функции $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Функцию f мы продолжим как аналитическую функцию своих аргументов; тогда она

мы пока будем считать y_1, y_2 параметрами, то функция w внутри K_x будет представлена с помощью интегральной формулы Коши

$$w(x_1, x_2; y_1, y_2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_x}\frac{w(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2)}{(\xi_1+i\xi_2)-(x_1+ix_2)}(d\xi_1+id\xi_2).$$

Аналогично, окружность $K_y: |y-\eta|=M/2$ и соответствующий круг целиком лежат в B, если η_1 и η_2 удовлетворяют соотношению $|\eta|\leqslant\frac{M}{2}$. Поэтому w можно представить также в виде

$$w(\xi_1, \xi_2; y_1, y_2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_y}\frac{w(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)}{(\eta_1+i\eta_2)-(y_1+iy_2)}(d\eta_1+id\eta_2).$$

С помощью подстановки мы получаем представление через двойной интеграл Коши

$$w(x_1, x_2; y_1, y_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{K_x}\int\limits_{K_y}w(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)\frac{(d\xi_1+id\xi_2)(d\eta_1+id\eta_2)}{(\xi_1+i\xi_2-x)(\eta_1+i\eta_2-y)}.$$

Дробь, стоящую в подинтегральном выражении, можно теперь разложить в степенной ряд по x и y, так же как в случае одной переменной, а полученное выражение проинтегрировать почленно. Тогда мы получим для w искомое представление в виде ряда.

[1]) Для нашего уравнения доказательство можно было бы так же просто получить, применяя методы теории потенциала. Однако метод Ганса Леви представляет самостоятельный интерес и открывает возможность для решения других задач (см. работы Г. Леви [5], [3] и [4]). Аналогичные идеи, связанные с продолжением решений в пространство большего числа измерений, успешно применялись в других, но связанных с этой, областях (см. Г. Леви [2]).

автоматически будет непрерывно дифференцируемой по этим аргументам.

Наш первый шаг состоит в том, что мы будем рассматривать x_1 как параметр и попытаемся определить новую функцию $u(x_1, x_2, y_1)$ с помощью дифференциального уравнения

$$u_{y_1y_1} - u_{x_2x_2} = f(x_1 + ix_2, y_1, u, -iu_{x_2}, u_{y_1}), \tag{4}$$

которое возникает из уравнения (3), если мы формально заменим x на $x_1 + ix_2$. Здесь x_1 считается фиксированным параметром, а y_1 и x_2 — два действительных независимых переменных в комплексном дифференциальном уравнении. Мы рассмотрим для этого уравнения задачу Коши с начальными данными на линии $x_2 = 0$. Начальное условие на этой линии имеет вид

$$u(x_1, 0, y_1) = u(x_1, y_1), \tag{5}$$

где правая часть есть исходное действительное решение уравнения (3).

В качестве второго начального значения мы зададим u_{x_2}, определив его из условия

$$\nabla u \equiv u_{x_1} + iu_{x_2} = 0 \quad \text{для} \quad x_2 = 0, \tag{6}$$

которое означает, что на начальной линии выполняется условие Коши — Римана. Таким образом, согласно теории, изложенной выше, функцию $u(x_1, y_1)$ можно однозначно продолжить до $u(x_1, x_2, y_1)$ в некоторой окрестности начальной кривой. Так как, кроме того, $u(x_1, y_1)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по параметру x_1 в некотором интервале (см. гл. V, § 5), то функция $u(x_1, x_2, y_1)$ определена и непрерывно дифференцируема по x_1 в некотором параллелепипеде, который является окрестностью точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$. Аналогично, производная u_{x_2} непрерывно дифференцируема по x_1.

Дифференцируя второе начальное условие (6) по параметру x_1, мы получаем соотношение $\frac{\partial(\nabla u)}{\partial x_1} = u_{x_1x_1} + iu_{x_2x_1} = 0$. Положив $x_2 = 0$, вычтем из уравнения (3) уравнение (4). Мы получим

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0 \quad \text{для} \quad x_2 = 0$$

или, применяя полученное выше соотношение,

$$u_{x_2x_2} - iu_{x_2x_1} = 0,$$

или же

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u \equiv \frac{\partial}{\partial x_2}(u_{x_1} + iu_{x_2}) = 0. \tag{7}$$

Теперь мы применим оператор Коши ∇ к уравнению (4). Полагая для краткости $\nabla u = \omega$, мы после формального дифференцирования получим

$$\omega_{y_1y_1} - \omega_{x_2x_2} = f_x \nabla x + f_u \nabla u - if_p \nabla u_{x_2} + f_q \nabla u_{y_1}.$$

Так как $\nabla x = 0$, мы, наконец, получим

$$\omega_{y_1 y_1} - \omega_{x_2 x_2} = f_u \omega - i f_p \omega_{x_2} + f_q \omega_{y_1}.$$

Коэффициенты в правой части — известные комплексные функции y_1 и x_2. Поэтому наше уравнение является линейным однородным гиперболическим дифференциальным уравнением относительно функции ω; в силу предыдущих результатов, для него однозначно определяется решение задачи Коши. Но так как, в силу условий (6) и (7), начальные значения ω и $\partial\omega/\partial x_2$ обращаются в нуль, $\omega = 0$ тождественно в некоторой трехмерной окрестности Q начала координат.

Теперь мы должны сделать второй шаг, а именно продолжить u в четырехмерную область x_1, x_2, y_1, y_2. С этой целью мы рассмотрим любые два значения x_2 и y_1 в Q и продолжим u по новой переменной так, чтобы она удовлетворяла гиперболическому дифференциальному уравнению

$$u_{x_1 x_1} - u_{y_2 y_2} = f(x, y, u, u_{x_1}, -i u_{y_2}). \tag{8}$$

На прямой $y_2 = 0$ в плоскости x_1, y_2 мы зададим начальное условие

$$u(x_1, x_2, y_1, 0) = u(x_1, x_2, y_1),$$

а в качестве второго начального условия мы потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\Lambda u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2}\right) u = 0 \quad \text{для} \quad y_2 = 0. \tag{9}$$

Тем самым функция $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ определяется однозначно. В силу непрерывности решения уравнения (8) по переменным x_2, y_1, оно будет определено и непрерывно дифференцируемо по своим аргументам в некоторой четырехмерной окрестности B начала координат.

Теперь, чтобы доказать аналитичность функции u, нам остается установить, что всюду в B выполняются соотношения $\nabla u = 0$ и $\Lambda u = 0$. Соотношение $\Lambda u = 0$ для $y_2 = 0$ как раз и является нашим начальным условием (9). Кроме того, для $y_2 = 0$ выполняются оба уравнения (8) и (4), и с помощью вычитания мы получаем

$$u_{x_1 x_1} - u_{y_2 y_2} + u_{x_2 x_2} - u_{y_1 y_1} = 0 \quad \text{для} \quad y_2 = 0.$$

Но так как при $y_2 = 0$ мы, как было показано раньше, имеем также $\nabla u \equiv u_{x_1} + i u_{x_2} = 0$, то с помощью дифференцирования и вычитания мы получим, что

$$u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2} = 0 \quad \text{для} \quad y_2 = 0. \tag{10}$$

С другой стороны, там выполняется также условие (9), и, таким образом, с помощью дифференцирования по параметру y_1 мы получаем, что $u_{y_1y_1}+iu_{y_2y_2}=0$; применяя (10), получим

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\Lambda u=0 \quad \text{при} \quad y_2=0.$$

Из единственности решения задачи Коши, так же как и выше, мы получаем, что $\Lambda u=0$ всюду в четырехмерной области B. Аналогично доказывается, что в B выполняется соотношение $\nabla u=0$.

Так как из этого следует, что функция u — аналитическая в некоторой комплексной окрестности точки $x=x_1$, $y=y_1$, то мы доказали *аналитичность исходного решения* $u(x, y)$ *эллиптического дифференциального уравнения* $\Delta u=f$.

3. Замечание об общем дифференциальном уравнении $F(x, y, u, p, q, r, s, t)=0$. Идею Леви можно применить также и в случае общего аналитического дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Справедлива следующая теорема. *Если* $u(x, y)$ — *трижды непрерывно дифференцируемое решение эллиптического дифференциального уравнения, аналитического относительно всех своих аргументов, то сама функция* $u(x, y)$ *также является аналитической относительно переменных* x *и* y.

Детали доказательства читатель найдет в литературе[1]). Основная идея заключается в том, что, как и раньше, дифференциальное уравнение заменяется квазилинейной системой дифференциальных уравнений. Но, в силу ее эллиптического характера, в ней нельзя перейти к действительным характеристическим параметрам α и β. Тем не менее можно привести эту систему дифференциальных уравнений к виду

$$v^{\nu}_{\alpha\alpha}+v^{\nu}_{\beta\beta}=f_{\nu}\left(\alpha, \beta, v^1, v^2, \ldots; v^1_{\alpha}, v^2_{\alpha}, \ldots; v^1_{\beta}, v^2_{\beta}, \ldots\right)$$

с неизвестными функциями $v^1, v^2, \ldots$. Для такой системы можно почти без изменений применить теорию § 2, и на основании этой теории доказать аналитичность решения.

§ 5. *Применение комплексных переменных для продолжения решений*

Пусть u — решение аналитического эллиптического уравнения, удовлетворяющее аналитическим краевым условиям на части границы его области определения. С помощью продолжения в комплексную область Г. Леви [2], а также Гарабедян [2] доказали возможность

---

[1]) См. работу Г. Леви [6] и изложение доказательства Леви в книге Адамара [2].

аналитического продолжения решений эллиптических уравнений через границу. Важные приложения этого метода к продолжению минимальных поверхностей, к формулировке обобщенного принципа отражения, к задачам со свободной границей можно найти в указанной литературе [1]).

Мы дадим здесь только понятие об этом методе, рассмотрев очень элементарный пример.

В § 4 мы видели, что если функция u является решением аналитического эллиптического уравнения в действительной области, то ее можно продолжить в комплексную область, решая *задачу Коши* для некоторых гиперболических уравнений. Если функция u удовлетворяет аналитическим краевым условиям на аналитическом куске границы, то мы можем использовать продолжение краевых условий в комплексную область. При этом получается ***смешанная, с начальными и граничными условиями, задача*** для гиперболических уравнений, которые позволяют аналитически продолжить функцию u в более широкую область. Это и дает продолжение через кусок границы первоначально заданной области существования.

Чтобы получить сколько-нибудь общий результат такого рода, надо преодолеть значительные геометрические и аналитические трудности. Самые сильные полученные до сих пор результаты принадлежат Гарабедяну; в его работах даны ссылки на более ранние исследования Г. Леви и Адамара.

Мы продемонстрируем этот метод на примере простейшего нетривиального случая; рассмотрим уравнение (3) из § 4 в прямоугольнике R: $-\sigma \leqslant x \leqslant \sigma$, $-\tau \leqslant y \leqslant 0$, находящемся в нижней полуплоскости. Пусть $u=0$ на стороне $y=0$, и предположим, что u имеет непрерывные третьи производные в замкнутой области R. Мы будем продолжать u в полуплоскость $y>0$.

Введем, как и раньше, переменные x_1 и x_2. Уравнение (4) с начальными условиями (5) и (6) (см. предыдущий параграф) и с граничным условием

$$u=0 \quad \text{при} \quad y=0$$

дает гиперболическую почти линейную граничную задачу; мы знаем, что она имеет решение в достаточно малом треугольнике, ограниченном с одной стороны характеристиками, а с другой стороны — линией $y=0$, на которой заданы граничные значения (см. рис. 35).

Такой треугольник задается явно неравенствами

$$|y|+|x_2| \leqslant \rho, \quad y \leqslant 0; \tag{1}$$

x_1 входит в эту задачу только как параметр. Наибольшая область на плоскости x_2, y, в которой уравнение (4) (§ 4) имеет решение, зависит от x_1; для достаточно малых значений ρ решение будет

[1]) См. также вскоре выходящую в свет книгу Гарабедяна [1].

существовать при всех $|x_1| \leqslant \sigma$ и x_2, y, удовлетворяющих неравенствам (1).

Теперь мы знаем значения u, u_y при $y = 0$, $|x_2| \leqslant \rho$, $|x_1| \leqslant \sigma$. Эти данные позволяют нам найти u, решая задачу Коши для уравнения (4) (§ 4) в некоторой области, где $y > 0$, заключающей часть действительной полуплоскости $y > 0$, $x_2 = 0$.

Надо еще проверить, что полученное нами продолжение является решением исходного уравнения. Это можно сделать, показав, как и

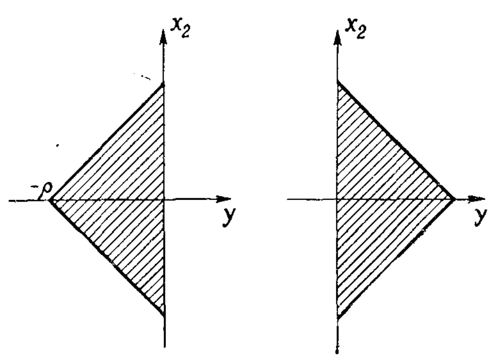


Рис. 35.

выше, что функция u удовлетворяет соответствующему уравнению в четырехмерной комплексной области; мы не будем на этом останавливаться.

Заметим, что для линейных уравнений вида (4) из § 4 область, в которую можно продолжить функцию u, зависит только от R и от расположения особенностей коэффициентов, но не от самого решения u. В частности, если коэффициенты не имеют особенностей, то функцию u можно продолжить на весь прямоугольник, который является зеркальным отражением R[1]).

ПРИЛОЖЕНИЕ[2]) *2 К ГЛАВЕ V*

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ХЕВИСАЙДА

Нестационарные задачи (см. гл. III, § 8) играют весьма важную роль в различных приложениях, например в электротехнике.

---

[1]) Как заметил Гарабедян, это соображение позволяет получить принцип отражения Леви (см. Г. Леви [2]).

[2]) Хотя это приложение тесно связано с задачами, рассмотренными в гл. III, V и VI, его следует рассматривать как вставку, несколько отличную по стилю и направленности от остальных частей книги.

Им посвящена обширная литература, в которой особо выделяется символический *метод операторов* Хевисайда. Этот метод дает очень прямой подход к задачам и часто позволяет получить явные решения, которые другим путем не могут быть так просто найдены. Сначала этот символический метод был предложен без строгого обоснования: Хевисайд выражал даже некоторое пренебрежение к опасениям профессиональных математиков. Но поразительный успех метода Хевисайда заставил объяснить его с математической точки зрения, что привело к полному оправданию и дальнейшему развитию символических методов.

Исчерпывающее изложение этого вопроса вышло бы за рамки этой книги[1]). Однако мы рассмотрим теорию нестационарных задач, по крайней мере простейшего вида, и приведем несколько примеров.

§ 1. Решение нестационарных задач с помощью интегральных представлений

1. Пример явного решения. Волновое уравнение. Мы будем искать решение волнового уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}=0 \tag{1}$$

на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,\,0)=0,\quad u_t(x,\,0)=0$$

и граничным условиям

$$u(0,\,t)=f(t),\quad u(l,\,t)=0 \tag{α}$$

или

$$u(0,\,t)=f(t),\quad u_x(l,\,t)=0, \tag{β}$$

где „сила“ $f(t)$ есть заданная функция t.

Первая задача (α) может относиться к струне, которая в начальный момент $t=0$ находится в состоянии покоя, закреплена в конце $x=l$, а на другом конце $x=0$ совершает движение, описываемое заданной функцией $f(t)$, вызывающей отклонение u.

Во второй задаче (β) струна совершает то же движение на конце $x=0$, но конец $x=l$ теперь может свободно перемещаться по прямой, перпендикулярной оси x (положению покоя). Вторую задачу можно также истолковать как задачу об определении напряжения $u(x,\,t)$ в идеальной линии передачи, где ток u_x обращается в нуль в конце. В обеих задачах мы предполагаем, что

$$f(t)=0\quad\text{для}\quad t\leqslant 0.$$

---

[1]) Читатель найдет подробное изложение, содержащее многие достижения последнего времени, в книге Микусинского [1].

Эту задачу легко явно решить, подбирая функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ в общем решении волнового уравнения

$$u(x, t) = \varphi(t + x) + \psi(t - x) \tag{2}$$

так, чтобы удовлетворялись начальные и граничные условия. Мы разделим ось λ на интервалы $J_\nu : \nu l \leqslant \lambda \leqslant (\nu + 1) l$, а затем последовательно определим φ и ψ в каждом из этих интервалов.

Сначала мы рассмотрим вторую задачу, соответствующую отражению относительно конца. Из начальных условий при $t = 0$ мы получим для искомых функций соотношения

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \psi(-x) &= 0, \\ \varphi'(x) + \psi'(-x) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Из первого соотношения с помощью дифференцирования получим

$$\varphi'(x) - \psi'(-x) = 0. \tag{3'}$$

Здесь x находится в интервале J_0, а $-x$ — в интервале J_{-1}. Отсюда следует, что функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ постоянны для λ, принадлежащих этим интервалам; соответствующим образом подобрав произвольную аддитивную константу для функций φ и $-\psi$, мы можем считать, что эти функции равны нулю. Из граничного условия для $x = 0$ следует, что для всех интервалов J_ν выполняется соотношение

$$\varphi(t) + \psi(t) = f(t). \tag{4}$$

Из условия отражения на другом конце следует, что

$$\lim_{x \to l} [\varphi'(t + x) - \psi'(t - x)] = 0. \tag{5}$$

Предполагая, что функция $\varphi(t + l) - \psi(t - l)$ всюду непрерывна, мы получим

$$\varphi(t + l) - \psi(t - l) = 0, \tag{6}$$

откуда следует рекуррентная формула

$$\varphi(t + 2l) = \psi(t), \tag{7}$$

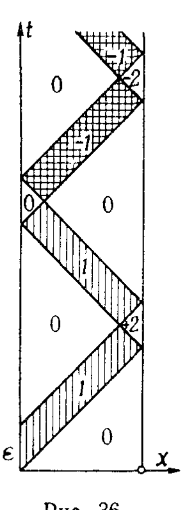
справедливая для всех t, принадлежащих интервалам $J_{-1}, J_0, \ldots$. Из соотношений (4) и (7) однозначно определяются функции φ и ψ, а следовательно, и $u(x, t)$ для всех значений $t > 0$. Как легко проверить, решение можно явно записать в виде

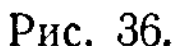
$$u(x, t) = f(t - x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu [f(t - x - 2\nu l) - f(t + x - 2\nu l)]. \tag{8}$$

Правая часть здесь представляет собой бесконечную сумму, но в каждый момент времени t только конечное число ее слагаемых отлично от нуля. Мы можем считать, что этот ряд описывает движение волны;

решение является суперпозицией волн, имеющих форму $f(\lambda)$ или $f(-\lambda)$ и перемещающихся по струне $-\infty < x < \infty$ в обоих направлениях.

Надо отметить одно свойство этого решения. Предположим, что $f(t)$ представляет собой импульс [1]), например, $f(t) = 1$ в малом интервале $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ и $f(t) = 0$ всюду вне этого интервала. Тогда в конечной точке $x = l$ функция u при значениях времени $l < t < l + \varepsilon$ будет принимать значение 2 (см. рис. 36). В приложениях к электротехнике, когда u обозначает напряжение, это значит, что в линии




Рис. 36.

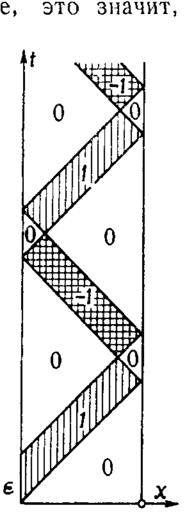


Рис. 37.

передачи с бесконечным сопротивлением на конце приложенное напряжение может быть удвоено.

Задачу (α) с закрепленным концом можно решить явно таким же простым способом:

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \qquad (9)$$

Это решение также можно наглядно представить себе как суперпозицию волн одинаковой формы. Рис. 37 соответствует импульсу, для которого функция $f(t)$ равна 1 на интервале $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ и нулю вне этого интервала. На нашем рисунке полоса, рассматриваемая на плоскости x, t, разделена на области, в которых функция u принимает значения $+1$, -1 или нуль.

---

[1]) Слово „импульс" мы будем применять для описания мгновенных явлений.

2. Общая формулировка задачи. Изучая нестационарные задачи с более общей точки зрения, мы ограничимся случаем одного пространственного переменного x и временно́й координаты t; случай нескольких пространственных переменных можно изучить аналогичным образом. Мы будем рассматривать следующую задачу.

Задача I. Пусть задано дифференциальное уравнение

$$au_{tt} + bu_t = L[u] \equiv pu_{xx} + qu_x + ru, \tag{10}$$

причем a, b, p, q, r — непрерывные функции одного только x на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ и удовлетворяют на этом отрезке следующим условиям:

$$(\alpha) \quad p > 0,$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} a > 0 & \text{в гиперболическом случае,} \\ a = 0, \ \ b > 0 & \text{в параболическом случае.} \end{cases}$$

На отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ и для значений времени $t > 0$ отыскивается решение $u(x, t)$ уравнения (10), удовлетворяющее *начальным условиям*

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = \varphi(x), \\ &u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{(в гиперболическом случае)} \end{aligned} \tag{11}$$

и *граничным условиям*

$$\begin{aligned} u(0, t) &= f(t), \\ \rho u_x(l, t) + \lambda u_t(l, t) &= \sigma u(l, t). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(t)$ — заданные функции, а ρ, λ и σ — заданные постоянные.

В частности, мы рассмотрим самый важный случай, когда $\varphi = \psi = 0$, т. е. когда при $t = 0$ имеет место состояние покоя[1]) (нестационарная задача в собственном смысле, см. гл. III, § 6, стр. 226).

3. Интеграл Дюамеля. Для таких начальных значений, т. е. для $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ в гиперболическом случае, или $u(x, 0) = 0$ в параболическом случае, общую задачу I легко можно свести к задаче с функцией $f(t)$ специального вида (см. гл. III, § 4). Заметим, что, так как коэффициенты не зависят от t, производные u_t, u_{tt} (если они существуют или могут быть соответствующим образом определены) являются решениями, соответствующими „силам“ $f'(t)$, $f''(t)$, ...

---

[1]) Как мы видели в гл. III, § 8, общий случай формальным способом можно всегда свести к этому случаю.

Введем решение $U(x, t)$ с разрывным граничным условием

$$U(0, t) = f(t) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{для} \quad t < 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее некоторым граничным условиям при $x = l$,

$$U(x, 0) = 0,$$

и предположим, что любую ограниченную часть полосы $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, можно разделить на конечное число замкнутых подобластей, в которых решение U непрерывно вместе со своими производными до второго порядка[1]). Такую функцию U можно ввести либо как вторую производную по времени от решения $U_2(x, t)$, соответствующего граничному условию

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & \text{для} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{для} \quad t < 0, \end{cases}$$

либо непосредственно, обращаясь к понятию обобщенных функций, или распределений (см. гл. VI, § 3 и приложение).

Тогда справедлива

Теорема Дюамеля. *Если функция $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ кусочно-непрерывны для $t > 0$, то интеграл Дюамеля*

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t U(x, t - \tau) f(\tau)\, d\tau \tag{13}$$

является решением задачи I *с граничными условиями* (12).

Функция $U(x, t)$ не должна быть всюду непрерывной, как будет показано на примерах. Действительно, мы должны ожидать, что функция U будет разрывной, так как граничное условие $U(0, t) = 1$ вместе с начальным условием $U(x, 0) = 0$ означает, что в точке $x = 0$ в момент времени $t = 0$ возникает импульс, который мгновенно повышает значение $U(0, 0) = 0$ до значения 1. Отсюда становится интуитивно понятным смысл интеграла Дюамеля (13).

Мы представляем себе, что действие „силы“ $f(t)$ (на левом конце отрезка) слагается из отдельных импульсов, возникающих в моменты $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Каждый импульс заставляет значение $u(0, \tau_{\nu-1})$ скачком измениться на величину $f(\tau_\nu) - f(\tau_{\nu-1})$. Если $U(x, t)$ — определенное выше решение специального вида, то решение $u(x, t)$,

---

[1]) Этот факт может быть обоснован с помощью исследования распространения разрывов, приведенного в гл. V, § 9, и ниже, гл. VI, § 4.

соответствующее этим импульсам, может быть записано в виде

$$u(x, t) = \sum_{\nu=0}^{n} U(x, t-\tau_\nu)[f(\tau_{\nu+1}) - f(\tau_\nu)] + U(x, t) f(0) \quad (\tau_{\nu+1} = t).$$

Если мы предположим, что функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$, но $f(0)$ может отличаться от нуля — это соответствует конечному скачку в момент $t = 0$ — и если мы перейдем к пределу, устремляя интервалы времени к нулю, то мы получим решение

$$u(x, t) = U(x, t) f(0) + \int_0^t U(x, t-\tau) f'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t U(x, t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{13'}$$

что соответствует формуле (13).

Эти наводящие соображения легко можно заменить непосредственной проверкой, основанной на тождестве

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t U(x, t-\tau) f(\tau)\, d\tau = U(x, t) f(0) +$$

$$+ U_1(x, t) f'(0) + U_2(x, t) f''(0) + \int_0^t U_2(x, t-\tau) f'''(\tau)\, d\tau,$$

которое справедливо, так как $U_2(x, 0) = U_1(x, 0) = 0$, где $U_1(x, t)$ есть решение, соответствующее граничному условию

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{для} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{для} \quad t < 0. \end{cases}$$

Это тождество показывает, что дифференциальное уравнение и граничные условия, заданные на конце $x = l$ для функций U, U_1 и U_2, *выполняются и для функции* $u(x, t)$. То, что u удовлетворяет начальным условиям, вытекает из следующего замечания: из дифференциального уравнения и из условий $U_2(x, 0) = U_1(x, 0) = 0$ следует, что $U(x, 0) = U_t(x, 0) = 0$. Наконец, так как $U(0, t) = 1$, из формулы (13') получается, что $u(0, t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\, d\tau = f(t)$. Следовательно, первое из граничных условий (12) выполняется.

Интегральную формулу Дюамеля (13) можно рассматривать как представление линейного оператора T, который преобразует заданные граничные значения $f(t)$ в решение $u(x, t)$, т. е. формула (13) есть

представление оператора $u = Tf$. Однако интегральная формула Дюамеля справедлива не только для такого оператора T, который рассматривался здесь и определял решение задачи для дифференциального уравнения, а для всех линейных операторов T, удовлетворяющих следующим условиям[1]).

а) Оператор T определен для всех функций $f(t)$, равных нулю при $t < 0$, и преобразует $f(t)$ в функцию $Tf(t)$, также равную нулю при $t < 0$, ($Tf(t)$ может, кроме t, зависеть также от других переменных[2]): $x, \ldots$).

б)
$$T \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(t, \tau)\, d\tau = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} Tf(t, \tau)\, d\tau;$$

здесь τ — параметр.

в) Если $f(0) = 0$ и если функция $f(t)$ дифференцируема, то

$$\frac{d}{dt}(Tf(t)) = T\frac{df(t)}{dt}.$$

г) Если $Tf(t) = \varphi(t)$, то для всех $\tau > 0$

$$Tf(t-\tau) = \varphi(t-\tau).$$

Чтобы доказать справедливость формулы (13), достаточно представить $f(t)$ в виде

$$f(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty \eta(t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

где

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{для} \quad t < 0. \end{cases}$$

Из этого, в силу условий а), б), в) и г), следует, что

$$Tf(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty T\eta(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t U(t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

где

$$U = T\eta.$$

Можно убедиться, что условия а), б), в) и г) полностью характеризуют класс линейных операторов, представимых в виде интеграла Дюамеля.

4. Метод суперпозиции экспоненциальных решений. Рассматривая задачу Коши в гл. III, § 7, мы применяли метод, связанный

[1]) Это замечание возникло как следствие замечания, сделанного в русском переводе первоначального немецкого издания.

[2]) Зависимость функции от этих переменных явно не указывается.

с интегралом Фурье, т. е. с суперпозицией решений, представимых в виде экспоненциальных функций; этот метод после соответствующих изменений может быть применен и к решению смешанных задач. Мы здесь снова ограничимся наводящими соображениями; они будут в § 3 дополнены теоремой существования. Рассмотрим специальную задачу с $u(0, t)=1$, $u(x, 0)=u_t(x, 0)=0$ и будем искать функцию $U(x, t)$, введенную в предыдущем пункте.

Сначала мы построим частные решения дифференциального уравнения (10)

$$au_{tt}+bu_t=L[u]$$

вида

$$u=e^{\gamma t}v(x, \gamma) \qquad (\gamma=\alpha+i\beta).$$

Для v получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L[v]=(a\gamma^2+b\gamma)v, \tag{14}$$

куда γ входит как параметр. Если на конце $x=l$ мы наложим на v граничное условие

$$\rho v_x=(\sigma-\lambda\gamma)v, \tag{15}$$

то функция

$$u=v(x, \gamma)e^{\gamma t}$$

будет, очевидно, удовлетворять заданному граничному условию (12)

$$\rho u_x+\lambda u_t=\sigma u;$$

то же самое справедливо относительно любой линейной комбинации таких решений с различными параметрами γ. Теперь мы постараемся удовлетворить граничному условию $u(0, t)=1$ для $t>0$ и начальным условиям $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=0$ с помощью суперпозиции таких решений.

С этой целью мы предположим, что функция v и ее производные являются аналитическими функциями комплексного параметра $\gamma=\alpha+$ $+i\beta$ в полуплоскости $\alpha>0$. Интегрируя по контуру L, лежащему в правой полуплоскости комплексного переменного γ, мы получим новые решения дифференциального уравнения (10), удовлетворяющие второму из граничных условий (12). Эти решения имеют вид

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma}e^{\gamma t}\,d\gamma. \tag{16}$$

При $x=0$ мы получаем

$$u(0, t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{v(0, \gamma)}{\gamma}e^{\gamma t}\,d\gamma,$$

и задача состоит в том, чтобы выбрать путь интегрирования L и граничные значения $v(0, \gamma)$ таким образом, чтобы

$$u(0, t) = 1 \quad \text{для} \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = 0 \quad \text{для} \quad t < 0.$$

Граничное условие при $x = 0$ будет выполнено, если мы положим

$$v(0, \gamma) = 1 \tag{15'}$$

и возьмем в качестве L любую прямую, параллельную мнимой оси на плоскости γ и лежащую в правой полуплоскости $\alpha > 0$. При таком выборе L мы получим интеграл

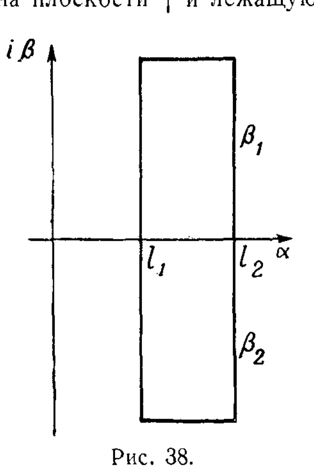


Рис. 38.

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta t}}{\alpha + i\beta} d\beta, \tag{17}$$

который в силу элементарных теорем сходится при всех $\alpha \neq 0$, $t \neq 0$. Так как интеграл $\int_{l_1 + i\beta}^{l_2 + i\beta} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma$, взятый по прямолинейному отрезку длины $l_2 - l_1$, параллельному действительной оси α, стремится к нулю при возрастании $|\beta|$, то интеграл (17) не зависит от α. Это обычным способом получается из интегральной теоремы Коши (см. рис. 38). Следовательно, если мы устремим α к бесконечности, то сразу получим, что $u(0, t) = 0$ для $t < 0$. В случае $t > 0$, применяя интегральную теорему Коши и вычисляя вычет при $\gamma = 0$, мы получим уравнение

$$u(0, t) = 1 + \frac{1}{2\pi i\alpha} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma,$$

где α отрицательно, но в остальном произвольно. Переходя к пределу при $\alpha \to -\infty$, мы получим, что $u(0, t) = 1$ для $t > 0$.

Поэтому кажется правдоподобным, что выражение

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma \tag{18}$$

является искомым решением уравнения (10). Между прочим, мы не можем всегда ожидать, что этот интеграл будет абсолютно сходиться,

так как для заданного x функция $U(x, t)$, вообще говоря, будет иметь разрывы по t. Эту трудность можно обойти при помощи следующего метода.

Для достаточно больших n мы рассмотрим выражение

$$U_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{n!} \int_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma^{n+1}} e^{\gamma t} d\gamma,$$

соответствующее функции $f(t) = t^n/n!$ для $t > 0$, $f(t) = 0$ для $t < 0$. Это представление для $U_n(x, t)$ хорошо сходится для больших n, и легко проверяется, что оно дает решение смешанной задачи. Тогда функцию U можно получить из U_n с помощью дифференцирования по t. Эти предварительные соображения, имеющие эвристический характер, будут снова рассмотрены и изучены с несколько иной точки зрения в § 3.

§ 2. Операторный метод Хевисайда

На практике *символический метод Хевисайда* имеет большие преимущества по сравнению с методом, описанным в § 1, п. 4. Его можно строго обосновать на основе понятий, введенных в § 1 и 3. Преимущество метода Хевисайда состоит в том, что формальное вычисление решения отделяется от математического содержания метода. Это разделение позволяет отложить обоснование формально полученного результата. Кроме того, реализацию символических операторов можно задавать в форме таблиц. Таким образом, во многих приложениях можно избежать трудностей, связанных с неформальным математическим содержанием метода.

Основная идея этого формального исчисления состоит в рассмотрении линейного преобразования, которое заданной граничной функции $f(t)$ ставит в соответствие решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения из § 1, п. 3. Мы снова ограничимся нестационарной задачей в собственном смысле, когда при $t = 0$ имеет место состояние покоя.

1. Простейшие операторы. Метод основан на введении *операторов дифференцирования* и *интегрирования* p и p^{-1}, которые являются обратными друг к другу. Мы рассматриваем функции времени t для $t > 0$ (которые мы продолжаем для $t < 0$ тождественным нулем) и вводим оператор интегрирования p^{-1} при помощи формулы

$$p^{-1} f(t) = g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Если мы обозначим оператор дифференцирования через p, так что

$$pg(t) = f(t) = \frac{dg}{dt}, \tag{2}$$

то равенство

$$pp^{-1} = p^{-1}p = 1 \tag{3}$$

будет лежать в основе построения исчисления с правилами, аналогичными алгебраическим. Чтобы было справедливо это соотношение, т. е. операторы p и p^{-1} были обратны друг другу, мы должны наложить очень сильное ограничение.

Оператор p можно применять только к таким функциям $g(t)$, для которых $g(0) = 0$.

Иначе мы имели бы

$$p^{-1}pg = \int_0^t \frac{dg(\tau)}{d\tau}\, d\tau = g(t) - g(0),$$

$$pp^{-1}g = \frac{d}{dt}\int_0^t g(\tau)\, d\tau = g(t),$$

и, следовательно,

$$p^{-1}pg \neq pp^{-1}g.$$

Однако, в отличие от оператора p, оператор p^{-1} можно применять к произвольной непрерывной функции. Если

$$Q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_m\lambda^m$$

— произвольный полином степени m, то мы можем очевидным образом определить *рациональный интегральный* оператор $Q(p^{-1})$ и применить его к произвольной функции f. Соответствующий оператор $Q(p)$ определяется как линейный дифференциальный оператор порядка m, но его можно применять только к функциям f, равным нулю при $t = 0$ вместе со своими производными до порядка $m - 1$.

Если

$$P(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_n\lambda^n$$

— другой полином степени n и если $Q(0) = a_0 \neq 0$, то

$$R(p^{-1}) = \frac{P(p^{-1})}{Q(p^{-1})} \tag{4}$$

называется *дробно-рациональным регулярным оператором.*

Этот оператор

$$R(p^{-1})\, f(t) = g(t)$$

может быть определен различными способами.

Во-первых, для заданной функции f, кусочно-непрерывной при $t > 0$, можно определить g как решение дифференциального уравнения

$$a_0 g^{(m)} + a_1 g^{(m-1)} + \ldots + a_m g = \varphi^{(m)}, \tag{5}$$

где $\varphi = P(p^{-1}) f$. Это решение однозначно определяется тем, что оно должно удовлетворять начальным условиям

$$\begin{aligned} a_0 g(0) &= \varphi(0), \\ a_0 g'(0) + a_1 g(0) &= \varphi'(0), \\ a_0 g''(0) + a_1 g'(0) + a_2 g(0) &= \varphi''(0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_0 g^{(m-1)}(0) + a_1 g^{(m-2)}(0) + \ldots + a_{m-1} g(0) &= \varphi^{(m-1)}(0). \end{aligned} \tag{6}$$

Во-вторых, g можно определить, если мы разложим рациональную функцию

$$P(\lambda)/Q(\lambda) = R(\lambda)$$

в окрестности начала координат в степенной ряд по λ,

$$R(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \lambda^\nu.$$

Легко видеть, что соответствующий ряд

$$R(p^{-1}) f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu p^{-\nu} f(t)$$

сходится для всех положительных значений t и совпадает с определенной выше функцией $g(t)$.

Если коэффициент a_0 равен нулю, то рациональный оператор называется *нерегулярным* и может быть представлен в виде

$$p^k R(p^{-1}),$$

где оператор R — регулярный. Чтобы можно было применить такой оператор к функции f, мы должны предполагать, что

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0.$$

Ясно, что над этими операторами можно производить рациональные операции в соответствии с правилами алгебры. Для этих операторов из данного в § 1 представления Дюамеля можно вывести следующее утверждение.

Если для „единичной функции" Хевисайда $\eta(t)$, определенной формулами

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{для } t < 0, \end{cases}$$

и для оператора T выполняется соотношение[1])

$$T\eta(t)=H(t), \tag{7}$$

то мы имеем

$$Tf(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t H(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{8}$$

для произвольной функции $f(t)$.

Чтобы расширить область применения операционного исчисления, очень важно определить не только рациональные, но и более общие функции от p таким образом, чтобы в этом расширенном множестве операторов сохранились законы алгебры, принцип Дюамеля и некоторые другие законы, которые будут введены ниже.

2. Примеры операторов и приложения. В этом пункте мы рассмотрим несколько простых операторов и покажем, как их можно применить к решению дифференциальных уравнений.

1) Для оператора

$$T=\frac{1}{1+\alpha p^{-1}}$$

мы имеем

$$T\eta=e^{-\alpha t},\quad Tf(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau=g(t).$$

Здесь g является решением дифференциального уравнения

$$g'+\alpha g=f',\quad \text{причем}\quad g(0)=f(0).$$

2) Для оператора

$$T=\frac{1}{1+\nu^2p^{-2}}$$

мы имеем

$$T\eta=\cos\nu t,\quad Tf=g(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t \cos\nu(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Здесь g есть решение дифференциального уравнения

$$g''+\nu^2g=f''$$

с начальными условиями

$$g(0)=f(0),\ \ g'(0=f'(0).$$

---

[1]) В литературе единичная функция $\eta(t)$ часто не выписывается явно. Символ оператора T тогда просто обозначает функцию $T\eta$. Между прочим, если мы захотим выразить тот факт, что некоторая функция $f(t)$, определенная для $t>0$, продолжается нулем для $t<0$, то иногда мы будем писать $f(t)\,\eta(t)$ вместо $f(t)$.

3) Рассмотрим неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \ldots + a_m u = f(t) \tag{9}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(m-1)}(0) = 0. \tag{9'}$$

При этих начальных условиях мы можем символически записать дифференциальное уравнение в виде

$$Q(p)\,u = f(t) \quad \left(Q(\lambda) = a_0\lambda^m + \ldots + a_m\right);$$

его решение имеет символическую форму

$$u(t) = \frac{1}{Q(p)}\,f(t). \tag{10}$$

Если алгебраическое уравнение

$$Q(\lambda) = 0$$

имеет m различных корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \neq 0$, то мы можем получить решение очень изящным способом с помощью простейших дробей.

Из формулы

$$\frac{1}{pQ(p)} = \frac{c_0}{p} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{c_\nu}{p-\alpha_\nu}$$

мы получаем

$$u(t) = \frac{1}{Q(p)}\,f(t) = c_0 f(t) + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{c_\nu p}{p-a_\nu}\,f(t).$$

В частном случае, когда

$$f(t) = e^{i\omega t}\eta(t) \qquad (i\omega \neq \alpha_\nu),$$

мы можем, не применяя интеграла Дюамеля, получить реализацию нашего оператора с помощью следующего, еще более изящного метода.

Запишем $f(t)$ в виде

$$f(t) = \frac{p}{p-i\omega}\,\eta$$

и получим

$$u = \frac{p}{L[p]}\,\eta,$$

где для краткости мы полагаем

$$L[p] = (p-i\omega)\,Q = a_0(p-\alpha_1)\ldots(p-\alpha_m)(p-i\omega).$$

Мы можем записать дробно-рациональный оператор в виде

$$\frac{p}{L[p]}=\frac{d_0 p}{p-i\omega}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{d_\nu p}{p-\alpha_\nu},$$

причем коэффициенты разложения на простейшие дроби определяются формулами

$$d_0=\frac{1}{Q(i\omega)},\quad d_\nu=\frac{1}{\alpha_\nu-i\omega}\,\frac{1}{Q'(\alpha_\nu)}.$$

Вспоминая наш первый пример, мы теперь сразу получаем искомое решение

$$u=d_0e^{i\omega t}+\sum_{\nu=1}^{m}d_\nu e^{\alpha_\nu t}. \tag{11}$$

Конечно, коэффициент d_0 наиболее важен для приложений.

4) В качестве другого примера рассмотрим „сингулярные операторы“

$$p^{1/2},\ p^{-1/2}; \tag{12}$$

их надо определить в соответствии с нашими правилами, указанными выше, если мы расширяем согласованным образом наш запас операторов. Теория дифференцирования и интегрирования дробного порядка подсказывает следующее определение:

$$\begin{aligned} p^{-1/2}\eta&=2\sqrt{t/\pi};\quad p^{-1/2}f(t)=\left(2/\sqrt{\pi}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t\sqrt{t-\tau}\,f(\tau)\,d\tau;\\ p^{1/2}\eta&=1/\sqrt{\pi t};\quad p^{1/2}f(t)=\left(1/\sqrt{\pi}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau. \end{aligned} \tag{13}$$

Как легко проверить, это определение действительно удовлетворяет требованию

$$p^{-1/2}p^{-1/2}\eta=p^{-1}\eta.$$

Это же определение можно получить в результате следующих рассуждений. Соотношение $p^{-n}\eta=ct^n$ удовлетворяется для $c=1/n!$. Поэтому естественно положить

$$p^{-1/2}\eta=c\sqrt{t},$$

где константа c должна быть определена соответствующим образом. Если мы потребуем, чтобы был справедлив принцип Дюамеля и выполнялось соотношение

$$p^{-1/2}p^{-1/2}\eta=p^{-1}\eta=t,$$

то мы получим

$$t = c^2 \frac{d}{dt} \int_0^t \sqrt{t-\tau}\,\sqrt{\tau}\,d\tau = 2c^2 t \int_0^1 \sqrt{1-\tau}\,\sqrt{\tau}\,d\tau = c^2 \frac{\pi}{4} t,$$

и, следовательно,

$$c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом, константа c оказывается такой же, как и в формуле (13).

5) Очень важным примером оператора, который не является рациональным, служит *экспоненциальный оператор*, который для любой постоянной h вводится при помощи формулы

$$e^{-hp} f(t) = f(t-h). \tag{14}$$

Это определение подсказано рядами Тейлора для e^{-hp} и $f(t-h)$. Однако такие правдоподобные соображения не могут служить достаточным обоснованием, так как определение не должно зависеть от аналитической природы функции $f(t)$.

Обоснованием для нашего определения является тот факт, что из него следуют соотношения

$$e^{-hp} e^{-kp} f(t) = e^{-(h+k)p} f(t)$$

и

$$\frac{d}{dh} e^{-hp} f(t) = -pe^{-hp} f(t);$$

последнее соотношение эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dh} f(t-h) = -\frac{d}{dt} f(t-h).$$

6) Теперь для $h < 0$ мы рассмотрим оператор

$$e^{-h\sqrt{p}}, \tag{15}$$

который будет определен в п. 5. Здесь мы просто заметим, что, если наш оператор допускает дифференцирование по параметру h, из равенства $e^{-h\sqrt{p}} f = g$ мы получим уравнение

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -\sqrt{p}\, e^{-h\sqrt{p}} f.$$

Следует ожидать, что для значения параметра $h=0$ функция $\partial g/\partial h$ будет определяться формулой

$$\left.\frac{\partial g}{\partial h}\right|_{h=0} = -\sqrt{p}\, f = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau. \tag{16}$$

Это показывает, насколько прямым методом является операторный метод.

7) В качестве последнего примера в этой связи мы рассмотрим так называемый *принцип смещения* Хевисайда.

Если $T = \Phi(p)$ — *некоторый оператор, а* k — *постоянная, то оператор* $\Phi(p+k)$ *определяется формулой*

$$\Phi(p+k) = e^{-kt}\Phi(p)\,e^{kt}. \tag{17}$$

Эту формулу можно непосредственно проверить для всех регулярных рациональных операторов. Сначала по индукции от n к $n+1$ мы покажем, что принцип смещения справедлив для операторов $1/p^n$. Тогда он будет справедлив для всех регулярных рациональных операторов, так как они могут быть выражены через ряды относительно $1/p$. Затем мы сможем ввести принцип смещения для нерегулярных операторов в качестве постулата. Например, мы определим $\sqrt{p+\alpha^2}$ так:

$$\sqrt{p+\alpha^2}\,f(t) = e^{-\alpha^2 t}\sqrt{p}\,e^{\alpha^2 t}f(t) = \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\alpha^2 t}f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau, \tag{18}$$

и, в частности,

$$\begin{aligned}\sqrt{p+\alpha^2}\,\eta(t) &= \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\alpha^2\tau}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = \\ &= \frac{2e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha^2 t}\int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-\tau^2}\,d\tau\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Чтобы оправдать такое определение этих нерегулярных операторов, надо еще доказать, что оно согласуется с законами элементарной алгебры. Это будет сделано в п. 5.

3. Приложение к уравнению теплопроводности. Мы применим операторный метод к нескольким типичным примерам.

На полубесконечной оси рассмотрим *уравнение теплопроводности*

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{20}$$

Пусть заданы начальные и граничные условия

$$u(x,\ 0) = 0,$$

$$u(0,\ t) = f(t), \quad u(\infty,\ t) = 0.$$

Мы будем искать оператор $T = T(x)$ (зависящий от x как от параметра), преобразующий заданную функцию $f(t)$ в искомое решение $u(x,\ t)$.

Запишем дифференциальное уравнение в виде

$$(T_{xx} - pT)f = 0, \tag{21}$$

а граничные условия — в виде

$$T(0) = 1, \quad T(\infty) = 0.$$

Предполагая, что наши функции равны нулю при отрицательных значениях t, мы уже учитываем начальное условие, записав

$$u_t = pTf.$$

Рассматривая дифференциальное уравнение

$$T_{xx} - pT = 0$$

как уравнение, содержащее параметр p, мы немедленно получаем его решение

$$T = e^{-x\sqrt{p}}. \tag{22}$$

Возникает вопрос, как можно истолковать это символическое выражение и какие функции задаются формулами

$$e^{-x\sqrt{p}}\eta, \quad e^{-x\sqrt{p}}f(t).$$

На этот вопрос мы можем дать по крайней мере частичный ответ, который позволяет решать задачи, имеющие непосредственное значение для приложений: мы можем найти поток тепла при $x = 0$, т. е. явно найти выражение для $u_x(0, t)$, применяя к оператору T обычные правила. Применяя результат примера 6, п. 2, мы получим

$$u_x(0, t) = T_x(0)f = -\sqrt{p}f = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau.$$

Одно из главных преимуществ символического исчисления состоит в том, что мы имеем возможность получать частные результаты, такие, как этот, не находя полные выражения для операторов через известные функции.

Аналогично мы можем рассмотреть более *общее уравнение теплопроводности* $u_t - u_{xx} + \alpha^2 u = 0$ на интервале $0 \leqslant x < \infty$ с теми же начальными и граничными условиями, что и раньше. Для оператора $T(x)$, который дает решение $u(x, t) = T(x)f(t)$, справедливо символическое уравнение

$$T_{xx} = (p + \alpha^2)T. \tag{23}$$

При граничных условиях

$$T(0) = 1, \quad T(\infty) = 0$$

оно имеет символическое решение

$$T = e^{-x\sqrt{p+\alpha^2}}. \tag{24}$$

Нам еще труднее полностью истолковать этот оператор, чем оператор в предыдущем примере. Однако мы снова можем дать ответ на важную часть задачи; мы находим для $u_x(0, t)$ выражение

$$u_x(0, t) = T_x(0) f = -\sqrt{p+\alpha^2} f = -\frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{\alpha^2\tau} f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

где правая часть берется из примера 4, п. 2.

В частном случае единичной функции $f = \eta$ мы имеем

$$u_x(0, t) = -\frac{2e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha^2 t} \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau\right). \tag{25}$$

4. Волновое уравнение. Решение простейших смешанных задач, рассмотренных в § 1, п. 1, тоже можно объяснить с помощью операционного исчисления. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ мы рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{26}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0,$$
$$u(0, t) = f(t), \quad u_x(l, t) = 0.$$

Положим

$$u(x, t) = T(x) f.$$

Для оператора T мы получим дифференциальное уравнение

$$T_{xx} - p^2 T = 0 \tag{27}$$

с условиями

$$T(0) = 1, \quad T_x(l) = 0.$$

Мы получаем символическое выражение

$$T(x) = \frac{\operatorname{ch} p(l-x)}{\operatorname{ch} pl} = \frac{e^{-px} + e^{-p(2l-x)}}{1 + e^{-2pl}}, \tag{28}$$

или, если выписать его разложение в ряд,

$$T(x) = e^{-px} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu [e^{-p(x+2\nu l)} - e^{-p(2\nu l - x)}].$$

На основании примеров, рассмотренных в п. 2, теперь очень легко истолковать этот результат.

В соответствии с результатом, полученным в § 1, п. 1, мы имеем

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}[f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \quad (29)$$

Другая рассмотренная там задача (задача (α) с закрепленным концом), конечно, также может быть решена аналогичным способом. Для соответствующего оператора мы получаем

$$T(x) = \frac{\operatorname{sh} p(l-x)}{\operatorname{sh} pl}, \quad (30)$$

или

$$T = e^{-px} + \sum_{\nu=1}^{\infty}[e^{-p(x+2\nu l)} - e^{-p(2\nu l-x)}].$$

Поэтому

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}[f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \quad (31)$$

5. Обоснование операционного исчисления. Определение дальнейших операторов. Операционное исчисление можно строго обосновать. Сначала мы дадим общее определение наших операторов, а затем, на основании этого определения, мы проверим, что выполняются указанные правила вычислений, теорема о смещении и принцип Дюамеля. Мы проверим также, что это определение согласуется с теми, которые были даны раньше.

Соображения, приведенные в § 1, п. 4, оправдывают следующее определение.

Пусть $F(\gamma)$ — регулярная аналитическая функция переменного $\gamma = \alpha + i\beta$, определенная в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$. Пусть L — произвольная прямая, параллельная мнимой оси, лежащая в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$; если же $\alpha_0 < 0$, то L является контуром, изображенным на рис. 39. Тогда, в предположении, что интеграл $(1/2\pi i)\int_L (F(\gamma)/\gamma)\, e^{\gamma t}\, d\gamma$ существует и не зависит от конкретного выбора контура L для всех $t > 0$, мы полагаем

$$\begin{aligned} F(p)\,\eta &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma, \\ F(p)\,f &= \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\, d\tau \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma(t-\tau)}\, d\gamma. \end{aligned} \quad (32)$$

Достаточным условием существования интеграла (32) является, например, наличие такой положительной функции $\Phi(\rho)$, для которой сходится интеграл

$$\int_0^\infty \Phi(\rho)\,d\rho$$

и при всех $\gamma = \alpha + i\beta$ с $\alpha \geqslant \alpha_0 + \delta$, $\delta > 0$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{F(\gamma)}{\gamma}\right| \leqslant \Phi(|\beta|).$$

Тогда во втором интеграле в формулах (32) мы можем произвести интегрирование по τ под знаком интеграла; следовательно, если мы положим

$$D(\gamma, t) = \int_0^t f(\tau)\,e^{-\gamma\tau}\,d\tau,$$

то получим

$$F(p)\,f = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{dt}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma}\,D(\gamma, t)\,e^{\gamma t}\,d\gamma.$$

Справедливость законов операционного исчисления для операторов, определенных таким образом, обеспечивается *теоремой умножения*

$$F(p)\,G(p) = FG(p) \tag{33}$$

или, другими словами, тем, что *результат последовательного применения двух операторов F и G может быть также получен с помощью применения оператора, соответствующего произведению двух функций FG.*

Достаточно доказать эту теорему для единичной функции $\eta(t)$. Для доказательства мы введем следующие дополнительные предположения относительно функций F и G[1]): в любой полуплоскости $\alpha \geqslant \alpha_0 + \delta$ существует положительная функция $\psi(\rho)$, для которой интеграл $\int_0^\infty \psi^2\,d\rho$ сходится, такая, что всюду в этой полуплоскости

$$|F| \leqslant \psi(|\beta|), \quad |G| \leqslant \psi(|\beta|).$$

Тогда интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\psi}{\rho}\,d\rho \quad \text{и} \quad \int_1^\infty \frac{\psi^2}{\rho}\,d\rho$$

---

[1]) На самом деле эти ограничения слишком сильны для многих важных случаев. Теорему можно доказать при гораздо более слабых ограничениях. См., например, Коппенфельс [1].

также существуют — первый в силу неравенства Шварца

$$\int_1^\infty \frac{\psi}{\rho}\,d\rho \leqslant \sqrt{\int_1^\infty \psi^2\,d\rho}\,\sqrt{\int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^2}}.$$

Поэтому интегралы (32), соответствующие функциям F, G, FG, абсолютно сходятся. Если мы положим

$$f(t) = G(p)\,\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G(\delta)}{\delta}\,e^{\delta t}\,d\delta$$

и

$$D(\gamma, t) = \int_0^t f(\tau)\,e^{-\gamma\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G(\delta)}{\delta}\,\frac{e^{(\delta-\gamma)t}-1}{\delta-\gamma}\,d\delta,$$

то мы получим

$$FG\eta = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{dt}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma}\,D(\gamma, t)\,e^{\gamma t}\,d\gamma.$$

В силу наших предположений легко видеть, что дифференцирование под знаком интеграла всегда дает интеграл, равномерно сходящийся

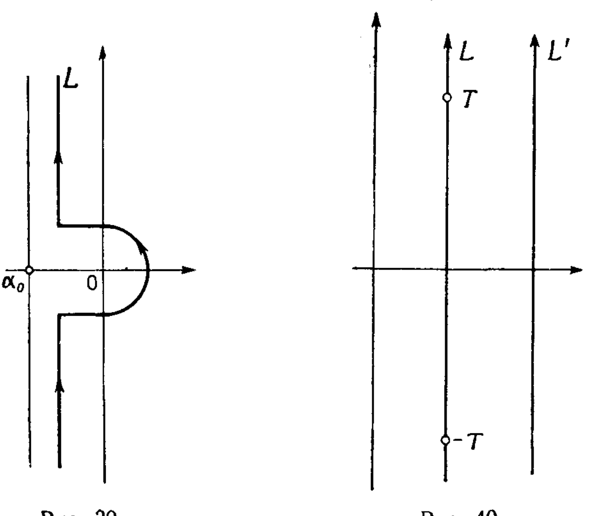


Рис. 39. Рис. 40.

в области $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ при $t_1 > 0$. Поэтому мы имеем

$$FG\eta = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma}\,d\gamma \int_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta}\,\frac{\delta e^{\delta t} - \gamma e^{\gamma t}}{\delta-\gamma}\,d\delta.$$

Здесь в качестве L' выбрана прямая, лежащая правее L и параллельная L (рис. 40).

Из оценки

$$\left| \int_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta(\delta-\gamma)}\, d\delta \right| \leqslant \frac{1}{\alpha'-\alpha} \int_{L'} \left| \frac{G(\delta)}{\delta} \right| d\beta'$$

следует, что второе слагаемое внутреннего интеграла в правой части становится сколь угодно малым при возрастании α'; это означает, что соответствующий интеграл равен нулю. Следовательно,

$$FG\eta = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma}\, d\gamma \int_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta-\gamma} e^{\delta t}\, d\delta.$$

Из наших предположений следует, что мы можем переменить порядок интегрирования[1]) в двойном интеграле. Мы получим

$$FG\eta = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L'} G(\delta)\, e^{\delta t}\, d\delta \int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma.$$

Таким образом, осталось только доказать соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma = \frac{F(\delta)}{\delta}.$$

Но оно является следствием интегральной теоремы Коши.

Обоснование *теоремы о смещении* также немедленно получается из представления в виде комплексного интеграла. Если $F(p)$ — заданный оператор и, следовательно,

$$F(p)\,\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma,$$

то мы имеем

$$F(p+k)\,\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\gamma+k)\, e^{\gamma t}}{\gamma}\, d\gamma = \frac{e^{-kt}}{2\pi i} \int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma-k} e^{\gamma t}\, d\gamma.$$

---

[1]) Пусть L_1 — конечный отрезок прямой L между точками с ординатами $-T$ и T (рис. 40); тогда мы имеем

$$FG\eta = \lim_{L_1 \to L} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L'} G(\delta)\, e^{\delta t}\, d\delta \int_{L_1} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma.$$

Это утверждение непосредственно следует из оценки

$$\left| \int_{L-L_1} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma \right| \leqslant \frac{1}{|\delta|} \sqrt{2\int_T^\infty \psi^2\, d\rho}\, \sqrt{2\int_L \left(\frac{1}{|\gamma|^2} + \frac{1}{|\gamma-\delta|^2} \right) d\beta}$$

и из сходимости интеграла $\int_0^\infty \psi^2\, d\rho$.

Это выражение означает, что

$$F(p+k)\eta = e^{-kt}F(p)\frac{p}{p-k}\eta.$$

Так как $\frac{p}{p-k}\eta = e^{kt}\eta$, то получается, что

$$F(p+k)\eta = e^{-kt}F(p)e^{kt}\eta.$$

Легко установить также эквивалентность определений, которыми мы пользовались в ранее рассмотренных примерах, и данного здесь интегрального определения. Мы имеем [1])

1) $$\frac{1}{p^n} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^{n+1}}\,d\gamma,$$

где n — положительная постоянная. Контур интегрирования можно деформировать в произвольную кривую, окружающую начало координат; следовательно,

$$\frac{1}{p^n} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\gamma^n}e^{\gamma t}\right]_{\gamma=0} = \frac{t^n}{n!}.$$

2) $$\frac{p}{p+\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma+\alpha}\,d\gamma = e^{-\alpha t}.$$

3) $$\frac{p}{(p+\alpha)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{(\alpha+\gamma)^{n+1}}\,d\gamma = e^{-\alpha t}\frac{t^n}{n!}.$$

4) $$\sqrt{p} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma.$$

Если мы заменим переменную γ на $k=\sqrt{\gamma}$, то получим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma = \frac{1}{\pi i}\int_{L'} e^{k^2}\,dk.$$

Путь интегрирования L' на плоскости k является (см. § 3, п. 3) правой ветвью произвольной равносторонней гиперболы и эквивалентен мнимой оси. Таким образом, мы имеем

$$\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

5) $$p^s = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma = t^{-s}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma.$$

---

[1]) Для краткости мы будем писать $F(p)$ вместо $F(p)\eta$.

Интеграл можно вычислить:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^\gamma}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma = \frac{1}{\Gamma(1-s)},$$

и, следовательно,

$$p^s = \frac{t^{-s}}{\Gamma(1-s)} \qquad (s<1).$$

6) $$e^{-kp} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma(t-k)}}{\gamma}\,d\gamma = \begin{cases} 0 & \text{для } t<k, \\ 1 & \text{для } t>k. \end{cases}$$

7) $$\frac{p}{p^2+a^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^2+a^2}\,d\gamma.$$

Если мы деформируем L в кривую, окружающую точки $\pm ia$, то мы получим

$$\frac{p}{p^2+a^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint e^{\gamma t}\,\frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{\gamma-ia}-\frac{1}{\gamma+ia}\right)d\gamma = \frac{\sin at}{a}.$$

8) В качестве примера дальнейших операторов мы рассмотрим

$$\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{-x\sqrt{\gamma}+\gamma t}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma. \tag{34}$$

Интеграл в правой части легко вычислить; мы имеем

$$\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-x^2/4t}. \tag{35}$$

Для оператора $e^{-x\sqrt{p}}$, вместо того, чтобы непосредственно вычислять интеграл

$$e^{-x\sqrt{p}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{-x\sqrt{\gamma}}}{\gamma}\,e^{\gamma t}\,d\gamma,$$

мы получим представление следующим образом:

$$e^{-x\sqrt{p}} = \sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}} = \sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}.$$

Таким образом,

$$e^{-x\sqrt{p}} = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t-\tau}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\,d\tau.$$

9) Формула

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2+a^2}}\,d\gamma = J_0(at) \tag{36}$$

приводит к интересному применению теоремы умножения. Если мы разложим оператор $p/(p^2+a^2)$ в произведение

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{1}{p}\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}},$$

то принцип Дюамеля дает

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\int_0^t J_0(a(t-\tau))\,J_0(a\tau)\,d\tau.$$

С другой стороны, в соответствии с примером 7, мы имеем

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{\sin at}{a}.$$

Таким образом, мы получаем следующую *интегральную теорему для функций Бесселя*:

$$\int_0^t J_0(a(t-\tau))\,J_0(a\tau)\,d\tau=\frac{\sin at}{a}. \tag{37}$$

10) Наконец, мы рассмотрим (см. т. I, гл. III, § 10, п. 9, стр. 140) интегральное уравнение Абеля

$$f(t)=\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,d\tau \qquad (0<\alpha<1), \tag{38}$$

т. е. операторное уравнение

$$pf=\Gamma(1-\alpha)\,p^{\alpha}\varphi.$$

Его решение есть

$$\varphi=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,p^{1-\alpha}f,$$

или

$$\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau. \tag{39}$$

Тогда, в силу того, что $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin\pi\alpha$, мы получаем отсюда решение

$$\varphi(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau, \tag{40}$$

что совпадает с результатом, полученным в т. I, стр. 140.

§ 3. Общая теория нестационарных задач

В предыдущем параграфе даны приложения операторного метода, но нет полного его обоснования. Вызывает сомнение, стоит ли формулировать те общие теоремы, опираясь на которые можно дедуктивным путем обосновать этот метод. Привлекательность метода состоит в том, что он легко и естественно применяется к задачам совершенно различных типов. Сведение всех этих возможностей в одну исчерпывающую теорему привело бы в лучшем случае к крайне неудобной формулировке. Здесь мы не будем предпринимать такую попытку, но мы сделаем шаг в этом направлении, продолжая идеи § 1, п. 4. Мы не только покажем, как этот метод может быть обоснован, но и сформулируем теорему, которая позволяет обосновать довольно сложные примеры. Основой здесь будет служить преобразование Лапласа, которое часто применялось для этой цели, в частности в работах Дётша [1], [2].

1. Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа непосредственно получается, если в двух теоремах об интегральных формулах Меллина (см. т. I, стр. 95, 96) мы заменим переменную x на e^{-x}, а функцию $g(x)$ на $g(e^{-x}) = \varphi(x)$. Однако мы независимо докажем *формулу обращения преобразования Лапласа* (с помощью интеграла Фурье) при несколько более широких предположениях.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(s)$ — *функция комплексного переменного* $s = \sigma + i\tau$, *регулярная и аналитическая в полосе* $\alpha < \sigma < \beta$. *Пусть в любой более узкой полосе* $\alpha + \delta \leqslant \sigma \leqslant \beta - \delta$ ($\delta > 0$ — *произвольное фиксированное число*) *задана положительная функция* $\Phi(\rho)$, *такая, что* $\int_0^\infty \Phi(\rho)\,d\rho$ *существует и всюду в полосе справедливо неравенство*

$$|\varphi(s)| \leqslant \Phi(|\tau|). \tag{1}$$

Тогда для действительных x *и фиксированного* σ *существует интеграл*

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \varphi(s)\, e^{xs}\, ds \tag{2}$$

и в полосе $\alpha < \sigma < \beta$ *выполняется уравнение*

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-xs}\, dx. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если $\psi(x)$ — кусочно-гладкая функция действительного переменного x и если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-\sigma x}\, dx$ абсолютно сходится при $\alpha < \sigma < \beta$, то из равенства* (3) *следует формула обращения* (2).

Следствие. *Если $\beta = \infty$ и, следовательно, функция $\varphi(s)$ регулярна на всей полуплоскости $\sigma > \alpha$, и если функция $\varphi(s)$ удовлетворяет сформулированным выше дополнительным условиям* [1]), *то мы имеем $\psi(x) = 0$ для $x < 0$. Таким образом, в этом случае справедливы формулы*

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \varphi(s)\, e^{xs}\, ds, \\ \varphi(s) &= \int\limits_{0}^{\infty} \psi(x)\, e^{-xs}\, dx. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Сначала мы докажем теорему 2. Пусть

$$\psi_T(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} \varphi(s)\, e^{xs}\, ds = \frac{e^{x\sigma}}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} \varphi(\sigma + i\tau)\, e^{ix\tau}\, d\tau.$$

Подставив вместо $\varphi(\sigma + i\tau)$ выражение

$$\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-\xi(\sigma + i\tau)}\, d\xi,$$

мы получим

$$\psi_T(x) = \frac{e^{x\sigma}}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-\sigma\xi} e^{-i(\xi - x)\tau}\, d\xi.$$

Так как функция $\psi(x)\, e^{-x\sigma}$ кусочно-гладкая и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|\, e^{-x\sigma}\, dx$ сходится при любом фиксированном σ в интервале $\alpha < \sigma < \beta$, из теоремы об интеграле Фурье (см. т. I, стр. 72) следует, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-\sigma\xi} e^{-i(\xi - x)\tau}\, d\xi$$

---

[1]) Мы имеем в виду условие, что для всех $\sigma \geqslant \alpha + \delta$ существует соответствующая функция $\Phi(\rho)$.

при возрастании T стремится к $\psi(x)e^{-\sigma x}$; следовательно, функция $\psi_T(x)$, как мы и утверждали, стремится к $\psi(x)$.

Чтобы доказать теорему 1, мы составим интеграл

$$\psi(x)=\frac{e^{x\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma+i\tau)\,e^{i\tau x}\,d\tau,$$

который при наших предположениях абсолютно сходится на интервале $\alpha<\sigma<\beta$.

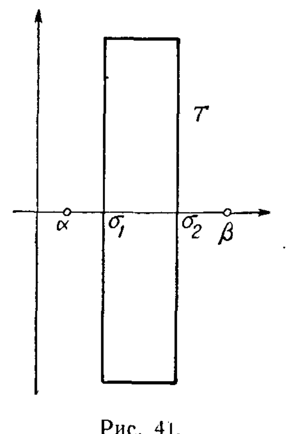


Рис. 41.

Теперь мы покажем, что этот интеграл не зависит от σ. Рассмотрим интеграл

$$J=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\varphi(\sigma+iT)\,e^{x(\sigma+iT)}\,d\sigma$$

по отрезку прямой, параллельной действительной оси; длина этого отрезка фиксирована и равна $\sigma_2-\sigma_1>0$, и он целиком содержится в полосе $\alpha+\delta\leqslant\sigma\leqslant\beta-\delta$. Применяя интегральную теорему Коши, мы видим, что функция $\psi(x)$ действительно не зависит от σ, если только J стремится к нулю, когда $|T|$ пробегает соответствующую неограниченно возрастающую последовательность значений $|T_1|, |T_2|, \ldots$ (рис. 41). А интеграл J стремится к нулю в силу оценки

$$|J|\leqslant e^{|x|\sigma_2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|\varphi(\sigma+iT)|\,d\sigma\leqslant e^{|x|\sigma_2}\Phi(|T|)(\sigma_2-\sigma_1);$$

так как интеграл $\int_0^{\infty}\Phi(\rho)\,d\rho$ существует, то должна существовать такая последовательность $T_1, T_2, \ldots$, для которой $\Phi(|T|)$ стремится к нулю.

Из уравнения

$$\psi(x)\,e^{-x\sigma}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma-i\tau)\,e^{-i\tau x}\,d\tau$$

следует, что функция $\psi(x)e^{-x\sigma}$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(\sigma-i\tau)$, кусочно-гладкой относительно τ. Поэтому, если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\sigma-i\tau)|\,d\tau$ сходится, то, в силу теоремы об обращении инте-

грала Фурье, мы получим

$$\varphi(\sigma - i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-x(\sigma - i\tau)}\, dx,$$

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-xs}\, dx,$$

что и утверждается в теореме 1.

Чтобы доказать следствие, заметим, что в указанных там предположениях для всех $\sigma \geqslant \alpha + \delta$ и для всех x справедлива оценка

$$|\psi(x)| < e^{x\sigma} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \Phi(\rho)\, d\rho. \tag{5}$$

Если x отрицательно, то правая часть становится сколь угодно малой при больших σ и, следовательно,

$$\varphi(x) \equiv 0 \quad \text{для } x < 0,$$

что и утверждалось.

2. Решение нестационарных задач с помощью преобразования Лапласа. Теперь мы можем получить решение нестационарной задачи I из § 1 в более общей форме, чем раньше (см. § 1, п. 4), даже в предположении, что начальное состояние не является состоянием покоя. Метод решения опирается на тот факт, что задачу I можно свести к некоторой другой задаче II, содержащей на одну независимую переменную меньше. Обе эти задачи эквивалентны, что устанавливается с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа, но во многих случаях вторую задачу можно решить просто и в явной форме, а первую нельзя. Желательно, чтобы предположения, при которых можно применять преобразование, были достаточно широкими и охватывали бы важные практические применения.

Мы потребуем, чтобы решение $u(x, t)$ задачи I удовлетворяло следующему условию: существует такое действительное число α_0, что функции

$$u(x, t)\, e^{-\alpha_0 t}, \quad u_x(x, t)\, e^{-\alpha_0 t}, \quad u_{xx}(x, t)\, e^{-\alpha_0 t} \tag{6}$$

остаются ограниченными равномерно по x при стремлении t к бесконечности. При этом предположении соответствующее преобразование Лапласа, которое удобно записать в виде

$$\frac{v(x, \gamma)}{\gamma} = \frac{v}{\gamma} = \int_{0}^{\infty} u(x, t)\, e^{-\gamma t}\, dt,$$

существует для $\operatorname{Re}\gamma = \alpha > \alpha_0$ и является регулярной аналитической функцией от

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$. На основании наших предположений мы получаем следующие формулы для производных этой функции:

$$\frac{v_x}{\gamma} = \int_0^\infty u_x e^{-\gamma t}\, dt,$$

$$\frac{v_{xx}}{\gamma} = \int_0^\infty u_{xx} e^{-\gamma t}\, dt.$$

Из наших условий мы заключаем, что преобразования Лапласа для функций u_t и u_{tt} также существуют. Мы имеем

$$\int_0^T u_t(x,\ t)\, e^{-\gamma t}\, dt = u(x,\ T)\, e^{-\gamma T} - \varphi(x) + \gamma \int_0^T u(x,\ t)\, e^{-\gamma t}\, dt.$$

Так как правая часть имеет предел при $T \to \infty$ и $\operatorname{Re}\gamma > \alpha_0$, то левая часть также имеет предел, т. е. мы имеем

$$\int_0^\infty u_t e^{-\gamma t}\, dt = v(x,\ \gamma) - \varphi(x).$$

В гиперболическом случае ($a > 0$) отсюда следует также существование интеграла

$$\int_0^\infty u_{tt} e^{-\gamma t}\, dt.$$

Мы получаем, что

$$\int_0^\infty u_{tt} e^{-\gamma t}\, dt = (v - \varphi)\,\gamma - \psi.$$

Кроме того, если мы умножим дифференциальное уравнение (10) из § 1 на $e^{-\gamma t}$ и проинтегрируем его по t от 0 до ∞, то для v мы получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L[v] + (a\gamma^2 + b\gamma)\,\varphi + a\gamma\psi = (a\gamma^2 + b\gamma)\, v.$$

Это уравнение становится однородным, если в начальный момент мы имеем состояние покоя. Аналогичным путем мы получаем граничные условия

$$v(0, \gamma) = \gamma \int_0^\infty f(t) e^{-\gamma t} dt,$$

$$\rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma) v + \lambda\gamma\varphi(l) \qquad \text{для } x = l.$$

Таким образом, возникает следующая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции v независимой переменной x, содержащего комплексный параметр γ.

Задача II.

$$L[v] + (a\gamma^2 + b\gamma)\varphi + a\gamma\psi = (a\gamma^2 + b\gamma) v, \tag{7}$$

$$v(0, \gamma) = \gamma \int_0^\infty f(t) e^{-\gamma t} dt, \tag{7'}$$

$$\rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma) v + \lambda\gamma\varphi(l) \qquad \text{для } x = l.$$

Пусть функция $f(t)$ — кусочно-гладкая для $t \geqslant 0$ и интеграл $\int_0^\infty f(t) e^{-\alpha t} dt$ абсолютно сходится для $\alpha > \alpha_0$; пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции для $0 \leqslant x \leqslant l$.

Мы немедленно делаем следующий вывод:

Если задача II *имеет единственное решение для любого* $\gamma = \alpha + i\beta$ *с* $\alpha > \alpha_0$, *то существует не более одного решения соответствующей задачи* I, *удовлетворяющего условиям* (6).

Однако еще более важно показать, что с помощью формулы обращения преобразования Лапласа из решения задачи II можно получить решение задачи I. Мы докажем следующую теорему.

Пусть $v(x, \gamma)$ — *решение задачи* II, *непрерывное и обладающее непрерывными производными по* x *вплоть до второго порядка на отрезке* $0 \leqslant x \leqslant l$. *Пусть для любого фиксированного* x *на этом отрезке функция* $v(x, \gamma)$ *регулярна всюду в полуплоскости* $\operatorname{Re}\gamma > \alpha_0$ *комплексной плоскости* γ. *Кроме того, пусть в каждой полуплоскости* $\operatorname{Re}\gamma \geqslant \alpha_0 + \delta$, *из которой в случае* $\alpha_0 < 0$ *начало координат исключается с помощью произвольно малого фиксированного круга, и для любого фиксированного отрезка* $\varepsilon \leqslant x \leqslant l$ *выполняется неравенство вида*

$$\left| \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} \right| \leqslant \Phi(|\beta|), \tag{8}$$

причем $\int\limits_0^\infty \Phi(\rho)\,d\rho$ *существует. Тогда если функция u, определенная формулой*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma, \tag{9}$$

непрерывна в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, $t^2 + x^2 \geqslant \varepsilon > 0$ (ε — *произвольно малое число) и обладает непрерывными первыми и вторыми производными в области* $0 < x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, $t^2 + x^2 \geqslant \varepsilon$, *то функция u является решением соответствующей задачи* I. Здесь контур интегрирования L есть произвольная прямая, параллельная мнимой оси и лежащая в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$, или же, в случае $\alpha_0 < 0$, L есть контур, изображенный на рис. 39, § 2, п. 5 [1]).

Сначала мы установим, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению. Так же как и при последующей проверке граничных и начальных условий, мы произведем нужные дифференцирования с помощью приема, несколько раз упомянутого в § 1. Сначала мы составим вспомогательную функцию

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma^3} e^{\gamma t}\, d\gamma. \tag{10}$$

В силу предположения (8) эту функцию можно дважды дифференцировать по t под знаком интеграла для $\varepsilon \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$. В частности, мы имеем

$$w_{tt} = u(x, t).$$

С другой стороны, в силу дифференциального уравнения (7), интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{L[v]}{\gamma^3} e^{\gamma t}\, d\gamma$$

равномерно сходится в области $\varepsilon \leqslant x \leqslant l$, $\varepsilon \leqslant t \leqslant T$. Из этого мы заключаем, что справедливо соотношение [2])

$$L[w] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{L[v]}{\gamma^3} e^{\gamma t}\, d\gamma.$$

---

[1]) Легко доказать, что этот результат совпадает с представлением решения в виде интеграла Дюамеля (§ 1, п. 3).

[2]) Достаточно проверить, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{p v_{xx} + q v_x}{\gamma^3} e^{\gamma t}\, d\gamma = p w_{xx} + q w_x,$$

или, так как $p > 0$, что

$$\Omega \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{(P v_x)_x}{\gamma^3} e^{\gamma t}\, d\gamma = (P w_x)_x;$$

Отсюда следует, что

$$aw_{tt}+bw_t-L[w]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3}[(a\gamma^2+b\gamma)v-L[v]]\,d\gamma.$$

Таким образом, из дифференциального уравнения (7) мы получили

$$aw_{tt}+bw_t-L[w]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3}[(a\gamma^2+b\gamma)\varphi+a\gamma\psi]\,d\gamma,$$

или

$$aw_{tt}+bw_t-L[w]=a\varphi+(b\varphi+a\psi)t. \tag{11}$$

Если мы продифференцируем это уравнение дважды по t — это возможно, так как по предположению функция $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема, — то для u мы получим дифференциальное уравнение $au_{tt}+bu_t=L[u]$, справедливое для таких x, t, для которых $0<x\leqslant l$, $t>0$. Тот факт, что функция u в точке $x=0$ удовлетворяет граничному условию $u(0, t)=f(t)$, немедленно следует из теоремы об обращении преобразования Лапласа и из непрерывности $u(x, t)$ при $t>0$, $0\leqslant x\leqslant l$.

Для вспомогательной функции w на конце $x=l$ выполняется условие

$$\rho w_x+\lambda w_t-\sigma w=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3}[\rho v_x+(\lambda\gamma-\sigma)v]\,d\gamma=$$

$$=\frac{\lambda\varphi(l)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{\gamma t}}{\gamma^2}\,d\gamma=\lambda t\varphi(l).$$

Следовательно, дифференцируя два раза по t, мы получаем

$$\rho u_x+\lambda u_t-\sigma u=0.$$

мы положили здесь $P(x)=\exp\left\{\int\limits_0^x\frac{q}{p}\,dx'\right\}$. Интегрируя выражение Ω, заданное выше с помощью интеграла, мы получаем

$$\int\limits_\varepsilon^x\frac{dx'}{P(x')}\int\limits_\varepsilon^{x'}\Omega\,dx''=w(x, t)-w(\varepsilon, t)-A(t)\int\limits_\varepsilon^x\frac{dx'}{P(x')},$$

где $A(t)$ не зависит от x. Дифференцирование этого последнего уравнения сразу дает $\Omega=(Pw_x)_x$.

Чтобы проверить, выполняются ли начальные условия, мы заметим сначала, что функции $w(x, 0)$ и $w_t(x, 0)$ равны нулю при $x > 0$ в силу того, что

$$w(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{v}{\gamma^3} d\gamma,$$

и

$$w_t(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{v}{\gamma^2} d\gamma,$$

и ввиду условия (8). Действительно, справедливы оценки

$$|w(x, 0)| \leqslant \frac{1}{\pi\alpha^2} \int\limits_0^\infty \Phi(\rho)\, d\rho,$$

$$|w_t(x, 0)| \leqslant \frac{1}{\pi\alpha} \int\limits_0^\infty \Phi(\rho)\, d\rho,$$

из которых при $\alpha \to \infty$ получается нужное утверждение. Из предположений, сделанных относительно функции $u(x, t)$, следует, что w и w_t непрерывны вместе со своими производными до второго порядка в области

$$0 < x \leqslant l, \quad t \geqslant 0$$

и, следовательно, что выражения $L[w]$ и $L[w_t]$ стремятся к нулю при $t \to 0$. Уравнение (11) переходит в уравнение

$$a[w_{tt}(x, 0) - \varphi(x)] = a[u(x, 0) - \varphi(x)] = 0. \qquad (12)$$

Дифференцируя уравнение (11), мы получим для $t = 0$

$$a(w_{ttt} - \psi) + b(w_{tt} - \varphi) = 0,$$

или

$$a[u_t(x, 0) - \psi(x)] + b[u(x, 0) - \varphi(x)] = 0. \qquad (13)$$

В случае $a \neq 0$ отсюда следует, что

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

а в случае, когда $a = 0$, $b \neq 0$, получаем

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

чем заканчивается доказательство.

Наконец, мы заметим, что, в силу условия (8), при произвольном $\alpha > \alpha_0$ для функции u справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{1}{\pi} e^{\alpha t} \int\limits_0^\infty \Phi(\rho)\, d\rho.$$

Для $t<0$ отсюда следует, что

$$u(x,\ t)=0, \tag{14}$$

а для $t>0$

$$|u(x,\ t)|\leqslant\frac{1}{\pi}e^{\alpha_0 t}\int\limits_0^\infty \Phi(\rho)\,d\rho. \tag{15}$$

Это показывает, что первоначально сделанное относительно u предположение (6) выполняется для только что построенного решения.

3. Пример. Волновое и телеграфное уравнения. В качестве иллюстрации метода мы рассмотрим телеграфное уравнение

$$u_{tt}=u_{xx}-r^2u \quad (r \text{ — постоянная}) \tag{16}$$

с начальными условиями

$$u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0 \tag{16'}$$

и граничными условиями [1])

$$\left.\begin{aligned} &u(0,\ t)=\frac{t^3}{3!},\\ &\rho u_x+\lambda u_t=\sigma u \quad \text{для} \quad x=l. \end{aligned}\right\} \tag{16''}$$

Мы имеем соответствующую задачу II:

$$v_{xx}=k^2v, \tag{17}$$

$$v(0,\ \gamma)=\frac{1}{\gamma^3}, \tag{17'}$$

$$\rho v_x=(\sigma-\lambda\gamma)\,v \quad \text{для} \quad x=l,$$

причем мы должны положить

$$k^2=\gamma^2+r^2.$$

Решение этой задачи определяется формулой

$$v(x,\ \gamma)=\frac{\rho k\operatorname{ch}k(l-x)+(\lambda\gamma-\sigma)\operatorname{sh}k(l-x)}{\rho k\operatorname{ch}kl+(\lambda\gamma-\sigma)\operatorname{sh}kl}\cdot\frac{1}{\gamma^3}=$$

$$=\frac{e^{-kx}-\varepsilon(k)\,e^{k(x-2l)}}{1-\varepsilon(k)\,e^{-2kl}}\,\frac{1}{\gamma^3}, \tag{18}$$

---

[1]) Вместо того чтобы строить возникающую под действием импульса функцию $U(x,\ t)$, мы построим функцию $U_3(x,\ t)$ (см. § 1, п. 3), чтобы на основании теоремы из п. 2 иметь уверенность в том, что соответствующий интеграл $(1/2\pi i)\int\limits_L [v(x,\ \gamma)/\gamma]\,e^{\gamma t}\,d\gamma$ представляет искомое решение. Предположения этой теоремы не будут выполняться для интеграла, представляющего $U(x,\ t)$. Однако мы можем затем получить U из U_3, так как $U(x,\ t)=\partial^3U_3(x,\ t)/\partial t^3$.

где

$$\varepsilon(k) = \frac{\lambda\sqrt{k^2-r^2} - \rho k - \sigma}{\lambda\sqrt{k^2-r^2} + \rho k - \sigma}. \tag{19}$$

Как и раньше, мы видим, что существует такое $\alpha_0 > 0$, что знаменатель выражения (18) не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma > \alpha_0$; следовательно, функция v регулярна всюду в этой полуплоскости. На любой прямой L, параллельной мнимой оси и лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma \geqslant \alpha_0 + \delta$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\right| \leqslant \frac{A}{(B+|\beta|)^4},$$

где $A > 0$ и $B > 0$ — постоянные, не зависящие от x и γ. Из этого неравенства и из соответствующих оценок для v_x/γ и v_{xx}/γ ясно, что

$$U_3(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{v(x,\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma \tag{20}$$

является непрерывной функцией и имеет непрерывные производные первого и второго порядка в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$. Следовательно, эта функция является решением уравнения (16).

Мы снова рассмотрим частные случаи [1]):

$$\begin{aligned} u_x(l, t) &= 0, \quad \varepsilon(k) = -1, \\ u(l, t) &= 0, \quad \varepsilon(k) = 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Как и раньше, разложим функцию v в ряд

$$\gamma^3 v(x, \gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu e^{-k(x+2\nu l)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu e^{k(x-2\nu l)} \tag{22}$$

и подставим этот ряд в формулу (20). Так как легко убедиться, что допустимо почленное интегрирование, мы получаем ряд вида

$$U_3(x, t) = S(x, t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu [S(2\nu l + x, t) - S(2\nu l - x, t)], \tag{23}$$

где $S(x, t)$ определяется с помощью интеграла

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \exp\left\{-x\sqrt{\gamma^2+r^2} + \gamma t\right\} \frac{d\gamma}{\gamma^4}. \tag{24}$$

Для $r = 0$ мы немедленно получаем

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{\gamma(t-x)} \frac{d\gamma}{\gamma^4}.$$

[1]) Другой важный случай соответствует $\varepsilon = 0$; он, однако, возникает только при $r = 0$, $\sigma = 0$ и $\lambda = \rho$. В этом случае не существует „отраженных“ волн.

Таким образом, имеем

$$S(x,\ t)=S(t-x)=\begin{cases} \frac{(t-x)^3}{3!} & \text{для} \quad t>x, \\ 0 & \text{для} \quad t<x, \end{cases} \tag{25}$$

и, наконец,

$$U_3(x,\ t)=S(t-x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\,[S(t-x-2\nu l)-S(t+x-2\nu l)], \tag{26}$$

в соответствии с результатами, приведенными в § 1, п. 1 для частного случая

$$f(t)=\frac{t^3}{3!},\quad t>0.$$

Только конечное число членов ряда (26) отлично от тождественного нуля, и каждый из этих членов имеет непрерывные производные до второго порядка и кусочно-непрерывные производные третьего порядка. Следовательно, для функции U при $r=0$ мы сразу получаем с помощью дифференцирования формулу

$$U(x,\ t)=\eta(t-x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\,[\eta(t-x-2\nu l)-\eta(t+x+2\nu l)],$$

где

$$\eta(t)=\begin{cases} 1 & \text{для} \quad t>0, \\ 0 & \text{для} \quad t<0. \end{cases}$$

Чтобы вычислить интеграл (24) в случае $r\neq 0$, мы введем вместо γ переменную интегрирования $\varphi=\sigma+i\tau$, связанную с γ соотношением

$$\gamma=ir\cos\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$S(x,\ t)=-\frac{1}{2\pi r^3}\int\limits_{L'}\exp\{ir\,(ix\sin\varphi+t\cos\varphi)\}\,\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi. \tag{27}$$

Здесь L' — образ прямой L на плоскости φ, т. е. L' — это кривая

$$\operatorname{Re}(ir\cos\varphi)=\text{const}>\alpha_0,$$

изображенная на рис. 42. Если $t<x$, то действительная часть показателя

$$ir\,(ix\sin\varphi+t\cos\varphi),$$

т. е. выражение

$$r\sin\sigma\,(t\operatorname{sh}\tau-x\operatorname{ch}\tau), \tag{28}$$

в области $0<\sigma<\pi$, $\tau>0$ стремится к $-\infty$ при $\tau\to\infty$. Таким образом, контур L' может быть сжат в двойную прямую, проходящую в этой области (см. рис. 43), и, следовательно,

$$S(x,\ t)\equiv 0 \qquad (t<x). \tag{29}$$

Если $t > x$, то выражение (28) стремится к $-\infty$ при $\tau \to \infty$ в области $-\pi < \sigma < 0$, $\tau > 0$, и L можно перевести в кривую L'', идущую по краю всей полосы $-\pi < \sigma < \pi$ (рис. 44). Так как подинтегральная функция в формуле (27) периодическая, мы получаем

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi r^3} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{ir(ix\sin\varphi + t\cos\varphi)\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi, \tag{30}$$

где точки $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ исключаются с помощью малых полукругов, открытых снизу.

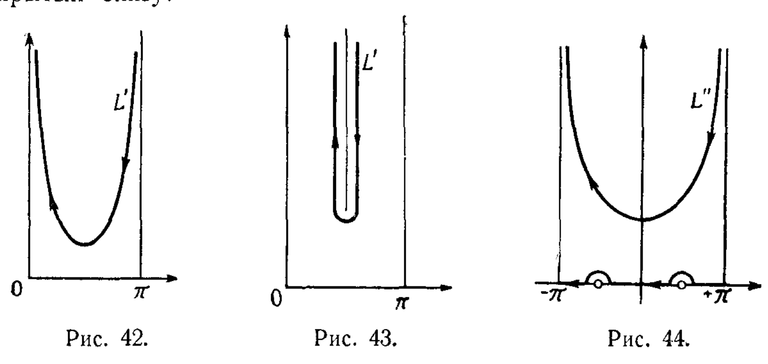


Рис. 42. Рис. 43. Рис. 44.

Достаточно вычислить функцию

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi r^4} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{ir(ix\sin\varphi + t\cos\varphi)\}\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi}, \tag{31}$$

так как $S = -f_x$. Четвертая производная функции (31) по t равна

$$\frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial t^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{ir(ix\sin\varphi + t\cos\varphi)\}\,d\varphi = J_0\left(r\sqrt{t^2 - x^2}\right).$$

При $t = x$ функция $f(x, t)$ обращается в нуль вместе с производными по t вплоть до третьего порядка. Действительно, если мы в формуле (31) положим $t = x$ и введем новую переменную интегрирования $z = e^{i\varphi}$, то мы получим

$$f(x, x) = \frac{8}{i\pi r^4} \oint \frac{z^3}{(1 + z^2)^4} e^{irxz}\,dz,$$

где в качестве пути интегрирования взята единичная окружность на плоскости z, а точки $z = \pm i$ надо исключить, слегка деформируя контур. Мы сразу получаем, что $f(x, x) = 0$; аналогично мы уста-

навливаем, что при $t = x$ равны нулю производные f. Таким образом, мы получаем

$$f(x, t) = \frac{1}{3!} \int_x^t (t-\tau)^3 J_0\left(r\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) d\tau$$

и, следовательно, в качестве окончательного результата имеем

$$S(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_x^t \dfrac{(t-\tau)^3}{3!} J_0\left(r\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) d\tau & \text{для} \quad t > x, \\ 0 & \text{для} \quad t < x. \end{cases} \qquad (32)$$

В частном случае, когда $r = 0$, мы опять получаем прежний результат

$$S(x, t) = \begin{cases} \dfrac{(t-x)^3}{3!} & \text{для} \quad t > x, \\ 0 & \text{для} \quad t < x. \end{cases}$$

В случае $r \neq 0$ в соответствии с формулой (32) ряд (23) имеет только конечное число членов, отличных от тождественного нуля, причем каждый из этих членов имеет непрерывные производные вплоть до второго порядка и кусочно-непрерывные третьи производные. Следовательно, с помощью дифференцирования мы можем получить для функции $U = \partial^3 U_3/\partial t^3$, возникающей под действием импульса, выражение

$$U(x, t) = S(x, t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \left[S(2\nu l + x, t) - S(2\nu l - x, t)\right], \qquad (23')$$

где

$$S(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_x^t J_0\left(r\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) d\tau & \text{для} \quad t > x, \\ 0 & \text{для} \quad t < x. \end{cases} \qquad (24')$$

Эта функция является решением задачи (16) с граничным условием $U(0, t) = 1$.

Большое количество других важных примеров содержится в цитированной литературе.

Глава VI

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СО МНОГИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Введение

Теория гиперболических дифференциальных уравнений математической физики в случае, когда число независимых переменных больше двух, представляет собой столь широкую область, что ее невозможно полностью изложить в этой книге, даже если в основном ограничиться линейными задачами. В этой главе мы будем рассматривать эти проблемы с точки зрения распространения волн. Основную роль в исследовании задачи Коши и задачи об излучении будут играть характеристические поверхности и бихарактеристические лучи (вдоль которых распространяются возмущения).

В случае многих независимых переменных уже нельзя построить решение с помощью простых итерационных методов, как в гл. V. Тем не менее мы сможем описать общую структуру решений и дать их подробный анализ в некоторых важных частных случаях.

Прежде всего мы рассмотрим задачу Коши для одного уравнения произвольного порядка и для систем уравнений с несколькими неизвестными функциями. В довольно элементарных первых двух параграфах мы обратим особое внимание на случай одного уравнения второго порядка, а в следующих за ними параграфах — на *симметрические гиперболические* системы первого порядка. Исследование этих систем несколько проще, чем изучение общих уравнений или систем высших порядков.

Замечательно, что почти все уравнения математической физики возникают в виде симметрических гиперболических систем первого порядка. Здесь нам придется повторить в несколько измененной форме некоторые результаты, изложенные в гл. III.

Первая часть этой главы посвящена вопросам единственности, существования, построения решений и их геометрическим свойствам; вторая часть в основном относится к представлению решений через данные задачи и связанным с этим вопросам.

Построение, данное в первой части, доказывает основной результат — наличие конечной области зависимости от данных Коши (что мы уже видели в гл. V для случая двух независимых переменных).

В противоположность этому данное во второй части представление решений через „плоские волны" не доказывает непосредственно того, что область зависимости конечна.

Надо всегда иметь в виду, что, как правило, наши утверждения и результаты справедливы только „в малом"; однако в тех случаях, когда это возможно, мы будем распространять наши результаты на более широкие области, естественные для рассматриваемых задач.

Мы будем уделять основное внимание *линейным задачам*, но достаточно подробно будем описывать обобщения и на квазилинейные системы.

Наконец, мы напомним (гл. III, § 4, см. также § 10, п. 1 и § 12, п. 5), что в случае линейных гиперболических задач решение неоднородной задачи выражается через решение однородной задачи с помощью представления Дюамеля. Поэтому мы можем в основном ограничиться исследованием задачи Коши для однородного уравнения.

Мы будем рассматривать $n+1$ независимых переменных x_0, $x_1, \ldots, x_n$ и обозначать их совокупность через вектор x. Однако часто мы будем выделять переменную x_0, считая ее временем t, и записывать совокупность независимых переменных как t, x. Для удобства мы будем пользоваться обычными сокращенными записями вида

$$a_i b_i = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i.$$

Часть I

ЕДИНСТВЕННОСТЬ, ПОСТРОЕНИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

§ 1. Дифференциальные уравнения второго порядка. Геометрия характеристик

1. Квазилинейные дифференциальные уравнения второго порядка. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$L[u] + d = \sum_{i,\,k=0}^{n} a_{ik} u_{ik} + d = 0. \tag{1}$$

Здесь использованы сокращенные обозначения $u_i = \partial u/\partial x_i$ и $u_{ik} = \partial^2 u/\partial x_i\,\partial x_k$. Свободный член d и коэффициенты $a_{ik} = a_{ki}$ — заданные функции независимых переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$, функции u и производных u_i [1]). Как всегда, мы предполагаем, что встре-

[1]) В этой главе индексы у функций, к которым применяются дифференциальные операторы (например, u_i, φ_i, ψ_i, ω_i), будут обозначать соответствующие частные производные, тогда как у коэффициентов (например, a_{ik}, b_l, c_l) они являются индексами в обычном смысле.

чающиеся нам функции непрерывны в рассматриваемой области, если специально не оговорено противное.

Как уже было указано в гл. I и III, понятие характеристик возникает из попытки дополнить начальные данные на поверхности C, заданной уравнением $\varphi(x_0, \ldots, x_n)=0$, до решения уравнения (1) [1]. Начальные данные на поверхности C состоят из значений функции u (определяющих внутренние производные u) и значений одной „выводящей“ производной, например $u_\varphi=\sum_{i=0}^{n} u_i\varphi_i$. Тогда на C определяются все первые производные функции u [2].

Задача Коши состоит в том, чтобы найти решения уравнения (1) в некоторой окрестности поверхности C, но исследование дифференциального уравнения на самой поверхности C подсказывает постановку гораздо более простой задачи: дополнить начальные данные до *интегральной полосы*, т. е. найти функции u, u_i, u_{ik}, которые на C удовлетворяют уравнению (1); см. гл. III, § 2. Именно эта простая задача непосредственно приводит к понятию характеристик [3].

Вместо $x_0, \ldots, x_n$ мы введем новые независимые переменные $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, причем $\lambda_n=\varphi$, а $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ являются „внутренними переменными“ на поверхности C; таким образом, задачу можно более точно сформулировать следующим образом: на поверхности C заданы функции

$$u(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}), \quad u_\varphi(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}); \tag{1'}$$

построить такую функцию $u(x_0, \ldots, x_n)$, чтобы на C эта функция и ее производная по φ совпадали с заданными функциями (1′) от $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ и чтобы функция u удовлетворяла уравнению (1) на поверхности C.

Ясно, что все вторые производные функции $u(x_0, \ldots, x_n)$, кроме $u_{\varphi\varphi}$, однозначно определяются из данных на поверхности C с помощью дифференцирования функций (1′) по внутренним переменным. Теперь мы постараемся выяснить, когда дифференциальное уравнение и начальные данные определяют также и производную $u_{\varphi\varphi}$ на поверхности C. В переменных $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n=\varphi$ уравнение (1) принимает вид

$$u_{\varphi\varphi}Q(\varphi_i)+\ldots=0, \tag{2}$$

где

$$Q(\varphi_i)=Q(\varphi_i, \varphi_k)=\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}\varphi_i\varphi_k \tag{3}$$

---

[1] Далее в этой главе мы изменим обозначения, сохраняя обозначения C и φ для характеристических поверхностей.

[2] Для уравнений порядка m соответствующие *данные Коши* состоят из значений u и ее выводящих производных до порядка $m-1$.

[3] Сравните с соответствующими рассуждениями в гл. III.

— *характеристическая форма.* Точки в выражении (2) заменяют члены, которые выражаются через начальные данные, т. е. члены, содержащие только внутренние производные функции u и первых производных от u. Следовательно, вторая производная $u_{\varphi\varphi}$ однозначно определяется данными задачи в каждой точке P поверхности C, в которой коэффициент при $u_{\varphi\varphi}$ в формуле (2), т. е. квадратичная форма $Q(\varphi_i)$, не обращается в нуль. Таким образом, для каждой точки P поверхности C мы получаем следующую *альтернативу*: либо вторая производная $u_{\varphi\varphi}$, а вместе с ней и все вторые производные, однозначно определяется начальными данными и дифференциальным уравнением, либо дифференциальное уравнение представляет собой некоторое дополнительное ограничение, наложенное на начальные данные.

В дальнейшем будет предполагаться, что на *всей* поверхности C для начальных данных, заданных формулой (1′), выполняется одна из этих возможностей. В первом случае мы называем начальную поверхность *свободной* (см. гл. III, § 2), а во втором случае — *характеристической.* Во втором случае на поверхности C при заданных значениях u и u_i удовлетворяется характеристическое уравнение

$$Q(\varphi_i, \varphi_k) = Q(\varphi_i) = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k \equiv 0, \tag{4}$$

причем в коэффициенты a_{ik} подставлены начальные значения u и u_i.

Хотя характеристическое соотношение (4) имеет форму дифференциального уравнения первого порядка относительно функции φ, функция

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

не обязана тождественно удовлетворять этому уравнению; по определению, она должна удовлетворять соотношению (4) только на поверхности C, т. е. при $\varphi = 0$. Однако если C задается в виде

$$x_0 = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то (4) представляет собой дифференциальное уравнение относительно функции ψ, зависящей только от n переменных:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\psi_i\psi_k - 2\sum_{i=1}^{n} a_{i0}\psi_i + a_{00} = 0, \tag{5}$$

причем вместо x_0 надо подставить в коэффициенты его выражение через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а вместо u и u_i — их начальные значения.

Если, в частности, $a_{00} = -1$, $a_{i0} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и если коэффициенты a_{ik} не зависят от $x_0 = t$, то уравнение (1) принимает вид

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \ldots = 0, \tag{5'}$$

а характеристическое дифференциальное уравнение для функции ψ — вид

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \psi_i \psi_k = 1.$$

Этот случай часто встречается в физике.

Для заданного решения $u = u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ дифференциального уравнения (1) функция u и производные u_i являются известными функциями переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Заменим u и u_i в коэффициентах a_{ij} на эти известные функции; *тогда характеристическое уравнение* (4) *определяет характеристические поверхности для заданного решения u. Если уравнение* (4) *удовлетворяется не только при* $\varphi = 0$, *но и тождественно по* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, *то уравнение* $\varphi = c = \text{const}$ *дает однопараметрическое семейство характеристических поверхностей, зависящее от параметра c. Обратно, если уравнение* $\varphi = c$ *является уравнением такого семейства характеристических поверхностей, то функция* φ *удовлетворяет уравнению* (4), *которое надо понимать как дифференциальное уравнение первого порядка.*

Кроме того, из уравнения (2) видно, что на характеристической поверхности C, где $Q(\varphi_i, \varphi_k) = 0$, дифференциальный оператор второго порядка $L[u]$ является *внутренним дифференциальным оператором* в следующем смысле: если на C заданы значения функции u и производных u_i, то известно значение $L[u]$. Действительно, из начальных данных можно найти значения всех внутренних производных от u_i, а также от u_φ. Выводящая вторая производная $u_{\varphi\varphi}$ не входит в оператор, так как член с этой производной имеет вид $u_{\varphi\varphi} Q$, а $Q = 0$. Поэтому уравнение $L[u] = 0$ на поверхности C можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно выводящей первой производной u_φ.

Как уже указывалось в гл. III, характеристические поверхности могут существовать только в том случае, когда действительные функции φ удовлетворяют соотношению (4); тогда *квадратичная форма* $Q(\varphi_i)$ не должна быть знакоопределенной. Уравнения, для которых квадратичная форма Q, содержащая $n+1$ переменных, может быть с помощью линейного преобразования сведена к ана-

логичной форме, зависящей от меньшего числа переменных (параболические уравнения), не будут рассматриваться в этой главе[1]).

Теперь мы предположим, что форма Q не только не является знакоопределенной, но что ее *индекс инерции равен* 1, т. е. что в каждой рассматриваемой точке форму Q можно с помощью соответствующего линейного преобразования независимых переменных привести к виду

$$Q=\Phi_1^2+\Phi_2^2+\ldots+\Phi_n^2-\Phi_0^2.$$

Тогда дифференциальное уравнение (1) называется *гиперболическим*. В новых переменных его главная часть в точке P равна

$$u_{11}+u_{22}+\ldots+u_{nn}-u_{00},$$

т. е. совпадает с главной частью *волнового уравнения*. Элемент n-мерной поверхности $\Phi_0=0$ называется элементом пространственного типа, а направление оси Φ_0 можно рассматривать как временную ось в точке P. Позднее, в § 3, мы дадим более общий анализ понятия гиперболичности (см. также гл. III, § 2), не используя тот факт, что Q — квадратичная форма.

Простейшим примером является волновое уравнение

$$u_{11}+u_{22}+\ldots+u_{nn}-u_{00}=0,$$

для которого характеристическое уравнение имеет вид

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\ldots+\varphi_n^2-\varphi_0^2=0.$$

Конечно, существуют квадратичные формы Q с другими индексами инерции. Мы вернемся к этим „ультрагиперболическим“ случаям позже, в § 16 этой главы. Типичным примером служит дифференциальное уравнение

$$u_{11}+u_{22}-u_{33}-u_{44}=0$$

с характеристическим уравнением

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2-\varphi_3^2-\varphi_4^2=0.$$

---

[1]) Теория линейных параболических уравнений второго порядка подробно изложена в обзорной статье А. М. Ильина, А. С. Калашникова и О. А. Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, *Успехи матем. наук*, **17**, вып. 3 (1962), 3—146.— *Прим. ред*

2. Линейные дифференциальные уравнения. Общая ситуация, описанная в п. 1, упрощается для линейного дифференциального уравнения

$$L[u]+d=0, \tag{6}$$

где

$$L[u] \equiv \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=0}^{n} a_i u_i + au, \tag{7}$$

а коэффициенты a_{ik}, a_i, a являются заданными функциями только от $n+1$ независимых переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Тогда выполнение характеристического уравнения (4) или (5) зависит только от поверхности C и не зависит от начальных данных; поэтому характеристики не зависят от того, какое решение рассматривается. То же самое справедливо, если от u и ее производных не зависят коэффициенты главной части, т. е. a_{ik}. Такие уравнения называются *почти линейными*. Поверхность $\varphi=0$ в пространстве x, удовлетворяющая уравнению (4), т. е. такая, что $Q(\varphi_i)=0$, называется *характеристической поверхностью линейного дифференциального уравнения* (6). Очевидно, в этом случае гиперболичность является свойством самого дифференциального уравнения и не зависит от начальных данных.

Связь между характеристическим уравнением (4) и дифференциальным уравнением (5)

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\psi_i\psi_k - 2\sum_{i=1}^{n} a_{i0}\psi_i + a_{00} = 0$$

можно описать следующим образом: предположим, что функция $\varphi=\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ является решением уравнения (4), которое рассматривается как дифференциальное уравнение с частными производными. Если уравнение $\varphi=c=\text{const}$ решить относительно x_0,

$$x_0=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, c),$$

то получится однопараметрическое семейство решений уравнения (5). Обратно, если

$$x_0=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, c)$$

есть однопараметрическое семейство решений дифференциального уравнения (5) и это равенство разрешается относительно c в виде

$$c=\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

то функция φ является решением дифференциального уравнения (4).

Пусть теперь $\varphi=0$ — произвольная характеристическая поверхность, удовлетворяющая уравнению (4) при $\varphi=0$; тогда соответствующая функция

$$x_0=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

является решением дифференциального уравнения (5). Любое достаточно гладкое решение такого дифференциального уравнения с частными производными первого порядка может быть включено в однопараметрическое семейство решений $x_0 = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, c)$[1]. Решая это уравнение относительно c, мы получаем соответствующее решение уравнения с частными производными (4). Следовательно, *любая характеристическая поверхность* $\varphi = 0$ *может быть включена в однопараметрическое семейство характеристических поверхностей* $\varphi = c$. Поэтому мы можем без ограничения общности предполагать, что такое включение произведено, если специально не оговорено противное. Тогда функция φ является решением уравнения (4), *причем его надо понимать как дифференциальное уравнение с частными производными.*

В качестве примера такого включения мы рассмотрим при $n = 2$ дифференциальное уравнение $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ и характеристический конус $\chi \equiv t^2 - x^2 - y^2 = 0$. Эта функция χ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\chi_t^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2 = 4\chi.$$

Поэтому конус $\chi = 0$ характеристический, но поверхности $\chi = c$ не являются характеристическими при $c \neq 0$. С другой стороны, если мы включим исходный конус в семейство конусов

$$\varphi = t - \sqrt{x^2 + y^2} = c,$$

то получим

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 = 0,$$

так что поверхности $\varphi = c$ будут характеристическими при любой постоянной c. Соответствующие утверждения справедливы для волнового уравнения с любым числом переменных.

3. Лучи или бихарактеристики. В соответствии с теорией уравнений первого порядка, изложенной в гл. II, любая характеристическая поверхность $\varphi = 0$ или $\varphi = \text{const}$ порождается семейством бихарактеристических кривых или лучей, которое тесно связано с уравнением второго порядка (1). Эти лучи задаются как функции некоторого параметра s на кривой с помощью системы $n + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2} Q_{\varphi_i} \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\varphi_k \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{8}$$

---

[1]) Например, согласно гл. II, мы можем определить решения дифференциального уравнения (5), задавая начальные значения, зависящие от параметра c.

в случае, когда коэффициенты a_{ik} в уравнении (1) не зависят от u и $u_1, \ldots, u_n$, т. е. в случае линейного или почти линейного [1]) уравнения (1). Для квазилинейного уравнения (1) мы рассмотрим фиксированное решение u и подставим в коэффициенты a_{ik} соответствующие значения $u(x)$ и $u_i(x)$; тогда лучи определяются системой $\dot{x}_i = \frac{1}{2} Q_{\varphi_i}$. В любом случае можно дополнить бихарактеристические лучи, вводя „бихарактеристические полосы“ $x_i(s)$, $p_i(s)$, где $p_i = \varphi_i$, и определить величины, задающие эту полосу, как решения канонической системы (см. гл. II, § 8)

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{8'}$$

Тогда система (8′) дает *все возможные характеристические полосы* для решения u.

Надо напомнить, что на каждом решении этих обыкновенных дифференциальных уравнений (8′) $Q = \text{const} = c$. Чтобы выделить те из них, которые на самом деле соответствуют уравнению (1), мы должны наложить дополнительное условие, что $Q = 0$ в одной из точек каждого луча, откуда уже следует, что $Q = 0$ на всем луче [2]).

Интегральные кривые системы (8′), удовлетворяющие условию $Q = 0$, являются *характеристическими лучами или бихарактеристиками заданного дифференциального уравнения второго порядка* (1); они порождают все поверхности характеристического семейства $\varphi = \text{const}$.

Можно также напомнить результат из гл. II. *Если две различные характеристические поверхности $\psi = t$ и $\chi = t$ касаются в момент $t = 0$, то в любой последующий момент они имеют общую точку касания, перемещающуюся по лучу, общему для этих двух фронтов волны.* Это утверждение эквивалентно теореме

---

[1]) В этом случае требуется, чтобы только старшие члены были линейными.

[2]) Несколько более общим образом мы можем поставить в соответствие любому (необязательно характеристическому) семейству поверхностей $\varphi = \text{const}$ семейство „трансверсальных“ кривых, определяемых системой (8). Тогда плоскости, касательные к этим поверхностям, и соответствующие трансверсальные направления будут сопряженными относительно поверхности второго порядка $\sum\limits_{i,k=0}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0$.

Поверхность $\varphi = \text{const}$ будет характеристической тогда и только тогда, когда в каждой точке трансверсальное направление касается поверхности. Тогда дифференцирование по трансверсали является внутренним дифференцированием. Действительно, характеристическое уравнение можно сразу записать в виде $\sum\limits_{i=0}^{n} \dot{x}_i\varphi_i = 0$.

о том, что две интегральные поверхности дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (здесь характеристического уравнения), имеющие общий элемент поверхности, имеют также общую характеристическую полосу.

Если коэффициенты a_{ik} *дифференциального уравнения* (1) *постоянны, то все характеристические лучи являются прямыми.* Это непосредственно видно из уравнений (8′). Это ясно также из того, что полные интегралы φ уравнения (4) можно получить в виде семейства линейных функций; образуя огибающие однопараметрических подсемейств, мы получаем прямые в качестве линий касания.

Простейший пример дает волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - \ldots - u_{x_nx_n} = 0,$$

где мы положили $x_0 = t$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\varphi_t^2 - \varphi_{x_1}^2 - \varphi_{x_2}^2 - \ldots - \varphi_{x_n}^2 = 0,$$

а лучи — прямые пространства x, t вида $x_i = a_i + \alpha_i t$, где $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$.

Если рассматривать бихарактеристики не в $(n+1)$-мерном пространстве x, t, а в n-мерном пространстве x и считать, что они зависят от временнóго параметра t, то они будут произвольными прямыми, по которым точка x перемещается с единичной скоростью. Характеристические поверхности, заданные в виде $t = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2 = 1.$$

Таким образом, характеристические поверхности для волнового уравнения определяются семейством параллельных поверхностей $\psi = t$ (см. гл. II, § 6), полученных из исходной поверхности движением по нормали с единичной скоростью. Лучи будут соответствующими ортогональными траекториями.

4. Характеристика как фронт волны. Характеристические поверхности играют роль „фронта волны“, т. е. на этих поверхностях решения уравнения (1) могут претерпевать разрывы, например разрывы вторых производных. На таких разрывах значения вторых производных различны с разных сторон поверхности. Так как на свободных поверхностях вторые производные однозначно определяются данными Коши, то такая неоднозначность возможна только на характеристиках.

Такой „фронт волны“, например, возникает на границе, за которой в момент времени t нет возмущения. Решение, описывающее

возмущение, тождественно обращается в нуль по одну сторону этой поверхности и не равно нулю по другую ее сторону.

Мы во многих случаях будем возвращаться к важному понятию фронта волны (см., в частности, § 2). Здесь достаточно заметить следующее.

Предположим, что уравнение (1) линейное, и снова пусть $x_0 = t$ и $\varphi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - t$. Мы будем понимать t как время, а u — как функцию в n-мерном пространстве R_n переменных x, зависящую от времени как от параметра. Тогда мы имеем дело с решением уравнения (1) $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, которое обладает поверхностью разрыва

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t,$$

зависящей от времени t и перемещающейся в пространстве x.

Предположим для удобства, что дифференциальное уравнение имеет вид (5′). Тогда вдоль лучей $dt/ds = 1$. Таким образом, введенный выше параметр s на кривых совпадает с временем t и уравнения лучей имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\psi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

В n-мерном пространстве R_n эти лучи пересекают фронт волны $\psi = t$ и мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\psi_i\psi_k = 1.$$

Вектор с компонентами $\dot{x}_i$ в пространстве R_n называется *лучом, трансверсальным к фронту волны* $\psi = t$.

Если предположить, что квадратная матрица (a_{ik}) порядка n положительно определенна, то уравнение (5′) будет гиперболическим. В этом случае *направления луча и касательной плоскости к фронту волны будут сопряженными относительно эллипсоида*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = 1.$$

Кроме *вектора скорости в направлении луча* с компонентами $\dot{x}_i = v_i$, можно рассматривать *вектор нормальной скорости* или *вектор волновой скорости фронта бегущей волны*; эта скорость получается, если следить за движением точки поверхности $\psi = t$ по ортогональным траекториям семейства $\psi = t = \text{const}$. Компоненты этой скорости η_i пропорциональны производным ψ_i и определяются

формулами

$$\eta_i = \frac{\psi_i}{(\operatorname{grad}\psi)^2} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Скорость по направлению нормали и скорость по направлению луча связаны уравнениями

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\eta_k (\operatorname{grad}\psi)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Более подробное изложение см. в § 3.

5. Инвариантность характеристик. Очень важны некоторые простые *свойства инвариантности.*

Пусть преобразование

$$\xi_\nu = \xi_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

переводит функцию $u(x)$ в $\omega(\xi)$; мы можем написать (см. (7)), что

$$L[u] \equiv L'[u] + cu = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + \sum_{\mu=0}^{n} \beta_\mu\omega_\mu + c\omega \equiv \Lambda[\omega] \equiv \Lambda'[\omega] + c\omega.$$

Тогда мы имеем не только $L[u] = \Lambda[\omega]$, но и $L'[u] = \Lambda'[\omega]$.

Мы утверждаем, что *характеристики инвариантны относительно произвольных преобразований независимых переменных.*

Это очевидным образом следует из самого понятия характеристического уравнения. Чтобы доказать это с помощью формальных выкладок, мы положим $\tau_{ji} = \partial\xi_j/\partial x_i$ и сразу получим, что $\alpha_{ik} = \sum_{j,l=0}^{n} a_{jl}\tau_{ij}\tau_{kl}$. Теперь, если

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \psi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n),$$

то в силу равенства $\varphi_\nu = \sum_{\mu=0}^{n} \psi_\mu\tau_{\mu\nu}$ мы имеем тождество

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = \sum_{i,k=0}^{n} \alpha_{ik}\psi_i\psi_k,$$

которое показывает, что характеристическая форма инвариантна. Иногда можно воспользоваться этой инвариантностью для того, чтобы перевести характеристическую поверхность в плоскость $x_n = 0$. *Заметим, что плоскость $x_n = 0$ является характеристической поверхностью тогда и только тогда, когда*

$$a_{nn}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0. \tag{11}$$

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $x_n = \text{const}$ давало семейство характеристических поверх-

ностей, состоит в том, что коэффициент $a_{nn}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *тождественно обращается в нуль.*

Аналогично устанавливается, что инвариантны бихарактеристические лучи; это значит, что бихарактеристические направления $\dot{\xi}_i = \frac{1}{2} Q_{\psi_i}$ и $\dot{x}_\nu = \frac{1}{2} Q_{\varphi_\nu}$ определяют один и тот же вектор, т. е. что они связаны соотношением

$$\dot{\xi}_i = \sum_{\nu=0}^{n} \dot{x}_\nu \tau_{i\nu}.$$

Ясно, что это уравнение немедленно следует из предыдущих формул[1]).

6. Конус лучей, конус нормалей, коноид лучей. Направления лучей, проходящих через точку P, образуют „локальный конус лучей" (это конус второго порядка), или конус Монжа в смысле гл. II, § 3, для характеристического дифференциального уравнения (4). Само уравнение (4) является условием, наложенным на направляющие коэффициенты $\xi_i = \varphi_i$, но не для лучей, а для нормалей к характеристическим элементам поверхности. Рассмотрим эти нормали как векторы ξ, исходящие из начала координат в пространстве с прямоугольными координатами $\xi_0, \ldots, \xi_n$ (мы можем его представлять себе в той же координатной системе, что и $x_0, x_1, \ldots, x_n$). Концы этих векторов лежат на „конусе нормалей", или на „двойственном" конусе $\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0$.

Направления лучей задаются уравнениями

$$\dot{x}_i = a_{ik}\xi_k, \tag{12}$$

где ξ_k удовлетворяют соотношению

$$Q(\xi, \xi) = 0. \tag{13}$$

Если матрица A_{ik} — обратная для матрицы a_{ik}, то в силу (12)

$$\xi_k = A_{ki}\dot{x}_i.$$

Подставив эти выражения в формулу (13), мы легко получим для коэффициентов, определяющих направление лучей, уравнение

$$A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k = 0. \tag{14}$$

---

[1]) Аналогично этому, *дифференцирование по трансверсали инвариантно относительно произвольных преобразований независимых переменных* (см. п. 4), так как для произвольных функций χ билинейная форма $\dot{\chi} = \partial\chi/\partial s = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\varphi_k\chi_i$, связанная с квадратичной формой Q, инвариантна.

Обратно, если величины $\dot{x}_i$ удовлетворяют уравнению (14), то вектор $\dot{x}_i$ имеет бихарактеристическое направление.

По определению, конус лучей является огибающей всех характеристических элементов поверхности, проходящих через точку P. Двойственный конус нормалей является огибающей плоскостей, ортогональных к лучам, образующим первый конус и проходящим через P. Двойственность двух этих конусов второго порядка может быть описана следующим образом. Мы определим коллинеацию, или преобразование двойственности, которое каждому лучу, проходящему через точку P, ставит в соответствие его полярную плоскость (т. е. ортогональную плоскость) относительно мнимого конуса $\sum_{i=0}^{n} \xi_i^2 = 0$ (*двойственное преобразование*[1])). Тогда каждый из этих конусов является огибающей полярных плоскостей лучей другого конуса.

Например, для дифференциального уравнения

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - \ldots - u_{x_nx_n} = 0$$

оба конуса совпадут, если мы отождествим пространства ξ и x.

С другой стороны, для уравнения $u_{tt} - u_{x_1x_1} - 2u_{x_2x_2} = 0$ уравнением конуса нормалей будет

$$\xi_1^2 + 2\xi_2^2 = \xi_0^2,$$

а уравнением конуса лучей — уравнение

$$x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = t^2.$$

Если коэффициенты a_{ik} дифференциального уравнения не постоянны, то положение в основном остается без изменений. Мы только должны в каждой точке рассматривать конус нормалей и *локальный* конус лучей.

Для постоянных или непостоянных коэффициентов *коноид лучей* определяется как поверхность, составленная из всех лучей, проходящих через точку P и касающихся в точке P локального конуса лучей (см. гл. II). Этот коноид является характеристической поверхностью или фронтом волны, для которого точка P является „центром возмущения“; он называется *сферическим фронтом волны* с центром в точке P (см. п. 7).

В § 3 мы рассмотрим соотношение между этими конусами в гораздо более общем виде. Здесь мы только заметим, что две части конуса лучей, исходящего из точки P в момент t, часто различаются как конус лучей, *направленный вперед* в сторону возрастающих

[1]) Часто такое преобразование называют полярным преобразованием относительно данной поверхности второго порядка.— *Прим. ред.*

значений времени, „в будущее", и конус лучей, *направленный назад*, „в прошлое".

7. Связь с римановой метрикой. Сделаем несколько замечаний, которые будут использованы в дальнейшем. В $(n+1)$-мерном пространстве R_{n+1} введем метрику с элементом длины

$$d\sigma^2 = \sum_{i,k=0}^{n} A_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{15}$$

Тогда лучи, порождающие коноид, в силу характеристического уравнения, будут лучами нулевой длины, т. е. кривыми, вдоль которых $d\sigma = 0$, или кривыми, вдоль которых расстояние между двумя точками равно нулю. Обратно, все кривые нулевой длины в этой метрике являются характеристическими лучами для дифференциального уравнения $L[u] = 0$.

Эти факты легко проверить, если снова выделить переменную $t = x_0$ в качестве временно́й координаты и рассмотреть дифференциальное уравнение частного вида

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} = 0, \tag{16}$$

где матрица (a_{ik}) предполагается положительно определенной и считается, что коэффициенты a_{ik} не зависят от времени t. Тогда характеристики $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - t = 0$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\psi_i\psi_k = 1$.

Совокупность всех лучей, проходящих через фиксированную точку пространства x, дает соответствующий характеристический коноид. Мы можем представить его в виде

$$\omega\left(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \equiv \omega(x;\ x^0) = t,$$

где x^0 — вершина коноида лучей — имеет координаты x_i^0.

Сферические фронты волны получаются из этого коноида при $\omega = t$. Если через (A_{ik}) снова обозначена матрица, обратная (a_{ik}), то вдоль лучей

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\omega_i\omega_k = 1. \tag{17}$$

В n-мерном пространстве x мы снова введем метрику с элементом длины

$$d\rho^2 = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\, dx_i\, dx_k; \tag{18}$$

тогда t дает длину вдоль этих лучей и поверхность $\omega = t$ в этой метрике является сферой радиуса t с центром в точке x^0, если расстояние измеряется по этим лучам. (Сравнение с гл. II, § 9, показывает, что эти лучи являются геодезическими кривыми для вариационной задачи, соответствующей интегралу

$$\int \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}\, dt\,.)$$

Квадрат геодезического расстояния Γ от точки x, t до точки-параметра ξ, τ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum A_{ik}\Gamma_i\Gamma_k = 4\Gamma,$$

как было показано ранее для волнового уравнения.

Направление dx_i называется направлением *временно́го типа*, если

$$d\sigma^2 = dt^2 - d\rho^2 = dt^2 - \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\, dx_i\, dx_k > 0,$$

а элемент поверхности $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется элементом *пространственного типа*, в соответствии с определением, данным в п. 1, если

$$\varphi_t^2 - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k > 0$$

(см. конец п. 2). Таким образом, в частности, ось времени $dx_i = 0$ соответствует направлению временно́го типа, а поверхность $\varphi \equiv t = 0$ является поверхностью пространственного типа. Общие понятия „временно́го" и „пространственного" типа будут рассмотрены в § 3.

Пример волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

дает иллюстрацию наших общих понятий. Соответствующие элементы длины равны

$$d\rho^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \quad \text{и} \quad d\sigma^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^{n} dx_i^2.$$

8. Двойственные преобразования. Имея в виду § 3, мы добавим еще одно замечание о двойственном преобразовании независимо от применения к дифференциальным уравнениям второго порядка.

Как было определено в п. 6, двойственное преобразование в пучке прямых, проходящих через фиксированную точку, есть линейное

преобразование, которое каждому лучу, заданному вектором ξ, ставит в соответствие плоскость

$$\xi x = 0 \tag{19}$$

с текущими координатами x, т. е. плоскость, ортогональную лучу ξ. И обратно, симметричное соотношение (19) позволяет поставить в соответствие каждой плоскости, проходящей через точку P, направление, ортогональное этой плоскости. С помощью этого линейного преобразования лучей в плоскости можно получить преобразование конуса N, порожденного лучами ξ, в конус S, порожденный плоскостями (19). Если луч ξ описывает коническую поверхность

$$N(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = N(\xi) = 0, \tag{20}$$

где N обозначает однородную функцию степени k, то с помощью формулы (19) поставим в соответствие конусу N коническую поверхность S, порожденную плоскостями, двойственными по отношению к лучам, составляющим конус N. Говоря точнее, мы можем считать, что конус S является огибающей этих плоскостей.

Такое двойственное преобразование конуса *второго порядка* снова дает конус второго порядка, но для конусов N высших порядков k это преобразование приводит, вообще говоря, к поверхностям порядка отличного от k.

Так как соотношение (20) симметрично, мы можем утверждать следующее. Плоскости, опорные для одного конуса, являются полярными плоскостями для образующих двойственного конуса, а именно, полярными плоскостями относительно мнимого конуса $\sum_{j=0}^{n} \xi_j^2 = 0$, причем начало координат P является его вершиной. Мы можем также выделить координату x_0 и рассматривать в n-мерном пространстве ξ поверхность N^*, по которой конус N пересекается с „плоскостью" $\xi_0 = -1$. Аналогично мы можем рассматривать поверхность S^* в n-мерном пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$, которая является пересечением S с плоскостью $x_0 = 1$. Тогда соотношение двойственности между поверхностями N и S, или N^* и S^*, выражается формулой

$$x\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i = 1; \tag{20a}$$

это означает что при фиксированном x точка ξ находится на плоскости, полярной для x относительно единичной сферы[1]), и наоборот.

---

[1]) Если бы мы определили N^* как пересечение N с плоскостью $\xi_0 = 1$, то плоскость была бы полярной относительно сферы мнимого радиуса i, что, впрочем, не составляет существенной разницы.

Чтобы аналитически выполнить преобразование заданной поверхности $N^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ в S^*, мы должны были бы построить огибающую плоскостей в пространстве x, удовлетворяющих соотношению (20а), нормали к которым подчиняются ограничению $N^*(\xi) = 0$. Этот процесс не только приводит к алгебраическому выражению для S^*, порядок которого, вообще говоря, выше порядка k поверхности N[1]), но, как мы покажем на примерах в § 3 и 3а, построение огибающих может также привести к образованию особенностей, таких, как изолированные точки или ребра возврата. Однако геометрическое определение преобразования позволяет обойти эти осложнения: мы рассматриваем не только касательные плоскости, но и вообще *опорные плоскости* в некоторой точке, т. е. такие плоскости, проходящие через точку P поверхности, что вся поверхность лежит по одну сторону плоскости (по крайней мере в окрестности точки P). Тогда двойственное преобразование ставит в соответствие точкам поверхности N^* геометрическое место S^* полюсов опорных плоскостей к N^*, и обратно, ставит в соответствие точкам поверхности S^* геометрическое место N^* полюсов опорных плоскостей к S^*.

Те части поверхности N^*, которые имеют гладкую кривизну, конечно, отображаются в части регулярной огибающей плоскостей, полярных к этим точкам. Появления особенностей, таких, как острие огибающей, следует ожидать в точках, соответствующих тем точкам N^*, где кривизна обращается в нуль[2]). Если часть поверхности N^* имеет особую точку, в которой имеется целый пучок опорных плоскостей, то соответствующие полюсы образуют часть некоторого линейного многообразия в пространстве x, граница которого касается огибающей.

Осложнения, которые получаются из-за возникновения особенностей, по-видимому, исключают возможность простого геометрического описания. Это объясняется тем, что наши знания об алгебраических поверхностях в действительном пространстве недостаточны.

Однако при преобразовании замкнутой *выпуклой* поверхности N' (N' может быть частью поверхности N^*) положение становится ясным и уже не осложняется наличием особенностей. В этом случае мы легко можем показать, что *поверхность S', двойственная по отношению к выпуклой поверхности N', также выпукла; она является выпуклой оболочкой* множества точек, полученного с помощью построения обычной огибающей к полярным плоскостям N'.

---

[1]) Однако существуют важные с точки зрения математической физики случаи, когда обе эти поверхности имеют одинаковый порядок; см., например, в § 3а уравнения кристаллооптики.

[2]) Примеры будут рассматриваться в § 3 и 3а.

Действительно, пусть соотношение $\sum x_i\xi_i - 1 \leqslant 0$ определяет „положительную" сторону плоскости $(x\xi) - 1 = 0$, полярной к точке ξ. Предположим, что точка $\xi = 0$ лежит внутри поверхности N', и определим двойственное преобразование для замкнутой внутренности $\overline{N}'$ поверхности N' как пересечение (т. е. совокупность общих точек) всех полупространств $(x\xi) - 1 \leqslant 0$, соответствующих точкам ξ из $\overline{N}'$. Это точечное множество $\overline{S}'$ выпукло, так как оно является пересечением множества полупространств; выпукла также его граница S'; очевидно, что она является образом поверхности N'. Мы могли также определить двойственный образ выпуклой области $\overline{N}'$ как множество полюсов для всех плоскостей в пространстве ξ, не пересекающих область $\overline{N}'$. Читатель легко может убедиться в эквивалентности этих определений.

Во всяком случае, очевидно, что S' является выпуклой оболочкой для огибающей полярных плоскостей, соответствующих точкам гладкой части поверхности N'.

Значение двойственных поверхностей для дифференциальных уравнений высших порядков будет выясняться еще в § 3.

9. Построение фронта волны по Гюйгенсу. Теория полного интеграла и соответствующее построение огибающих решений задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка немедленно приводит к следующему важному способу построения фронта волны (см. гл. II, § 4 и 8, а также § 3 этой главы).

Мы рассмотрим возможный фронт волны $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$, удовлетворяющий уравнению $a_{ik}\psi_i\psi_k = 1$. Сферические волны вокруг точки P_0 будем обозначать через $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, P_0) = t$. Если при $t = 0$ фронт волны совпадает с заданной поверхностью W_0, то построение Гюйгенса позволяет получить фронт волны в момент t следующим образом. Вокруг каждой точки P_0 поверхности W_0 мы рассмотрим сферический фронт волны $t = \omega(x, P_0)$ и при фиксированном положительном значении t построим огибающую всех этих сфер в пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заставляя точку P_0 пробегать всю поверхность W_0. Это дает поверхность $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$, содержащую искомый фронт волны. Другими словами, *фронт волны в данный момент времени t можно получить как огибающую сфер радиуса t, в смысле описанной выше метрики, причем их центры лежат на поверхности фронта волны при $t = 0$*[1]).

[1]) Мы обращаем внимание читателя на то, что с первого взгляда кажется парадоксом: предположим, что $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ есть решение дифференциального уравнения $L[u] = 0$, причем $\psi = t$ — фронт волны. Пусть этот фронт волны состоит из одной поверхности W_t, перемещающейся в пространстве R_n с течением времени. Если мы будем исходить из фронта

10. Поверхности пространственного типа. Направления временнóго типа. Теперь мы займемся дальнейшим выяснением смысла понятия поверхности „пространственного типа" для гиперболических уравнений второго порядка. Значение этого понятия (см. § 8, 9) состоит в том, что задача Коши разрешима, если начальная поверхность пространственного типа.

Если оператор второго порядка $L[u]$ гиперболический, т. е. если матрица a_{ik} имеет одно отрицательное собственное значение и n положительных, то все направления ξ, удовлетворяющие соотношению $Q=0$, образуют *конус нормалей* в пространстве ξ. Элемент поверхности, проходящий через точку P, называется элементом *пространственного типа*, если его нормаль ξ направлена внутрь конуса, т. е. если $Q(\xi)>0$. Он называется *характеристическим*, если $Q(\xi)=0$, и элементом *не пространственного типа*, если $Q(\xi)<0$. *Поверхность пространственного типа* — это такая поверхность, элемент которой в каждой точке является элементом пространственного типа.

Как легко видеть, следующее определение эквивалентно определению, данному выше: элемент поверхности, проходящей через точку P, называется элементом пространственного типа, если он пересекает локальный конус лучей, построенный в точке P, лишь в самой этой точке, т. е. если он разделяет две части конуса. Направление называется направлением *временнóго типа*, если оно входит во внутренность локального конуса лучей.

Если расстояние по направлению временнóго типа отождествляется со временем t, то говорят, что точка P разделяет части конуса лучей, направленные „вперед" и „назад", или конус лучей, соответствующий *будущему*, и конус, соответствующий *прошлому*.

В § 3 мы увидим, как эти понятия обобщаются, разъясняются и делаются более тонкими для задач высших порядков.

§ 2. Уравнения второго порядка. Значение характеристик

Вместо того чтобы определить характеристики как поверхности, на которых нельзя свободно задавать данные Коши (как мы делали в § 1), мы могли бы воспользоваться следующим эквивалентным их

волны W_0 в момент $t=0$, то построение Гюйгенса может привести к двум различным „параллельным поверхностям" W_t и W'_t, причем обе удовлетворяют характеристическому дифференциальному уравнению. Однако, по предположению, разрыв решения u в момент t происходит только на одной из них, а именно на той, которая действительно соответствует моменту времени t, в то время как другая поверхность соответствует времени $-t$.

Характеристическая поверхность может (но не обязана) быть поверхностью разрыва решения u, и построение огибающих может также привести к поверхностям, на которых решение в момент t не имеет разрыва; это не будет противоречить нашей теории.

свойством, которое подчеркивает несколько иную сторону этого понятия: на характеристической поверхности C дифференциальный оператор является *внутренним оператором* в смысле, который мы сейчас уточним. Мы видели в гл. V, что это свойство является решающим для построения решения задачи Коши в случае двух независимых переменных. Для большего числа независимых переменных это свойство, вообще говоря, не приводит к аналогичному прямому построению решения, за исключением некоторых специальных дифференциальных уравнений (см. п. 4).

Однако в общем случае можно исследовать основные свойства разрывного решения, пользуясь внутренним характером дифференциального оператора на характеристиках. При этом можно построить хотя бы остов решения, решая только обыкновенные дифференциальные уравнения. При соответствующих предположениях можно даже пойти дальше по пути полного построения решения задачи Коши. Следующий важный факт играет большую роль в теории распространения волн, а именно: имеющие физический смысл разрывы решений могут происходить только на характеристических поверхностях (в связи с этим такие разрывы будут называться фронтами волны) и перемещаются по этим характеристикам вдоль бихарактеристических лучей. Это распространение разрывов описывается простым обыкновенным дифференциальным уравнением.

В этом параграфе мы кратко опишем положение дел для линейного (и квазилинейного) уравнения второго порядка с тем, чтобы более подробно рассмотреть эти вопросы в § 4 и 5.

1. Разрывы второго порядка. Рассмотрим поверхность $C: \varphi(x_0, \ldots, x_n) = 0$, на которой первые производные решения u уравнения (1) из § 1 непрерывны[1]) и непрерывны также все тангенциальные, или внутренние, производные от этих первых производных. Вторые производные u_{jk} (если они не являются внутренними производными) могут иметь скачки на поверхности C.

Для любой функции f, имеющей скачок при переходе через поверхность C, мы будем в дальнейшем обозначать этот скачок через (f)[2]). Выражение $u_{ik}\varphi_j - u_{ij}\varphi_k$ является внутренней производной от u_i на поверхности C (см. гл. II, прил., § 1) и, следовательно, непрерывно при переходе через C. То же самое справедливо относительно $u_{ij}\varphi_l - u_{jl}\varphi_i$. Следовательно, линейная комбинация $u_{ik}\varphi_j\varphi_l - u_{jl}\varphi_i\varphi_k$ этих двух непрерывных выражений также непре-

[1]) Здесь можно предполагать, что это уравнение линейно или квазилинейно.

[2]) В гл. V, § 1, п. 3 скачок функции f обозначался через $[f]$. — *Прим. ред.*

рывна при переходе через C. Тогда для величины скачков мы получаем соотношение

$$(u_{ik})\varphi_j\varphi_l = (u_{jl})\varphi_i\varphi_k,$$

и, таким образом [1]),

$$(u_{ik}) = \lambda\varphi_i\varphi_k,$$

где коэффициент пропорциональности λ есть функция, определенная на поверхности C, которая не может обращаться в нуль ни в какой точке поверхности, где хотя бы одна из вторых производных функции u разрывна. Между прочим, легко видеть, что

$$\lambda = (u_{\varphi\varphi}).$$

Очевидно, что поверхность C должна быть характеристической, так как иначе значения всех вторых производных на поверхности C однозначно определялись бы через значения u и u_i на C и, следовательно, не могли бы иметь скачков. Этот факт можно также установить непосредственно, рассматривая на поверхности C соотношение на разрыве $(L[u]) = 0$ и применяя предыдущие формулы; мы получим [2])

$$0 = \sum_{i,\,k=0}^{n} a_{ik}(u_{ik}) = \lambda \sum_{i,\,k=0}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k.$$

Разрывы первых производных некоторого искусственно введенного обобщенного решения u могут быть совместимы с дифференциальным уравнением и на нехарактеристических поверхностях (см. гл. V, § 1 и § 3 этой главы). Однако в обобщенных решениях, имеющих физический смысл[3]), такие скачки в действительности происходят при переходе через характеристические поверхности, как мы покажем в § 3. То же самое справедливо относительно скачков самой функции u и для других типов скачков.

Доказательство существования таких решений, которые исследовались в этом пункте, будет дано в § 4 и в § 10.

---

[1]) По предположению, все производные функции φ не могут обращаться в нуль одновременно ни в какой точке поверхности $\varphi = 0$.

[2]) Аналогичное исследование можно провести для таких разрывов на поверхности C, когда разрывны только производные порядка $2+r$; мы должны просто r раз продифференцировать уравнение и применить к продифференцированному уравнению прежнее рассуждение. В результате снова получится, что поверхность C характеристическая; кроме того, если скачок выводящей $(r+2)$-й производной есть $\lambda = (u_{\varphi^{r+2}})$, то скачки производных $D_0^{\alpha_0} \ldots D_n^{\alpha_n} u$ равны

$$\lambda\varphi_0^{\alpha_0} \ldots \varphi_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_0 + \ldots + \alpha_n = r+2),$$

где D_i обозначает $\partial/\partial x_i$.

[3]) „Допустимые“ решения будут охарактеризованы в § 4.

2. Дифференциальное уравнение на характеристической поверхности. Для краткости мы ограничимся линейными дифференциальными уравнениями. Мы выясним, какие сведения можно получить из того факта, что

$$L[u] \equiv \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=0}^{n} a_i u_i + au = 0 \tag{1}$$

на характеристической поверхности $\varphi = 0$. Без ограничения общности мы можем предположить, что семейство поверхностей $\varphi = c = \text{const}$ преобразовано в семейство координатных плоскостей $x_n = c = \text{const}$.

Результаты можно будет затем сформулировать для произвольных поверхностей $\varphi = c$ на основании свойства инвариантности, доказанного в § 1, п. 5.

Мы запишем уравнение (1) в виде

$$L[u] \equiv \sum_{i,k=0}^{n-1} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u_i + au + a_{nn} u_{nn} + \\ + 2 \sum_{i=0}^{n-1} a_{in} u_{in} + a_n u_n = 0. \tag{2}$$

Теперь мы объединим члены, содержащие только внутреннее дифференцирование на поверхности $C: x_n = 0$, т. е. дифференцирование по переменным $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, и обозначим их сумму через J. Мы имеем

$$L[u] \equiv J + a_{nn} u_{nn} + a_n u_n + 2 \sum_{i=0}^{n-1} a_{in} u_{in} = 0. \tag{3}$$

Из предположения о том, что поверхности $\varphi = x_n = \text{const}$ являются характеристическими, немедленно следует, что $a_{nn} = 0$, и обратно. Поэтому на этих характеристических поверхностях мы имеем

$$L[u] = J + a_n u_n + 2 \sum_{i<n} a_{in} u_{in} = 0. \tag{4}$$

Далее, для $\varphi = x_n$ производные характеристической формы $Q(\varphi_i, \varphi_k)$ равны

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi_i} = 2a_{in}, \quad i < n, \quad \frac{\partial Q}{\partial \varphi_n} = 0.$$

В силу § 1, вектор Q_{φ_i} касается поверхности $\varphi = \text{const}$ и указывает направление бихарактеристических лучей. Вводя производную $u_\varphi = v$, выводящую из поверхности, и соответствующий параметр s на лучах,

лежащих на поверхности $\varphi = \text{const}$, мы можем записать уравнение (4) в виде

$$J + \frac{\partial v}{\partial s} + a_n v = 0, \tag{5}$$

где $\partial/\partial s = 2 \sum_{i<n} a_{in} \partial/\partial x_i$.

В соответствии с § 1, дифференцирование по характеристическим направлениям инвариантно [1]) относительно преобразования, переводящего плоскости $x_n = \text{const}$ в другие семейства характеристических поверхностей $\varphi = c = \text{const}$. Кроме того, по определению, выражение $L[\varphi - c]$ на поверхности $\varphi = c$ инвариантно относительно преобразований координат (эта инвариантность определяет преобразование коэффициентов оператора L). Так как для $\varphi = x_n = 0$ мы имеем $L\{\varphi\} = a_n$, и, вообще, для $\varphi = x_n = c$ мы имеем $L[\varphi - c] = a_n$, то мы можем теперь записать уравнение (5) на характеристической поверхности C_c с уравнением $\varphi = c$ в виде

$$J + \frac{\partial v}{\partial s} + L[\varphi - c]\, v = 0, \tag{6}$$

где оператор $L[\varphi - c]$ на C_c обращается в известную функцию, а выражение J также известно на C_c, если известна функция u. Эта замечательная форма исходного дифференциального оператора будет по разным поводам встречаться и дальше. Это соотношение показывает, что на C данные Коши действительно нельзя выбирать произвольно. Мы сейчас воспользуемся этой формой уравнения для изучения распространения разрывов.

3. Распространение разрывов по лучам. Уравнение (6) представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно выводящей производной $v = u_\varphi$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение выполняется на каждом из лучей, порождающих характеристическую поверхность $\varphi = c$.

Теперь мы на некоторое время вернемся к предположению, что семейство характеристик состоит из плоскостей $\varphi = x_n = c$. Тогда тождественно выполняется равенство $a_{nn} = 0$.

Мы воспользуемся уравнением (6), дифференциальным уравнением, которое получается в результате дифференцирования (1) по $x_n = \varphi$, предположим, что $a_{nn} = 0$, и получим, что

$$\sum_{i,k<n} a_{ik} u_{ikn} + 2 \sum_{i<n} a_{in} u_{nni} + \sum a_i u_{ni} + a u_n + \\ + (a)_n u + a_n u_{nn} + \sum_{i,k<n} (a_{ik})_n u_{ik} + \\ + 2 \sum (a_{in})_n u_{ni} + \sum (a_i)_n u_i = 0.$$

---

[1]) С точностью до произвольного внутреннего параметра на бихарактеристических кривых.

На поверхности $\varphi=0$ функция u и ее первые производные, а следовательно, также их внутренние производные, предполагаются известными. Объединяя их во внутренний оператор J^*, будем иметь

$$J^*+2\sum_i a_{in}w_i+a_n w=0 \qquad (w=u_{\varphi\varphi}).$$

Если, как в уравнении (6), мы обозначим дифференцирование по лучу, лежащему на поверхности C, через $\partial/\partial s$, то мы можем написать, что

$$J^*+\frac{\partial w}{\partial s}+a_n w=0. \tag{5a}$$

Теперь, как в п. 1, предположим, что производная $u_{\varphi\varphi}$ имеет скачок при переходе через C

$$(u_{\varphi\varphi})=(w)=\lambda,$$

в то время как функция u, ее первые производные, а также их внутренние производные, непрерывны на C. Тогда, в силу непрерывности выражения J^*, уравнение (5a) немедленно дает соотношение на скачке [1]) для поверхности $C: x_n=0$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s}+P\lambda=0, \tag{7}$$

где $\partial/\partial s$ обозначает дифференцирование по бихарактеристическим лучам на поверхности C, а выражение $P=L[\varphi]=L[x_n]$ на поверхности C известно.

Уравнение (7) дает закон, управляющий *распространением разрыва вдоль лучей*, лежащих на характеристической поверхности разрыва. Оно имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения и, между прочим, показывает, что величина скачка не может обратиться в нуль ни в одной точке луча, если он где-нибудь на нем отличен от нуля.

Вследствие инвариантности характеристик и дифференцирования по характеристическим направлениям, соотношение (7), где $P=L[\varphi]$, имеет место для произвольных, не обязательно плоских, характеристических поверхностей $\varphi=0$. Чтобы установить этот факт, заметим, что если мы преобразуем x_n в φ, то выводящая производная u_{nn} перейдет в $u_{\varphi\varphi}\varphi_{x_n}^2+\ldots$. Точками обозначены члены, непрерывные при переходе через поверхность C; они пропадут, если мы возьмем разность значений оператора $L[u]$ с двух сторон C. Множитель $\varphi_{x_n}^2$ приводит лишь к изменению параметра s на луче.

---

[1]) Оно получается, если рассмотреть уравнение (5a) для двух точек, лежащих по разные стороны C в окрестности некоторой точки C, взять разность и перейти к пределу при стремлении этих точек к одной точке на C.

Если разрыв происходит при переходе через характеристическую поверхность $\varphi = c$, то закон (7) надо заменить следующим:

$$\lambda_s + L[\varphi - c]\lambda = 0.$$

Мы увидим, что аналогичные законы справедливы для всех типов особенностей решений линейных дифференциальных уравнений, например, для разрывов первых производных или даже самой функции u, в смысле, который будет уточнен позднее (см. § 4, п. 3).

Наконец, обратим внимание на одну специальную характеристическую поверхность, а именно, „коноид лучей", введенный в § 1. По его лучам переносятся локальные разрывы из его вершины в пространство x.

4. Пример. Решение задачи Коши для волнового уравнения с тремя пространственными переменными. Как указывалось во введении, есть случаи, когда решение может быть фактически построено с помощью интегрирования по лучам.

Важный пример дает уравнение

$$L[u] \equiv u_{tt} - \Delta u \equiv u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0. \tag{8}$$

Применяя высказанные выше идеи, мы решим задачу Коши для этого уравнения; эта задача уже рассматривалась в гл. III, § 5; более подробно она будет исследована в § 12. При $t = 0$ мы зададим начальные значения

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z).$$

Мы введем следующие символы дифференцирования:

$$A_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad A_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad A_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{t-\tau}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + (t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{t-\tau}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - (t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right].$$

Эти обозначения несколько отличаются от обозначений п. 3.

Тогда на характеристическом конусе K

$$K : (t-\tau)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

с вершиной в точке P: $(0, 0, 0, \tau)$ дифференциальные операторы A_1, A_2, A_3 и дифференцирование в характеристическом направлении $\partial/\partial s$ являются внутренними дифференциальными операторами, а $\partial/\partial\nu$ обозначает дифференцирование по направлению нормали.

Каким образом на K связаны внутренние производные, видно из тождества

$$\Psi[u] = -(t-\tau)^2 L[u] - (t-\tau)\frac{\partial u}{\partial s} - (t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left[(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] = \\ = \left(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right) u, \qquad (9)$$

справедливого для $(t-\tau)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Но на трехмерной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$ поверхностный интеграл от $A_1[v]$ равен нулю для произвольной функции v, так как равен нулю соответствующий интеграл по любому кругу, образованному пересечением сферы с плоскостью $z = \text{const}$. То же самое, конечно, справедливо для соответствующих поверхностных интегралов от $A_2[v]$ и $A_3[v]$ и, следовательно, также и для выражения $\left(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right) v = \Psi[v]$. С помощью выражения $\Psi[u]/(t-\tau)$ мы теперь составим интеграл

$$\iiint\limits_K \frac{\Psi[u]}{t-\tau}\, ds\, d\omega$$

по той половине характеристического конуса, для которой $\tau > t > 0$. Так как $L[u] = 0$,

$$\iiint\limits_K \left\{\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\left[(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]\right\} ds\, d\omega = 0,$$

и после интегрирования по s мы получаем

$$4\pi\tau^2 u(P) - \iint u\, d\omega - \tau \iint \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\omega = 0, \qquad (10)$$

где интегрирование производится по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \tau^2$. Это решение было уже найдено в гл. III, § 5.

Таким же способом для неоднородного волнового уравнения можно получить решение, данное в гл. III, § 5.

Данный здесь метод, по существу принадлежащий *Бельтрами*, опирается на тот факт, что с помощью внутренних дифференцирований мы можем особенно просто записать дифференциальное уравнение на характеристическом конусе[1]). С помощью интегрирования только по поверхности конуса можно явно найти значение решения u в вершине через начальные данные на границе основания конуса. Этот метод вскрывает „гюйгенсовский характер“ волнового уравнения.

Нельзя построить совершенно аналогичную теорию для произвольных линейных дифференциальных уравнений второго порядка и получить решения с помощью интегрирования по лучам, лежащим

---

[1]) Этот метод был обобщен М. Риссом [2] на все нечетные значения n.

на характеристическом коноиде, так как из такой теории следовала бы справедливость принципа Гюйгенса в общем случае, что, конечно, не имеет места. Интересной задачей является получение условий, достаточных для того, чтобы был справедлив принцип Гюйгенса; для этого можно применить методы, близкие к методам этого параграфа [1]).

§ 3. Геометрия характеристик для операторов высших порядков

Для уравнений высших порядков и для систем уравнений необходимо существенно обобщить теории, изложенные в § 1 и 2 (см. также гл. III и V); это обобщение будет сделано в настоящем параграфе.

1. Обозначения. Мы будем пользоваться следующими обозначениями [2]). Дифференцирование по $x_\varkappa$ снова будет обозначаться через $D_\varkappa$ или $D^\varkappa$:

$$D^\varkappa = D_\varkappa = \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, n).$$

Вместо $x_0, \ldots, x_n$ мы иногда будем писать x; однако, если переменная $x_0 = t$ выделяется и рассматривается как время, то мы будем через x обозначать n-мерный вектор $x_1, \ldots, x_n$. Оператор градиента будет обозначаться через D:

$$D = (D_0, \ldots, D_n).$$

Пусть $p = (p_0, \ldots, p_n)$ — произвольный вектор с $n+1$ неотрицательными целыми компонентами. Пусть $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$ — произвольный $(n+1)$-мерный вектор. Тогда мы положим $\xi^p = \xi_0^{p_0} \ldots \xi_n^{p_n}$. Компоненты вектора ξ могут быть числами или операторами; в частности, для $\xi = D$ символ D^p обозначает дифференциальный оператор

$$D^p = D_0^{p_0} \ldots D_n^{p_n}.$$

---

[1]) См. Асгейрссон [1], Штелльмахер [1] и Дуглис [2]. См. также, например, § 18.

[2]) Между прочим, одно из преимуществ этих обозначений (предложенных Лораном Шварцем) состоит в том, что они позволяют кратко записать правило Лейбница и теорему Тейлора. Если мы положим

$$p! = p_1!\, p_2! \ldots p_n!,$$

то мы будем иметь

$$D^p(uv) = \sum_{q+r=p} \frac{p!}{q!\, r!} D^q u D^r v$$

и

$$f(\xi + x) = \sum_p \frac{1}{p!} \xi^p D^p f(x).$$

Порядок дифференциального оператора D^p обозначается через $|p|$:

$$|p| = p_0 + \dots + p_n.$$

В этих обозначениях дифференциальный оператор порядка m можно записать в таком виде:

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} a^p D^p u = f.$$

Коэффициенты a^p, так же как и правая часть f, могут быть постоянными, или функциями независимых переменных x, или зависеть от x, u и от производных функции u до порядка $m-1$.

Большинство уравнений математической физики имеет вид систем k уравнений с k неизвестными функциями $u_1, \dots, u_k$, которые мы будем рассматривать как компоненты одного вектора-столбца u; уравнение тогда можно записать в матричной форме

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} A^p D^p u = f. \tag{1}$$

Здесь дифференциальный оператор D^p действует на каждую компоненту вектор-функции u, коэффициенты A^p являются квадратными матрицами порядка k, а f — вектор с k компонентами.

Так же, как и раньше, коэффициенты A^p могут быть постоянными или же зависеть от x; для квазилинейных уравнений они зависят от функции u и от ее частных производных до порядка $m-1$. Члены наивысшего порядка составляют *главную часть* оператора:

$$\sum_{|p|=m} A^p D^p.$$

Имея в виду некоторые конкретные случаи, мы обратим особое внимание на три класса уравнений.

Случай а: системы первого порядка

$$L[u] = \sum_{i=0}^{n} A^i D_i u + Bu = f. \tag{1а}$$

Случай б: одно уравнение порядка m

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} a^p D^p u = f. \tag{1б}$$

Общий случай (1) систем уравнений порядка m мы будем называть случаем в.

Особенно важны для приложений системы второго порядка, которые могут быть записаны в более развернутой форме

$$L[u] = \sum_{i,j=0}^{m} A^{ij} D_i D_j u + \sum_{i=0}^{n} A^i D_i u + Bu = f,$$

где B, A^i, A^{ij} — квадратные матрицы порядка k и $A^{ij} = A^{ji}$.

2. Характеристические поверхности, формы и матрицы. Задача Коши состоит в том, чтобы найти решение уравнения $L[u]=f$, если на некоторой поверхности[1]) C заданы „данные Коши". Для уравнения или системы уравнений порядка m этими данными являются значения u и ее частных производных до порядка $m-1$ включительно по какой-нибудь переменной, выводящей из поверхности. (Мы предполагаем, что все уравнения системы имеют один и тот же порядок m.) В частности, для систем первого порядка (случай а) данные Коши состоят из значений самих функций u.

По данным Коши мы можем с помощью внутреннего (тангенциального) дифференцирования определить все частные производные u до порядка $m-1$, а также значения тех производных порядка m и выше, которые получаются дальнейшим внутренним дифференцированием. Дифференциальный оператор, значения которого на поверхности C определяются таким образом через данные Коши, называется *внутренним дифференциальным оператором порядка* m (см. гл. III, § 2).

В этом пункте мы не будем пытаться строить решения дифференциального уравнения (1), а займемся следующим *предварительным вопросом*, касающимся только начальной поверхности C.

Для каких поверхностей C существуют функции u, соответствующие произвольным данным Коши и удовлетворяющие на C уравнению $L[u]=f$?

Если такую функцию u всегда можно найти, то поверхность C называется *свободной* для оператора L; если никакая часть поверхности не является свободной, то она называется *характеристической поверхностью* оператора L.

Решить вопрос о том, является ли поверхность C характеристической[2]), можно с помощью следующего алгебраического критерия, выраженного через коэффициенты оператора L и нормаль ξ к поверхности C: $\varphi(x)=0$. Мы определим однородную „характеристическую форму" $Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ порядка mk относительно компонент вектора $\xi=D\varphi$, нормального к поверхности C, такую, что равенство

$$Q(\xi_0, \ldots, \xi_n)=Q(\xi)=0 \tag{2}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы поверхность C была характеристической[3]). Для одного уравнения (1б)

---

[1]) Под поверхностью мы подразумеваем гладкую n-мерную гиперповерхность $\varphi(x)=0$ с $|D\varphi|\neq 0$.

[2]) См. также гл. V и гл. III, § 2. Приведенное здесь рассуждение отчасти повторяет прежние.

[3]) Конечно, это условие можно применять просто к элементу поверхности C, если мы хотим подчеркнуть его локальный характер.

порядка m характеристическая форма Q задается формулой

$$Q(\xi) = \sum_{|p|=m} a^p \xi^p; \tag{3}$$

для системы (1в) Q является определителем

$$Q(\xi) = \left\| \sum_{|p|=m} A^p \xi^p \right\|. \tag{4}$$

В особенно важном случае системы уравнений первого порядка (1а) мы имеем

$$Q(\xi_0, \ldots, \xi_n) = \left\| \sum A^i \xi_i \right\|. \tag{5}$$

Для систем второго порядка

$$Q = \left\| \sum A^{ij} \xi_i \xi_j \right\|.$$

Для систем уравнений произвольного порядка m характеристическая форма является определителем характеристической матрицы

$$A = \sum_{|p|=m} A^p \xi^p. \tag{6}$$

В случае $m = 1$ характеристическая матрица имеет вид

$$A = \sum_{i=0}^{n} A^i \xi_i, \tag{7}$$

а в случае $m = 2$ —

$$A = \sum_{i,\,j=0}^{n} A^{ij} \xi_i \xi_j. \tag{8}$$

То, что $Q = 0$ есть характеристическое уравнение, следует из наших предыдущих рассуждений. Введем внутренние переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на поверхности C и выводящую переменную $\varphi = \lambda_0$; тогда с помощью уравнения $Q = 0$ мы выражаем условие, что на поверхности C уравнение $L[u] = 0$ не определяет всех величин $(\partial/\partial\varphi)^m u$ через произвольные данные Коши для u. Система линейных алгебраических уравнений для этих k величин имеет матрицу A и определитель Q. Естественно, что характеристические формы Q и матрицы A зависят от точки x, если коэффициенты главной части оператора L не постоянны.

В случае систем (1а), (1в) условие $Q = 0$ означает, что *характеристическая матрица* A — *особая*; следовательно, существуют k-компонентные *левые нуль-векторы* l и *правые нуль-векторы* r, такие, что

$$lA = Ar = 0.$$

Если ранг матрицы A равен $k - 1$, то эти нуль-векторы в каждой точке данной характеристической поверхности C определяются однозначно с точностью до произвольного скалярного множителя.

Оператор L, соответствующий одному уравнению, является *внутренним* на каждой характеристической поверхности C.

Если $L[u]$ — матричный оператор, применяемый к вектору u, то условие, что характеристический определитель Q равен 0, равносильно утверждению, что оператор

$$lL[u],$$

действующий на вектор u, является внутренним оператором на характеристической поверхности C.

3. Интерпретация характеристического уравнения во времени и пространстве. Конус нормалей и поверхность нормалей. Характеристические нуль-векторы и собственные значения. Если $x_0 = t$ выделяется в качестве временно́й переменной, то мы можем, как в § 1, представить характеристическую поверхность в виде $\varphi(t, x) = \psi(x) - t = 0$, т. е. как поверхность C с уравнением $\psi(x) = \text{const} = t$, перемещающуюся в n-мерном пространстве x. Мы имеем $\varphi_t = -1$, $\varphi_{x_i} = \psi_{x_i} = \xi_i$ и будем рассматривать вектор ξ в n-мерном пространстве. *Нормальная скорость* перемещающейся поверхности $\psi = t$ есть вектор v, ортогональный к поверхности и такой, что $|v|$ есть скорость изменения значения ψ вдоль этой нормали. Таким образом, мы имеем

$$v = \lambda\xi, \quad 1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i = \xi v, \qquad \lambda\xi^2 = 1,$$

где $\xi = D\psi$ — n-мерный вектор, а λ — некоторый скаляр; поэтому

$$\xi = \frac{v}{v^2}, \quad v = \frac{\xi}{\xi^2}.$$

Векторы ξ и v обратны, или „двойственны“, друг другу относительно единичной сферы, а характеристическое уравнение (2) можно записать в виде

$$Q(-1, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \qquad (\xi = D\psi). \tag{9}$$

Если ввести n-мерный единичный вектор

$$\alpha = \frac{\xi}{|\xi|}$$

в пространстве x, нормальный к поверхности C, то из уравнения (9) мы в силу однородности функции $Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ получим эквивалентное ему уравнение

$$Q(-|v|, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0. \tag{9a}$$

Это алгебраическое уравнение степени mk относительно нормальной скорости $|v|$ для такой характеристической поверхности, нормаль

к которой имеет направление вектора α. Для дифференциальных операторов с непостоянными коэффициентами эти соотношения относятся, конечно, к фиксированной точке в пространстве x и к определенному моменту времени t.

Вместо уравнения (9а) мы можем также написать уравнение

$$Q\left(-1, \frac{v_i}{|v|^2}\right) = 0. \tag{9б}$$

Важно отметить, что для системы первого порядка

$$L[u] = u_t + \sum_{\nu=1}^{n} A^\nu u_\nu + \ldots = 0, \tag{1а}$$

где $A^0 = I$ есть единичная матрица, нуль-векторы l или r для характеристической поверхности $\varphi = \psi(x) - t = 0$ являются просто левыми или правыми собственными векторами матрицы $\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu A^\nu$, где $\psi_{x_\nu} = \xi_\nu$, а *нормальные скорости* $|v|$ *равны собственным значениям матрицы*

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^i.$$

Это следует из того, что соотношение $Q = \|A\| = 0$ дает

$$\|-vI + \hat{A}\| = 0.$$

Не подчеркивая без необходимости временно́й характер переменной t, мы сейчас определим *характеристический конус нормалей* в точке O пространства $x_0, x_1, \ldots, x_n$ как конус, порожденный нормалями ко всем характеристическим элементам поверхности в точке O. Если через $\xi_0, \ldots, \xi_n$ обозначены текущие координаты на конусе с вершиной O в начале координат, то однородное алгебраическое уравнение степени mk

$$Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \tag{10}$$

дает конус нормалей, проходящий через точку O.

Конус нормалей непосредственно выражается через дифференциальный оператор L.

Если мы снова выделим переменную $x_0 = t$, то характеристическое уравнение (9) в пространстве $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с геометрической точки зрения представляет собой поверхность, называемую *поверхностью нормалей*, т. е. пересечение конуса нормалей с плоскостью $\xi_0 = -1$: $Q(-1, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$.

Аналогично, мы можем истолковать вид (9б) характеристического уравнения в n-мерном пространстве компонент скорости $v_1, \ldots, v_n$ как поверхность, которую мы назовем *поверхностью нормальных*

скоростей, или *взаимной поверхностью нормалей* [1]). В силу уравнения (9а) эта поверхность является геометрическим местом таких точек P, для которых расстояние до точки O по направлению α равно скорости $|v|$. Эти поверхности нормалей соответствуют друг другу при преобразовании инверсии относительно единичной сферы $|\xi|^2=1$ в пространстве ξ [2]).

4. Построение характеристических поверхностей или фронтов. Лучи, конус лучей, коноид лучей. В физическом пространстве x решения характеристического уравнения $Q(\xi)=0$ для нормалей $\xi=\operatorname{grad}\varphi=D\varphi$ можно интерпретировать как характеристические поверхности $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\text{const}$. Как и в § 1, мы будем рассматривать $Q=0$ как дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$; тогда *все* поверхности семейства $\varphi=\text{const}=c$ являются характеристическими поверхностями C_c [3]). Они строятся в соответствии с теорией дифференциальных уравнений первого порядка, развитой в гл. II.

Любое решение характеристического дифференциального уравнения $Q(D\varphi)=0$ порождается n-параметрическим семейством характеристических кривых, соответствующих уравнению первого порядка $Q=0$. Эти „бихарактеристики", или *лучи*, связанные с оператором L, можно дополнить до *бихарактеристических полос*, задавая на них значения

$$\xi_i=D_i\varphi.$$

(Мы рассматриваем значения ξ_i на этих кривых как функции параметра λ на нашей кривой, и точкой мы будем обозначать дифференцирование по λ.) Тогда, как и в § 1, бихарактеристические полосы удовлетворяют системе $2n+2$ канонических обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i=Q_{\xi_i}, \tag{11}$$

$$\dot{\xi}_i=-Q_{x_i}; \tag{11a}$$

---

[1]) Обе эти поверхности, уравнения которых тесно связаны, очень полезны при наглядном изучении явлений распространения. Между прочим, иногда используется терминология, обратная применяемой здесь.

[2]) Независимо от того, выделяем ли мы переменную t, мы можем интерпретировать геометрические соотношения в n-мерном проективном пространстве.

[3]) Если мы будем рассматривать не семейство поверхностей, а отдельную поверхность $\varphi=0$ и представим эту поверхность в виде $\varphi=-t+\psi(x_1, \ldots, x_n)=0$, то функция ψ от n переменных x удовлетворяет дифференциальному уравнению $Q\left(-1, \psi_{x_1}, \ldots, \psi_{x_n}\right)=0$, причем в коэффициентах переменную t надо заменить на ψ.

функция $Q(x, \xi)$ есть интеграл этой системы. Мы потребуем, чтобы в одной из точек каждого луча выполнялось условие $Q=0$; тогда уравнения (11), (11a) и $Q=0$ определят $2n$-параметрическое семейство характеристических полос; оно определяется независимо от частного вида характеристической поверхности $\varphi=\mathrm{const}$.

Если переменная $x_0=t$ выделяется и мы записываем уравнение $Q(\xi)=0$ в виде $\xi_0-\chi(\xi_1, \ldots, \xi_n)=0$, то снова имеем $\dot{x}_0=1$, т. е. параметр λ можно отождествить со временем: $\lambda=t=x_0$.

Если предполагается, что функция $\varphi(x)$ известна, то ясно, что даже одна система (11) определяет бихарактеристики на характеристических поверхностях C_c: $\varphi=\mathrm{const}=c$, если в Q вместо ξ_i подставлены значения φ_{x_i}, зависящие от $x_0, \ldots, x_n$.

Для того чтобы построить характеристическую поверхность $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=0$, проходящую через заданное $(n-1)$-мерное многообразие $\mathcal{J}'$ на n-мерной начальной поверхности $\mathcal{J}$, мы предположим, что $\mathcal{J}$ имеет вид $x_0=0$, так как любую n-мерную начальную поверхность $\mathcal{J}$ можно преобразовать в плоскость $x_0=0$, и при этом характеристические элементы останутся инвариантными. Теперь мы зададим на $\mathcal{J}$ начальные значения $\varphi(0, x_1, \ldots, x_n)= =\omega(x_1, \ldots, x_n)$ так, что многообразие $\mathcal{J}'$ определяется уравнением $\omega=0$. Затем мы найдем бихарактеристические лучи (и полосы), проходящие через $\mathcal{J}$, вычислив на $\mathcal{J}$ начальные значения для φ_i. При $t=x_0=0$ мы имеем соотношение $\varphi(0, x_1, \ldots, x_n)=\omega(x_1, \ldots, x_n)$; следовательно, $\varphi_i=\omega_{x_i}$ для $i=1, \ldots, n$. Следовательно, при $t=0$ равенство $Q(\varphi_0, \omega_{x_1}, \ldots, \omega_{x_n})=0$ является алгебраическим уравнением степени mk относительно начального значения φ_0; оно определяет mk (или меньше) действительных начальных значений φ_0. Тогда уравнения (11), (11a) дают такое же число бихарактеристических полос, а они порождают такое же число семейств характеристических многообразий $\varphi=0$, выходящих из начального многообразия $\mathcal{J}'$.

Особое значение имеет случай, когда начальное многообразие $\mathcal{J}'$ вырождается в точку O.

Мы введем следующие определения. Бихарактеристические лучи, проходящие через фиксированную точку O, образуют *коноид лучей*, проходящий через O; бихарактеристические направления, проходящие через точку O, образуют *локальный конус лучей*, или *конус Монжа*, проходящий через точку O. Если главная часть оператора L имеет *постоянные коэффициенты*, и, следовательно, форма Q также имеет постоянные коэффициенты, то *лучи* являются *прямыми*, а локальный конус лучей совпадает с коноидом лучей.

Как указывалось в § 1, п. 8, локальный конус лучей является двойственным по отношению к конусу нормалей. Даже в случае, когда конус нормалей есть сравнительно простой алгебраический конус порядка mk, конус лучей может иметь особенности или изолирован-

ные лучи и не обязан состоять из отдельных гладких конических полостей[1]) (см. п. 5 и примеры в § 3а). Например, дифференциальный оператор третьего порядка в пространстве трех измерений $L = D_0 D_1 D_2$ дает

$$Q(\xi) = \xi_0 \xi_1 \xi_2.$$

Конус нормалей, проходящий через точку O в пространстве ξ, состоит из трех плоскостей, параллельных координатным плоскостям, а лучи будут просто прямыми, параллельными координатным осям в пространстве x. Поэтому конус лучей вырождается в тройку прямых, а характеристическими поверхностями, проходящими через невырожденное многообразие $\mathcal{J}'$ на начальной поверхности $\mathcal{J}$, будут три цилиндра, проходящие через $\mathcal{J}'$ и параллельные координатным осям.

Наконец, мы напомним, что теория полных интегралов из гл. II позволяет строить решения дифференциального уравнения первого порядка $Q = 0$ как огибающие семейств других решений; сейчас мы проиллюстрируем эту теорию на примере построения Гюйгенса для фронта волны.

5. Фронты волны и построение Гюйгенса. Поверхность лучей и поверхность нормалей. Как указано в § 2, п. 1, характеристические поверхности имеют важное значение как возможные поверхности разрывов решений u уравнения $L[u] = 0$. Легко убедиться в том, что разрывы первого рода, возникающие только для производных порядка m, не могут происходить на „свободной" поверхности C, где $Q \neq 0$. На такой поверхности данные Коши однозначно определяют производные порядка m, так что эти производные не могут иметь разрывов при переходе через C. Другими словами, такие разрывы могут происходить только на характеристических поверхностях. Для других типов разрывов роль характеристик как единственно возможных поверхностей разрыва будет исследована в § 4[2]).

Характеристические коноиды важны потому, что они описывают распространение возмущения, первоначально сосредоточенного в точке O. Такие возмущения называются „сферическими" фронтами волны с центром в точке O (см. гл. II, § 9 и гл. VI, § 18).

В случае *постоянных коэффициентов* все лучи являются прямыми и ни конус нормалей, ни конус лучей не зависят от вершины O. Конус лучей, проходящий через O и состоящий из прямых, является огибающей плоскостей, проходящих через O и ортогональных к конусу нормалей $Q(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ или, точнее, эти плоскости

---

[1]) Иногда более целесообразно рассматривать локальный конус лучей как конус, порождаемый его опорными плоскостями, а не лучами.

[2]) Действительно, построения, проведенные в § 4, 9, 10, показывают, что для любой характеристической поверхности существуют такие разрывные решения u.

являются опорными плоскостями конуса лучей[1]). Переменные ξ, τ мы представляем себе в пространстве x, t и $t=x_0$ выделяем как время.

Пересечение части конуса лучей, направленной вперед, с плоскостью $t=1$ называется *поверхностью лучей*. Это $(n-1)$-мерная поверхность в n-мерном пространстве x. Поверхность лучей представляет собой геометрическое место точек, куда при $t=1$ доходит возмущение u, при $t=0$ сосредоточенное в точке O. В этом смысле поверхность лучей может быть названа *сферическим фронтом волны*, хотя она может состоять из отдельных полостей или кусков.

Чтобы сделать эту ситуацию более ясной, предположим, что для произвольного n-мерного единичного вектора α характеристическое уравнение

$$Q(-v, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)=0$$

имеет k действительных корней $v=v^\varkappa$, так что функции

$$\varphi(t, x)=vt-\alpha_1x_1-\ldots-\alpha_nx_n=vt-(\alpha x)=0 \qquad (12)$$

представляют собой „плоские фронты волны", передвигающиеся в пространстве x с нормальной скоростью v в направлении вектора α (см. гл. III, § 3)[2]).

Плоские фронты волны вида (12), проходящие при $t=0$ через начало координат, не обязательно служат опорными плоскостями для всего гладкого конуса лучей; они могут быть опорными для его оболочки. Оболочка состоит из частей конуса лучей, связанных между собой кусками плоскостей (12), которые касаются конуса лучей по двум бихарактеристикам и отгораживают сектор конуса лучей между этими бихарактеристиками. В некоторых случаях, кроме внешней оболочки, возникают сложные геометрические образования. Попытка дать интуитивно ясное и тем не менее общее описание представляется очень трудной.

Тем более важным является следующий факт, вытекающий из § 1, п. 8. Для заданного направления α рассмотрим плоскую волну, определенную формулой (12), и предположим, что ее наибольшая скорость равна $v(\alpha)$. При изменении α эти фронты волны в момент t будут служить опорными плоскостями для выпуклой оболочки Γ конуса лучей. Таким образом, выпуклая оболочка Γ дает внешний „сферический фронт" для начального возбуждения, сосредоточенного в точке O. Мы можем сказать, что „внутренние" части конуса лучей, не лежащие на Γ, соответствуют более медленным „способам распро-

---

[1]) Как указывалось ранее, не все опорные плоскости обязаны касаться (локального) конуса лучей, который может иметь вогнутые части или изолированные лучи.

[2]) Это по существу есть предположение гиперболичности (см. гл. III, § 2 и п. 7 настоящего параграфа).

странения". Этими вопросами мы снова займемся в п. 7, а примеры из § 3а покажут разнообразие геометрических возможностей.

Для непостоянных коэффициентов сферические фронты волны уже не являются огибающими плоских фронтов волны. Вместо этого мы будем рассматривать *фронты волн типа плоских*, т. е. такие решения $\varphi(t, x)$ характеристического дифференциального уравнения $Q(\varphi_{x_0}, \varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n})=0$, которые при $t=0$ имеют начальные значения $(\alpha x)=\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n$, где α — произвольный единичный вектор. Такие фронты волны, $\varphi=0$, с течением времени передвигаются в пространстве x и могут потерять свою первоначальную плоскую форму; из этих фронтов можно построить коноид лучей и выпуклую оболочку Г таким же способом, как в случае плоских волн и постоянных коэффициентов.

Построение Гюйгенса является полезным вариантом этого построения, но дает поверхность лучей, а не конус лучей. Для краткости мы снова предположим, что коэффициенты постоянны, и рассмотрим при $t=1$ плоские фронты волны $v-(\alpha x)=0$, где

$$Q(-v, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)=0,$$

а α — единичный вектор. Когда вектор α пробегает единичную сферу, вектор $(v\alpha_1, \ldots, v\alpha_n)$ описывает поверхность нормальных скоростей (95), а плоскости $v-(\alpha x)=0$ огибают поверхность лучей.

Так как взаимная поверхность нормалей сама по себе лишена физического смысла и, кроме того, вообще говоря, имеет более высокий алгебраический порядок, чем поверхность нормалей, то представляется более целесообразным выразить соотношение между двумя поверхностями следующим образом: *поверхность лучей является геометрическим местом полюсов касательных или опорных плоскостей нормальной поверхности* (9) *относительно единичной сферы*. Это легко видеть, так как плоскости (12) являются полярами точек нормальной поверхности (см. § 1, п. 8).

На примерах, приведенных в § 3а, мы убедимся, что для уравнений высших порядков такое построение поверхности лучей указывает на возможность не только вырождения поверхности лучей (например, в изолированные точки), но также на возможность таких особенностей, как ребра возврата. В соответствии с замечаниями в § 1, п. 8, надо отметить, что более целесообразно рассматривать опорные плоскости, а не только касательные плоскости, и понятие огибающей связывать с опорными плоскостями. Тогда соотношение между поверхностью лучей и поверхностью нормалей будет симметричным; каждая из них является геометрическим местом полюсов для опорных плоскостей другой поверхности. Такое геометрическое определение можно применять отдельно к каждой из полостей этих поверхностей.

Между прочим, одному изолированному лучу поверхности лучей соответствует плоский кусок поверхности нормалей. (Для взаимной поверхности нормалей, или поверхности скоростей, соответствующий кусок будет сферическим.)

Наконец, мы заметим следующее: для непостоянных коэффициентов понятия поверхности нормалей и поверхности лучей сохраняют свое значение; они имеют локальный характер, связанный с некоторой точкой, а соотношение между ними точно такое же, как было описано выше.

5а. Пример. Примером служит следующее уравнение третьего порядка:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]u=0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(\varphi_t-\varphi_y)(\varphi_t+\varphi_y)^2=\varphi_x^2(2\varphi_t+\varphi_y),$$

а уравнение конуса нормалей в пространстве τ, ξ, η —

$$(\tau-\eta)(\tau+\eta)^2=\xi^2(2\tau+\eta).$$

Таким образом, поверхность нормалей есть кривая третьего порядка (декартов лист) на плоскости ξ, η:

$$(-1-\eta)(-1+\eta)^2=\xi^2(-2+\eta),$$

изображенная на рис. 45; из этого примера видно, что конус нормалей может не состоять из отдельных полостей. Здесь одним куском является овал, а другой кусок касается овала и уходит в бесконечность. В точке соприкосновения оба куска имеют угловые точки, через которые они аналитически продолжают друг друга, так что вместе они образуют одну связную алгебраическую кривую с точкой самопересечения.

Поверхность лучей изображена на рис. 46. Отрезок между точками $x=\pm 1/\sqrt{2}$, $y=1$, является образом двойной точки поверхности нормалей. Часть поверхности лучей, имеющая угловую точку и расположенная между этими двумя точками, является образом того куска поверхности нормалей, который уходит в бесконечность. Оставшаяся выпуклая часть поверхности лучей является образом овальной части поверхности нормалей.

Этот несколько искусственный пример показывает две возможные особенности геометрической структуры конуса лучей и поверхности лучей. Если поверхность нормалей имеет двойные точки, то поверхность лучей и конус лучей могут не быть выпуклыми и, чтобы получить выпуклую оболочку, надо добавить „крышку“. Если поверхность нормалей имеет кусок, уходящий в бесконечность, или точку пере-

гиба, то поверхность лучей будет в некоторой точке иметь острие. В § 3а мы встретим интересные с физической точки зрения примеры такого поведения поверхностей.

6. Свойства инвариантности. Характеристические формы, характеристические матрицы и характеристические лучи инвариантны относительно преобразований координат. Как было указано выше, это непосредственно следует из самого определения этих понятий, в частности из инвариантного характера внутреннего дифференцирования

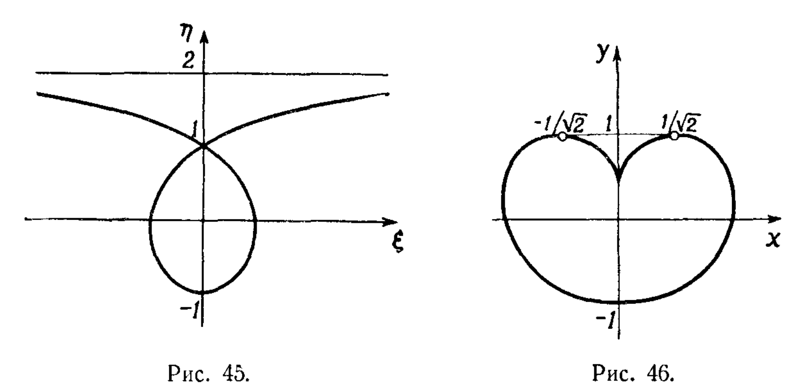


Рис. 45. Рис. 46.

и из того факта, что бихарактеристики являются кривыми, по которым соприкасаются характеристические поверхности. Аналитическое подтверждение свойств инвариантности в точности такое же, как в § 1, п. 5.

7. Гиперболичность. Многообразия пространственного типа, направления временно́го типа[1]). До сих пор не делалось никаких предположений относительно действительности характеристических поверхностей или конуса нормалей. Но главная цель этой главы, т. е. решение задачи Коши, требует большего, чем существование действительных ветвей этих поверхностей. Для того чтобы обеспечить разрешимость задачи Коши, надо наложить более строгое условие *гиперболичности*. Можно было бы приравнять эту разрешимость понятию гиперболичности. Однако для целей математической физики более удобно наложить условия, которые можно проверить с помощью алгебраических или геометрических критериев и которые достаточны для того, чтобы существовали решения как можно более широкого класса задач. Все варианты определения[2]) гиперболичности сводятся

[1]) Ср. с гл. III, § 2.
[2]) См. также гл. III, § 2.

к тому, чтобы алгебраический конус нормалей не имел мнимых полостей.

Определение. Оператор $L[u]$ называется гиперболическим в точке O[1]), если существуют векторы ζ, проходящие через O, такие, что любая двумерная плоскость π, проходящая через ζ, пересекает конус нормалей $Q(\xi)=0$ по mk различным действительным линиям.

Алгебраическое требование, содержащееся в нашем определении, формулируется так: если θ — произвольный вектор (не параллельный ζ), то прямая $\xi=\lambda\zeta+\theta$, где λ — параметр, должна пересекать конус нормалей в mk действительных различных точках, т. е. уравнение

$$Q(\lambda\zeta+\theta)=0$$

должно относительно λ иметь mk действительных различных корней. Элементы поверхности, проходящие через O и ортогональные векторам ζ, называются элементами пространственного типа, а ζ называется нормалью пространственного типа. Элементы поверхности пространственного типа отделяют часть конуса, направленную „вперед", от части, направленной „назад"[2]).

Полезно дать *второе эквивалентное определение гиперболичности*, связанное с понятием поверхностей пространственного типа.

Во-первых, заметим, что мы можем разложить любой вектор θ в сумму векторов, соответственно параллельных и ортогональных вектору ζ, и объединить первый из них с ζ. Во-вторых, учитывая свойства инвариантности, изложенные в п. 6, мы можем считать, что вектор ζ имеет компоненты $1, 0, 0, \ldots, 0$; следовательно, первая компонента вектора θ есть 0. Тогда уравнение $Q(\lambda\zeta+\theta)=0$ принимает вид $Q(\lambda, \theta_1, \ldots, \theta_n)=0$.

Это замечание немедленно приводит к следующему второму определению.

Некоторое n-мерное многообразие $\mathcal{J}$ (или его элемент), которое мы после соответствующего преобразования координат можем записать в виде $x_0=0$, называется многообразием *пространственного типа*, если для каждой точки $\mathcal{J}$ и произвольных действительных значений $\xi_1, \ldots, \xi_n$ уравнение $Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)=0$ имеет mk различных действительных корней ξ_0. Согласно п. 4, это значит, что из каждого $(n-1)$-мерного начального многообразия $\mathcal{J}$ в про-

---

[1]) Надо снова подчеркнуть, что гиперболичность является локальным свойством оператора L или формы Q и можно ограничиться элементами поверхности, проходящими через рассматриваемую точку O. Для квазилинейных операторов гиперболичность зависит также от локальных данных Коши.

[2]) Заметим, что эти части связаны друг с другом на бесконечности, если рассматривать их в проективном пространстве.

странстве x исходит mk различных кусков характеристических поверхностей.

Оператор $L[u]$ называется *гиперболическим* в точке O, если такие поверхности (или элементы) пространственного типа, проходящие через O, существуют.

Нормали ζ к элементам пространственного типа в точке O образуют „сердцевину" конуса нормалей, ограниченную *внутренней полостью* этого конуса.

Внутренняя полость конуса нормалей выпукла. Эта важная теорема почти непосредственно следует из определения. В противном случае внутри „сердцевины" существовали бы векторы ζ, через которые проходят плоскости, пересекающие эту внутреннюю полость более двух раз и, следовательно, имеющие более mk пересечений с конусом. Геометрически можно себе представить, что конус нормалей состоит из замкнутой внутренней полости, ограничивающей внутренность („сердцевину"), в которую направлен вектор ζ, и из других полостей, которые образуют последовательные оболочки вокруг этой сердцевины. Эти полости могут быть замкнутыми или уходить в бесконечность; во всяком случае они таковы, что все плоскости π, проходящие через ζ, пересекают их по mk различным *линиям*.

Конус, для которого опорными плоскостями служат плоскости, ортогональные к образующим выпуклой внутренней полости конуса нормалей, является *выпуклой оболочкой* Г *локального конуса лучей*; в частности, выпуклой оболочкой его *внешней полости*[1]) (доказательство см. в § 1, п. 8). Мы введем следующее определение: любое направление из точки O внутрь этой внешней полости называется направлением *временно́го типа. Кривая* в пространстве x называется кривой *временно́го типа*, если она в каждой точке имеет направление временно́го типа[2]).

Очевидно, что понятия „пространственного типа" и „временно́го типа" не зависят от системы координат.

Для одного дифференциального уравнения второго порядка, когда имеется только одна полость конуса нормалей и локального конуса лучей (см. § 1), получается картина, которая, очевидно, входит в описанную здесь схему.

Сейчас было бы полезно резюмировать замечания и определения, касающиеся характеристических конусов, сделанные в предыдущих параграфах при разных обстоятельствах. Если алгебраическое урав-

---

[1]) Мы снова подчеркиваем тот факт, что здесь не нужно ничего говорить о внутренних частях конуса лучей. Они могут состоять из замкнутых полостей, соответствующих полостям конуса нормалей, окружающих сердцевину, но могут иметь и совсем другую структуру.

[2]) Другое определение, не эквивалентное нашему, см. в книге Джона [4], стр. 157.

нение порядка k для конуса нормалей дает максимально возможное число отдельных действительных полостей, то двойственное преобразование ставит в соответствие каждой из этих полостей отдельную полость локального конуса лучей, или отдельный „способ распространения фронта волны". Выпуклая внутренняя полость конуса нормалей переходит во внешнюю полость локального конуса лучей, которая автоматически получается выпуклой. Если конус нормалей состоит из нескольких вложенных выпуклых полостей, то то же самое справедливо и для конуса лучей. В противном случае конус лучей может содержать изолированные лучи и иметь особенности [1]).

Вообще говоря, сделанное выше предположение о том, что полости должны быть отдельными, не выполняется. Для целей математической физики требование, чтобы корни λ были различными, является слишком строгим, так как во многих важных случаях возникают кратные корни λ, т. е. различные полости алгебраического конуса нормалей могут касаться друг друга, или пересекаться, или полностью совпадать [2]). В п. 9 мы увидим, что определения 1 и 2 могут быть легко обобщены так, чтобы они включали случай характеристических поверхностей с равномерной кратностью [3]). Но даже такое простое дифференциальное уравнение, как $u_{x_0x_1x_2}=0$, не попадает под наши определения, хотя задача Коши для него решается в явном виде.

Для уравнений, у которых полости конуса нормалей не являются целиком различными, трудно найти разумное обобщение понятия гиперболичности [4]) и исследование задачи Коши требует более тонкого анализа. Однако, к счастью, в задачах математической физики трудности, возникающие из-за многократного пересечения конуса нормалей плоскостями π, вообще говоря, не влияют на доказательство теорем существования и единственности, если все корни λ уравнения $Q(\lambda\zeta+\theta)=0$ действительны. Причина состоит в том, что уравнения математической физики в основном являются *симметри-*

---

[1]) Нужно отметить, что современное состояние теории алгебраических поверхностей не позволяет вполне удовлетворительно применить ее к затронутым здесь конкретным вопросам геометрической структуры поверхностей.

[2]) Случаи такой кратности и сейчас являются серьезным препятствием для построения теории. Для многих систем первого порядка, например, для уравнений Максвелла, такие кратности встречаются всегда. Очевидно, что можно построить одно дифференциальное уравнение порядка k с произвольно заданным алгебраическим конусом нормалей.

[3]) Для уравнений с постоянными коэффициентами (а также в какой-то мере и для непостоянных коэффициентов) обобщения понятия гиперболичности даны Гордингом и другими; в этих случаях учитывается также влияние младших членов дифференциальных уравнений (см. Гординг [2] и А. Лакс [1])

[4]) См. также гл. V, § 8.

ческими[1]). В частности, центральной и наиболее плодотворной темой исследования оказались *симметрические* гиперболические системы первого порядка; с точки зрения математической физики несимметрические системы имеют второстепенное значение.

8. Симметрические гиперболические операторы. Мы будем рассматривать линейные (или квазилинейные) симметрические системы первого порядка, т. е. системы вида

$$L[u] = \sum_{0}^{n} A^i u_i + Bu, \tag{14}$$

где матрицы A^i симметричны, а матрица B произвольна.

Симметрическая система (14) называется *симметрической гиперболической* системой (в точке O), если одна из матриц A^i или некоторая линейная комбинация

$$\sum \xi^i A^i$$

является знакоопределенной, например положительно определенной; n-мерные многообразия $\mathcal{J}$, ортогональные таким векторам ξ, называются многообразиями *пространственного типа*. Так как линейная комбинация положительно определенных матриц с положительными коэффициентами снова является положительно определенной, то множество векторов ξ, ортогональных к элементам пространственного типа, представляет собой *выпуклый конус*.

Если, например, матрица A^0 положительно определенная, то n-мерные пространства вида $x_0 = t = \text{const}$ будут пространственного типа.

Тесную связь понятия симметрического гиперболического оператора с определениями, данными в п. 7, можно установить, например, следующим образом (для простоты предположим, что матрица A^0 положительно определенна). Для $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$ уравнение

$$Q(\lambda\xi + \theta) = Q(\lambda, \theta_1, \ldots, \theta_n) = 0$$

имеет k действительных корней, так как оно просто является условием обращения в нуль определителя симметричной матрицы

$$\left\| \lambda A^0 + \sum_{1}^{n} \theta_i A^i \right\| = 0, \tag{15}$$

где A^0 — положительно определенная матрица. Корни λ являются собственными значениями матрицы $\sum \theta_i A^i$ относительно положительно

[1]) Между прочим, симметричность тесно связана с тем, что обычно эти уравнения являются уравнениями Эйлера для некоторой квадратичной вариационной задачи.

определенной матрицы A^0. Существенная разница состоит в том, что в нашем определении симметрической гиперболичности не делается никаких предположений о том, что корни λ уравнения (15) должны быть различными. Как мы увидим в § 8 и 10, для симметрических гиперболических систем задача Коши всегда разрешима.

Для многих физических примеров очень важно следующее замечание: если матрица A^0 положительно определенная, то мы можем линейным преобразованием привести нашу систему к виду

$$L[u] = \widetilde{L}[v] = v_t + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{A}^i v_i + \widetilde{B} v, \tag{16}$$

где через $\widetilde{A}^i$, $\widetilde{B}$, v обозначены преобразованные величины и где матрицы $\widetilde{A}^i$ остаются симметричными[1]).

Даже в случае кратных корней характеристическая матрица имеет полную систему k линейно независимых левых собственных векторов $l\,(l = r)$, таких, что оператор $lL[u]$ является внутренним оператором на соответствующей характеристической поверхности, независимо от того, является ли эта характеристическая поверхность кратной (т. е. допускает несколько линейно независимых нуль-векторов l).

9. Симметрические гиперболические уравнения высших порядков. Последнее замечание будет касаться *одного уравнения или системы высшего порядка*. Если они получаются в результате исключения из симметрической гиперболической системы первого порядка, то они также будут называться *симметрическими гиперболическими*; в этом случае к ним применима теория, построенная для систем первого порядка.

Например, уравнение

$$u_{x_0 x_1 x_2} = 0$$

возникает таким путем из симметрической системы

$$u^1_{x_0} = u^2, \;\; u^2_{x_1} = u^3, \;\; u^3_{x_2} = 0.$$

Замечателен следующий факт.

Любое гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка может быть сведено к симметрической гиперболи-

---

[1]) Преобразование имеет вид

$$\widetilde{L}[v] = TLT(v),$$

так что

$$\widetilde{A}^j = TA^jT.$$

Поскольку матрица A^0 положительно определенная, она имеет квадратный корень $C: A^0 = C^2$. Выберем теперь $T = C^{-1}$. Ясно, что $\widetilde{A}^0 = I$, и так как матрица T симметрична, то матрицы $\widetilde{A}^j$ также симметричны.

ческой системе первого порядка. Мы запишем (см. § 1) дифференциальное уравнение для функции u в виде

$$L[u] = u_{tt} + 2\sum_{i=1}^{n} a^i u_{it} - \sum_{i,\,k=1}^{n} a^{ik} u_{ik} + \ldots = 0, \tag{17}$$

где точками обозначены члены, содержащие производные функции u не выше первого порядка, а $a^{ik} = a^{ki}$.

Мы предположим, что уравнение (17) гиперболическое, $n \geqslant 2$, а $t = \text{const}$ — поверхность пространственного типа; тогда квадратичная форма $H(\xi_i, \xi_k) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a^{ik}\xi_i\xi_k$ будет положительно определенной, а точка $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$ лежит внутри эллипсоида

$$1 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i - H(\xi_i, \xi_k) = 0;$$

действительно, элемент поверхности с компонентами нормали $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n$ будет элементом пространственного типа, если уравнение

$$(\lambda + \tau)^2 + 2(\lambda + \tau)\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i - H(\xi_i, \xi_k) = 0$$

имеет два действительных корня λ одинаковых знаков.

Чтобы свести уравнение к системе, мы просто заменим первые производные u_t, u_{x_i} в уравнении (17) на новые неизвестные функции v^0, v^i соответственно. Тогда уравнение (17) заменится системой

$$v_t^0 + 2\sum_{i=1}^{n} a^i v_{x_i}^0 - \sum_{i,\,k=1}^{n} a^{ik} v_{x_k}^i + \ldots = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a^{ik}\left(v_t^i - v_{x_i}^0\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

относительно вектор-функции $v = (v_0, \ldots, v_n)$. Это — симметрическая гиперболическая система [1]).

Если, как и ранее, на начальные данные для v накладывается условие, что они получены путем отождествления с начальными данными для u_i и u_t, то легко установить эквивалентность двух этих задач.

[1]) Действительно, ей соответствует форма $A^0 v_t + \sum_{\nu=1}^{n} A_i^\nu v_\nu + \ldots = 0$, где

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a^{11} & \ldots & a^{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a^{n1} & \ldots & a^{nn} \end{pmatrix}, \qquad A^\nu = \begin{pmatrix} 2a^\nu & -a^{\nu 1} & \ldots & -a^{\nu n} \\ -a^{\nu 1} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a^{\nu n} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Кратные характеристические поверхности и приводимость. Надо добавить краткое замечание относительно общего случая систем первого порядка, необязательно симметрических. Пучок k различных характеристических поверхностей $C^{\varkappa}$, описанный во втором определении п. 7, соответствует k линейно независимым нуль-векторам $l^1, \ldots, l^k$, таким, что выражение $l^{\varkappa}L[u]$ является внутренним дифференциальным оператором на характеристической поверхности $C^{\varkappa}$. Предположим теперь, что s таких характеристических поверхностей, например $C^1, \ldots, C^s$, совпадают, но в каждой точке этой поверхности [1]) $\varphi(x)=0$ мы все же имеем s линейно независимых нуль-векторов $l^1, \ldots, l^s$ матрицы A. Тогда вся поверхность C называется s-кратной, и все s дифференциальных операторов l^iL, $i=1, \ldots, s$, являются внутренними на C.

Такие операторы $L[u]$ мы можем называть гиперболическими (в обобщенном смысле), несмотря на то, что, по предположению, матрица A на C имеет ранг $k-s$.

Наличие кратных характеристических поверхностей тесно связано с *приводимостью* характеристической формы $Q(\xi_0, \ldots, \xi_n)$, т. е. с возможностью ее разложения на неприводимые множители более низкого порядка [2]) $Q=Q_1Q_2 \ldots Q_j \ldots$ и, в частности, с наличием s одинаковых множителей Q_i.

Характеристические поверхности должны удовлетворять одному из уравнений $Q_j=0$; кроме того, при предположении, что уравнение гиперболическое, т. е. что существует k линейно независимых нуль-векторов $l^{\varkappa}$, каждому уравнению $Q_j=0$ соответствует точно k_j независимых нуль-векторов l^i, если полином Q_j имеет степень k_j. Если s множителей Q_j совпадают, то соответствующая характеристическая поверхность имеет кратность s и на ней мы имеем s линейно независимых нуль-векторов.

Обратно, как показывает простое алгебраическое рассуждение, наличие кусков поверхности кратности s в силу нашего определения влечет за собой приводимость формы Q, $Q=Q_1^sQ_2$.

Надо подчеркнуть, что в случае приводимости лучи можно (а для кратных кусков *нужно*) определять не относительно Q, а относительно неприводимых множителей Q_j.

Как указывалось выше, приводимость формы и кратные характеристические поверхности встречаются во многих задачах математической

---

[1]) Мы здесь не будем рассматривать случай, когда два или несколько кусков $C^{\varkappa}$ просто пересекаются или касаются (см. Ямагути и Касахара [1]).

[2]) В частности, такая ситуация возникает для системы $L[u]=0$, если она состоит из блоков уравнений, каждое из которых содержит производные только от некоторых неизвестных функций, так что связь между этими блоками осуществляется только через члены младшего порядка (слабая связь).

физики, например, в уравнениях Максвелла, в линеаризованных уравнениях магнитной гидродинамики, в уравнениях упругих волн (см. § 3а и 13а). Часто встречаются также касания и пересечения характеристических поверхностей[1]). Однако в этих случаях гиперболических симметрических систем кратность не вносит никаких трудностей при доказательстве теорем существования и единственности (но при изучении явлений распространения особенностей и других аналогичных вопросов требуется особое внимание).

11. Лемма о бихарактеристических направлениях. Мы добавим сейчас к этому параграфу несколько замечаний, которые будут использованы в § 4.

Лемма. *Рассмотрим в некоторой фиксированной точке x характеристическую матрицу A как функцию переменных $\xi_i = \partial\varphi/\partial x_i$, $i = 0, \ldots, n$; пусть на нее накладывается условие $\|A\| = Q(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. Если A имеет ранг $k-1$, то производные по направлению бихарактеристических лучей определяются формулами*

$$\dot{x}_i = lA_{\xi_i}r \qquad (i = 0, \ldots, n),$$

где точкой обозначено дифференцирование вдоль луча по некоторому параметру на этой кривой, а l и r обозначают левый и правый нуль-векторы матрицы A.

Доказать это можно с помощью непосредственного вычисления[2]). Однако мы проведем доказательство с помощью следующего неявного рассуждения.

Рассмотрим характеристические элементы поверхностей в некоторой фиксированной точке O; они ортогональны образующим конуса нормалей и определяются совокупностью параметров $\xi_0, \ldots, \xi_n$, которые должны удовлетворять условию $Q(\xi_0, \ldots, \xi_n) = 0$, но в остальном

---

[1]) Можно предположить, что такая кратность должна иметь место в системах дифференциальных уравнений. В частности, легко видеть, что любая система, содержащая нечетное число уравнений, обязана иметь кратные корни. Разобраться в этом предположении в общем случае было бы интересной алгебраической задачей.

[2]) В случае системы первого порядка $A = \sum A^\nu \xi_\nu$ мы обозначим элементы матрицы A^ν через a_ν^{ij} и заметим, что $Q_{\xi_\nu} = \sum\limits_{i,\,j=1}^{k} a_\nu^{ij}\,\mathcal{A}^{ij}$, где $\mathcal{A}^{ij}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a^{ij} = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu^{ij}\xi_\nu$ в определителе $\|A\|$. По предположению, нуль-векторы r и l определяются однозначно с точностью до скалярного множителя; они пропорциональны алгебраическим дополнениям некоторой строки или столбца матрицы $\mathcal{A}$. Мы имеем $\mathcal{A}^{11} : \mathcal{A}^{1j} = \mathcal{A}^{i1} : \mathcal{A}^{ij}$

являются независимыми переменными. Векторы r и l являются функциями ξ.

Продифференцируем уравнение $Ar = 0$:

$$A\,dr + \sum_{i=0}^{n} A_{\xi_i} r\, d\xi_i = 0.$$

Умножив это равенство на l и заметив, что $lA = 0$, получим

$$\sum_{i=0}^{n} lA_{\xi_i} r\, d\xi_i = 0.$$

Дифференциалы $d\xi_i$ должны удовлетворять линейному соотношению

$$dQ = \sum_{i=0}^{n} Q_{\xi_i}\, d\xi_i = 0,$$

так как ξ_i удовлетворяют условию $Q(\xi_0, \ldots, \xi_n) = 0$; в остальном они независимы.

Из этих соотношений немедленно следует, что величины $\frac{\partial Q}{\partial \xi_i}$ и $lA^i r$ пропорциональны, так как n компонент $d\xi_i$ можно выбирать произвольным образом. Таким образом, лемма доказана.

Этот результат можно обобщить на кратные куски характеристических поверхностей, на которых матрица A имеет ранг $k - s$ всюду в рассматриваемой области. Такой кусок характеристической поверхности удовлетворяет уравнению вида

$$\xi_0 = f(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Матрица A имеет линейно независимые правые нуль-векторы $r^1, r^2, \ldots$ и левые нуль-векторы $l^1, l^2, \ldots$. Тогда для произвольных i и j мы имеем

$$l^j A^\nu r^i = - l^j A^0 r^i f_\nu.$$

Таким образом, независимо от i и j справедливо соотношение

$$l^j A^\nu r^i : l^j A^0 r^i = - f_\nu \qquad (\nu > 0).$$

$(i, j = 1, \ldots, k)$, или

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{A}^{ij} = \mathcal{A}^{1j} \mathcal{A}^{i1} = l_i r_j,$$

где $l_i = \mathcal{A}^{i1}$, $r_j = \mathcal{A}^{1j}$ являются соответственно компонентами векторов l и r, а $1/\alpha = \mathcal{A}^{11}$. (Мы предполагаем, что $\mathcal{A}^{11} \neq 0$.)

Далее,

$$lA^\nu r = \sum_{i,\, j=1}^{k} l_i a_\nu^{ij} r_j = \sum_{i,\, j=1}^{k} \frac{1}{\alpha} a_\nu^{ij} \mathcal{A}^{ij},$$

и, следовательно,

$$\alpha l A^\nu r = Q_{\xi_\nu}.$$

Доказательство точно такое же, как приведенное выше: в фиксированной точке x рассмотрим уравнение

$$Ar^i = \sum_{\nu=0}^{n} A^\nu \xi_\nu r^i = 0,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые параметры. Продифференцируем это уравнение, умножим слева на один из векторов l^j и, как и ранее, получим

$$\sum_{i=0}^{n} l^j A^\nu r^i \, d\xi_\nu = 0,$$

где для рассматриваемого куска поверхности $\xi_0 = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ соотношение

$$d\xi_0 = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \, d\xi_\nu$$

является единственным условием, наложенным на $d\xi_\nu$. Следовательно,

$$l^j A^\nu r^i + l^j A^0 r^i f_\nu = 0.$$

§ 3а. *Примеры. Гидродинамика, кристаллооптика, магнитная гидродинамика*

1. Введение. В этом параграфе мы рассмотрим три примера [1]), иллюстрирующие общую теорию § 3.

На (квазилинейных) уравнениях гидродинамики можно показать физический смысл характеристических поверхностей, лучей и коноида лучей.

Второй пример, уравнения кристаллооптики, позволяет изучить важное явление — *анизотропию*. Скорость распространения волны зависит от направления, по которому она распространяется; для уравнений кристаллооптики поверхность нормалей и поверхность лучей являются поверхностями четвертого порядка, и, следовательно, они более сложны, чем в случае уравнений гидродинамики.

В третьем примере уравнений магнитной гидродинамики мы видим, что в важных с физической точки зрения случаях конус нормалей и в особенности коноид лучей могут иметь очень сложную структуру.

Еще более сложный пример анизотропных упругих волн рассматривал Дафф [2] [2]). Некоторые примеры с сильным вырождением

[1]) В соответствии с тем, как принято в физике, мы будем в этом параграфе иногда применять другие обозначения. Читатель легко приведет их в соответствие с общими обозначениями § 3.

[2]) См. также Бухвальд [1].

поверхности нормалей, поверхности лучей и области зависимости были даны Гордингом [4].

В случае симметрических гиперболических систем доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши не представляет особых трудностей (см. § 8, п. 10). Однако для несимметрических систем или для одного уравнения порядка выше второго возможные усложнения геометрической структуры конуса нормалей, особенно наличие кратных элементов, влекут за собой трудности, которые еще полностью не преодолены [1]). Даже в случае симметрических гиперболических систем подробный анализ структуры решений, в особенности изучение распространения особенностей, затрудняется при усложнении геометрии характеристических поверхностей. Так, исследования, проведенные в § 4, непосредственно применимы только тогда, когда кратность корней характеристического уравнения не меняется.

2. Система дифференциальных уравнений гидродинамики. В качестве примера нелинейной задачи мы рассмотрим систему *дифференциальных уравнений, описывающую движение сжимаемой жидкости в плоскости x, y.* (Случай стационарного течения уже был рассмотрен в гл. V, § 3, п. 3.) Если компоненты скорости жидкости обозначены через $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, а плотность через $\rho(x, y, t)$ и если, как и ранее, $p(\rho)$ дает давление как функцию плотности, причем $p'(\rho) > 0$, то квазилинейные уравнения движения, уравнения Эйлера, имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u_t + \rho u u_x + \rho v u_y + p'\rho_x &= 0, \\ \rho v_t + \rho u v_x + \rho v v_y + p'\rho_y &= 0, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $\varphi(x, y, t) = 0$ — многообразие, на котором заданы величины u, v, ρ. Тогда, вообще говоря, все производные функций u, v, ρ и, в частности, выводящие производные u_φ, v_φ, ρ_φ однозначно определяются значениями u, v, p на многообразии. Однако это не так, если на многообразии $\varphi = 0$ или на всем семействе $\varphi = \text{const}$ удовлетворяется характеристическое уравнение

$$Q \equiv \begin{vmatrix} \rho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & 0 & p'\varphi_x \\ 0 & \rho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & p'\varphi_y \\ \rho\varphi_x & \rho\varphi_y & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

[1]) Относительно одного уравнения с кратными характеристиками см. Гординг [2] и А. Лакс [1].

Раскрывая этот определитель, мы получаем

$$Q \equiv \rho^2 (\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)\left[(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\right] = 0; \quad (3)$$

опуская множитель ρ^2 и полагая $\varphi_t = \tau$, $\varphi_x = \xi$, $\varphi_y = \eta$, мы будем иметь [1])

$$(\tau + u\xi + v\eta)\left[(\tau + u\xi + v\eta)^2 - p'(\xi^2 + \eta^2)\right] = 0. \quad (3')$$

Характеристические поверхности (с уравнением $\varphi = 0$) в пространстве x, y, t, а также соответствующие им семейства кривых $t = \psi(x, y)$ на плоскости x, y, которые получаются, если положить $\varphi = t - \psi(x, y)$, снова дают многообразия, на которых возможны разрывы, или фронты волны, связанные с движением жидкости. Например, мы можем получить характеристическую поверхность

$$\tau + u\xi + v\eta = 0, \quad (4)$$

отвечающую первому множителю в уравнении (3′). Соответствующая полость конуса нормалей [2]) в пространстве ξ, η, τ является плоскостью. Проекция связанного с ней луча на плоскость x, y дает не что иное, как линию тока рассматриваемого течения; сами лучи, которые в трехмерном пространстве задаются дифференциальными уравнениями $dx/dt = u$, $dy/dt = v$, дают скорость течения одновременно с линией тока.

Второму множителю в уравнении (3′) соответствует характеристическое многообразие

$$(\tau + u\xi + v\eta)^2 - p'(\xi^2 + \eta^2) = 0, \quad (5)$$

т. е. квадратичная полость конуса нормалей. Направления лучей, или бихарактеристик, которые задаются отношением $dt : dx : dy$, снова представляют собой „скорости распространения" или лучевые скорости для разрывов. Лучи, на которых t является параметром, как легко проверить, удовлетворяют уравнению Монжа (см. гл. II, § 5)

$$\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v\right)^2 = p'. \quad (6)$$

В акустике и гидродинамике величина $\sqrt{p'}$ представляет собой *скорость звука*. Следовательно, уравнение (6) утверждает: *относительная скорость распространения разрывов равна скорости звука*.

---

[1]) Член $\tau + u\xi + v\eta = \dot{\varphi}$ дает скорость изменения φ в некоторой подвижной частице жидкости.

[2]) Рассматривается локальный конус нормалей с фиксированной вершиной, например $t_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, и при фиксированных значениях u, v, ρ.

Эти результаты и их отношение к упомянутому ранее стационарному случаю (гл. V, § 3, п. 3) можно еще проиллюстрировать с помощью следующих геометрических рассуждений.

Для заданных u и v локальный конус лучей, или *конус Монжа характеристического дифференциального уравнения*, в пространстве x, y, t задается уравнением

$$\left(\frac{x}{t}-u\right)^2+\left(\frac{y}{t}-v\right)^2=p'(\rho),$$

если мы считаем, что его вершина находится в начале координат $x=y=t=0$. Следовательно, этот конус получается проектированием окружности

$$(x-u)^2+(y-v)^2=p'$$

на плоскость $t=1$ из начала координат. В соответствии с тем, содержит ли этот круг начало координат $x=0$, $y=0$, т. е. в зависимости от того, какое из двух неравенств $u^2+v^2<p'$ или $u^2+v^2>p'$

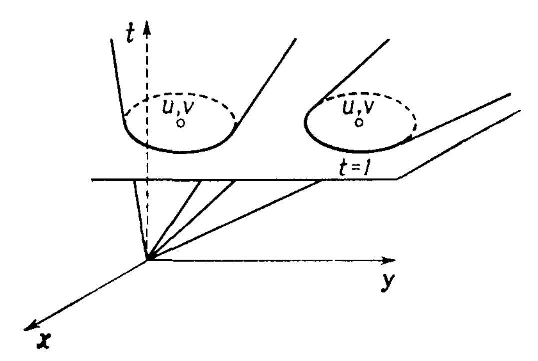


Рис. 47.

выполняется, рассматриваемый круговой конус или содержит ось t или наклонен так, что ось t находится вне его (см. рис. 47). Переход к стационарному случаю состоит в том, что все производные по t полагаются равными нулю. Тогда мы рассматриваем только такие касательные плоскости к конусу Монжа, для которых $\varphi_t=0$, другими словами, касательные плоскости, перпендикулярные к плоскости x, y, т. е. плоскости, содержащие ось t. Линии их касания с конусом дают два характеристических направления для стационарного случая. Но две касательные плоскости к конусу Монжа, проходящие через ось t, действительны и различны тогда и только тогда, когда ось t лежит вне конуса, т. е. когда скорость потока $\sqrt{u^2+v^2}$ больше скорости звука $\sqrt{p'}$. Тем самым подтверждается

и разъясняется полученный раньше в гл. V, § 3, результат, касающийся стационарного движения жидкости.

3. Кристаллооптика. Характеристическое уравнение для *уравнений Максвелла* в вакууме было выведено в гл. III, § 2 с несколько иной точки зрения. Здесь мы рассмотрим обобщение уравнений Максвелла на *случай кристаллооптики.* Общие уравнения Максвелла, связывающие вектор напряженности магнитного поля $\mathfrak{H}$, вектор напряженности электрического поля $\mathfrak{E}$, вектор индукции $\mathfrak{D}$ и вектор магнитной индукции $\mathfrak{B}$, имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{D}}, \quad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}; \tag{7}$$

здесь c — скорость света, точка обозначает дифференцирование по времени t, $\mu\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ (μ — постоянная магнитной проницаемости; обычно ее принимают равной 1). Компоненты u_1, u_2, u_3 вектора $\mathfrak{E}$ связаны с индукцией $\mathfrak{D}$ соотношением $\mathfrak{D} = (\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2, \varepsilon_3 u_3)$, где ε_1, ε_2, ε_3 — три диэлектрические постоянные по направлениям трех координатных осей. Наличие различных констант ε указывает на кристаллический характер рассматриваемой среды.

Из уравнений (7) немедленно получается, что $(\operatorname{div}\mathfrak{D})^{\cdot} = 0$ и $(\operatorname{div}\mathfrak{B})^{\cdot} = 0$. Предполагая, что в начальный момент $\operatorname{div}\mathfrak{D} = \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$, мы будем иметь

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = 0, \quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0; \tag{7a}$$

мы будем всегда считать, что соотношения (7a) выполнены.

Исключение вектора $\mathfrak{H}$ из уравнений (7) приводит к трем линейным дифференциальным уравнениям второго порядка для вектора напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \ddot{u}_1 &= \Delta u_1 - \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial z\,\partial x}, \\
\sigma_2 \ddot{u}_2 &= \Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y}, \\
\sigma_3 \ddot{u}_3 &= \Delta u_3 - \frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y\,\partial z},
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\sigma_i = (\mu/c^2)\varepsilon_i$ [1]). Мы хотим вкратце привести алгебраические выкладки, которые позволяют получить конус нормалей, конус лучей и поверхность нормалей. Напишем x_1, x_2, x_3 вместо x, y, z; мы получим для характеристического многообразия $\varphi = t - \psi(x) = 0$

---

[1]) См. также отдельные уравнения для каждой компоненты векторов в § 14а, п. 1.

следующее уравнение:

$$H(\xi)=\begin{vmatrix} \rho^2-\xi_1^2-\sigma_1 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \rho^2-\xi_2^2-\sigma_2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2-\xi_3^2-\sigma_3 \end{vmatrix}=0, \tag{9}$$

где $\xi_i=\varphi_{x_i}$, $\rho^2=|\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$, или, после несложных вычислений,

$$H(\xi)=(\rho^2-\sigma_1)(\rho^2-\sigma_2)(\rho^2-\sigma_3)\times \\ \times\left(1-\frac{\xi_1^2}{\rho^2-\sigma_1}-\frac{\xi_2^2}{\rho^2-\sigma_2}-\frac{\xi_3^2}{\rho^2-\sigma_3}\right)=0. \tag{9a}$$

Уравнение конуса нормалей в пространстве τ, ξ имеет вид

$$Q(\tau,\ \xi)=(\rho^2-\sigma_1\tau^2)(\rho^2-\sigma_2\tau^2)(\rho^2-\sigma_3\tau^2)\times \\ \times\left(1-\frac{\xi_1^2}{\rho^2-\sigma_1\tau^2}-\frac{\xi_2^2}{\rho^2-\sigma_2\tau^2}-\frac{\xi_3^2}{\rho^2-\sigma_3\tau^2}\right)=0, \tag{9б}$$

так что

$$H(\xi)=Q(-1,\ \xi).$$

Следовательно, поверхность нормалей задается уравнением

$$F(\xi)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}=1. \tag{10}$$

Уравнение взаимной поверхности нормалей (см. § 3, п. 3) получится из (10), если мы заменим ξ_i на $(1/\rho^2)\xi_i$:

$$G(\xi)=\sum\frac{\xi_i^2}{1-\sigma_i\rho^2}=1. \tag{11}$$

Уравнение поверхности нормалей можно записать также в другой форме

$$\sum\frac{\sigma_i\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}=0, \tag{10a}$$

а уравнение взаимной поверхности нормалей — в форме

$$\sum\frac{\sigma_i\xi_i^2}{1-\sigma_i\rho^2}=0\ . \tag{11a}$$

Уравнение (10а) можно получить непосредственно из (10) с помощью тождества

$$1=\sum\frac{\xi_i^2}{\rho^2}=\sum\frac{(\rho^2-\sigma_i)\,\xi_i^2}{(\rho^2-\sigma_i)\,\rho^2}=\sum\frac{\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}-\frac{1}{\rho^2}\sum\frac{\sigma_i\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}\,;$$

(11а) следует непосредственно из (10а),

Поверхность лучей получается либо как огибающая[1]) нормальных плоскостей к взаимной поверхности нормалей[2]), либо, что эквивалентно, как геометрическое место полюсов плоскостей, касательных к поверхности нормалей (10), относительно единичной сферы.

Касательная плоскость в точке ξ представляется уравнением

$$\sum_{i=1}^{3} F_{\xi_i}(\xi)\left(\zeta_i - \xi_i\right) = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{3} F_{\xi_i}\zeta_i = \sum_{k=1}^{3} \xi_k F_{\xi_k},$$

где ζ_i — текущие координаты. Полюс этой касательной плоскости имеет координаты

$$\eta_i = F_{\xi_i}(\xi) \Big/ \sum_{k=1}^{3} \xi_k F_{\xi_k}(\xi).$$

Исключая из этих алгебраических уравнений и из уравнения (10а) координаты ξ_i, после некоторых вычислений получаем *уравнение поверхности лучей*:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\eta_i^2}{R^2 - \frac{1}{\sigma_i}} = 1 \qquad \left(R^2 = \sum_{i=1}^{3} \eta_i^2\right). \tag{12}$$

И поверхность нормалей, и поверхность лучей являются алгебраическими поверхностями четвертого порядка, „поверхностями Френеля“. Они переходят одна в другую, если заменить σ_i на $1/\sigma_i$, ξ на η и ρ на R. Как мы увидим далее в п. 4, эти поверхности состоят каждая из двух замкнутых кусков, причем внутренний кусок выпуклый. Их проекции из начала координат в четырехмерное пространство дают соответственно конус нормалей и конус лучей. Выпуклая „сердцевина“ первого конуса с помощью двойственного преобразования переходит в выпуклую оболочку другого конуса.

4. Форма поверхности нормалей и поверхности лучей. Поверхность нормалей (10) является алгебраической поверхностью четвертого порядка, симметричной относительно начала координат. Каждая прямая, проходящая через начало координат, пересекает эту поверхность в четырех действительных точках; она состоит из двух замкнутых „полостей“, или кусков, которые имеют только четыре общие точки, в которых они касаются друг друга. Предположим, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; тогда эти четыре точки самопересечения, которые опре-

---

[1]) Заметим, что с помощью такого построения мы получаем собственно поверхность лучей, а не ее оболочку.

[2]) То есть огибающая плоскостей, проходящих через точки взаимной поверхности нормалей и ортогональных радиусам-векторам этих точек. — *Прим. ред.*

деляют главные оси биаксиального кристалла, лежат на плоскости ξ_1, ξ_3 на прямых

$$\xi_1 \sqrt{\frac{1}{\sigma_3} - \frac{1}{\sigma_2}} \pm \xi_3 \sqrt{\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}} = 0.$$

Эти факты будут выведены из уравнения (10) с помощью некоторых вычислений. Формальная аналогия между уравнениями (10) и (12) показывает, что соответствующие утверждения справедливы также для поверхности лучей, если заменить σ_1, σ_2, σ_3 на обратные им величины.

Умножая уравнение (10) на $(\rho^2 - \sigma_1)(\rho^2 - \sigma_2)(\rho^2 - \sigma_3)$ и собирая члены с одинаковыми степенями ξ, мы получаем, что уравнение поверхности нормалей имеет вид

$$-\sigma_1\sigma_2\sigma_3(1 - \Psi(\xi) + \rho^2\Phi(\xi)) = 0, \tag{13}$$

где

$$\left\{\begin{aligned} &\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \\ &\Psi(\xi) = \frac{\rho^2 - \xi_1^2}{\sigma_1} + \frac{\rho^2 - \xi_2^2}{\sigma_2} + \frac{\rho^2 - \xi_3^2}{\sigma_3}, \\ &\Phi(\xi) = \frac{\xi_1^2}{\sigma_2\sigma_3} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_3\sigma_1} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_1\sigma_2}. \end{aligned}\right. \tag{13'}$$

Если α — произвольный единичный вектор, то прямая, проходящая через начало координат в направлении вектора α, состоит из точек вида $\xi = \rho\alpha$, где ρ — параметр. Точки пересечения этой прямой с поверхностью нормалей определяются корнями следующего квадратного уравнения относительно ρ^2:

$$\rho^4\Phi(\alpha) - \rho^2\Psi(\alpha) + 1 = 0. \tag{14}$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$X(\alpha) = \Psi^2(\alpha) - 4\Phi(\alpha). \tag{15}$$

Положим теперь

$$A_1^2 = \frac{1}{\sigma_3} - \frac{1}{\sigma_2}, \quad A_2^2 = \frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_3}, \quad A_3^2 = \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1};$$

простые вычисления показывают, что если $\sum \alpha_i^2 = 1$, то

$$X(\alpha) = \prod (\alpha_1 A_1 \pm \alpha_2 A_2 \pm \alpha_3 A_3), \tag{16}$$

где произведение берется по всем четырем возможным комбинациям знаков. Так как величины A_1 и A_3 действительны, а величина A_2 чисто мнимая, то множители, составляющие X, распадаются на комплексно сопряженные пары. Поэтому $X \geqslant 0$. В самом деле, $X = 0$ только в том случае, когда $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_1 A_1 \pm \alpha_3 A_3 = 0$. Следовательно,

четыре корня уравнения (14) действительны и различны, за исключением случая, когда $\alpha_1 A_1 \pm \alpha_3 A_3 = 0$.

Таким образом, поверхность нормалей состоит из двух отдельных кусков с уравнениями

$$\Psi(\alpha) - \sqrt{X(\alpha)} = \frac{2}{\rho^2}, \quad \Psi(\alpha) + \sqrt{X(\alpha)} = \frac{2}{\rho^2}.$$

Пользуясь однородностью функций Ψ и Φ, мы можем определить величину $X(\xi)$ формулой

$$X(\xi) = \Psi^2(\xi) - 4\rho^2\Phi(\xi). \tag{17}$$

Тогда для внешней и внутренней частей поверхности мы будем соответственно иметь уравнения

$$\begin{cases} \Psi(\xi) + \left|\sqrt{X(\xi)}\right| = 2, \\ \Psi(\xi) - \left|\sqrt{X(\xi)}\right| = 2. \end{cases} \tag{18}$$

Эти части поверхности соприкасаются только в четырех точках, лежащих на прямых

$$\xi_1 A_1 \pm \xi_3 A_3 = 0$$

в плоскости ξ_1, ξ_3 (см. рис. 48).

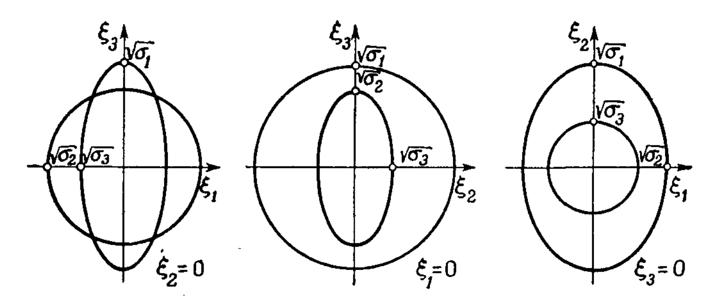


Рис. 48. Пересечение поверхности нормалей с координатными плоскостями.

Чтобы представить себе поверхность нормалей, мы рассмотрим ее пересечение с координатными плоскостями. В пересечении с плоскостью $\xi_2 = 0$ получаются окружность и эллипс, которые имеют четыре точки пересечения:

$$\xi_1^2 + \xi_3^2 - \sigma_2 = 0$$

и

$$\frac{\xi_1^2}{\sigma_3} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_1} - 1 = 0.$$

Эти точки пересечения, конечно, соответствуют точкам, общим для внешней и внутренней части поверхности. Для других двух коорди-

натных плоскостей в пересечениях также получаются окружность и эллипс, но здесь они не пересекаются. На плоскости $\xi_1=0$ мы имеем

$$\xi_2^2+\xi_3^2-\sigma_1=0$$

и

$$\frac{\xi_2^2}{\sigma_3}+\frac{\xi_3^2}{\sigma_2}-1=0;$$

аналогично на плоскости $\xi_3=0$ получается

$$\xi_1^2+\xi_2^2-\sigma_3=0$$

и

$$\frac{\xi_1^2}{\sigma_2}+\frac{\xi_2^2}{\sigma_1}-1=0$$

(см. рис. 48).

Из общей теории § 3 следует, что внутренняя часть поверхности нормалей должна быть выпуклой. Внешняя часть не будет выпуклой,

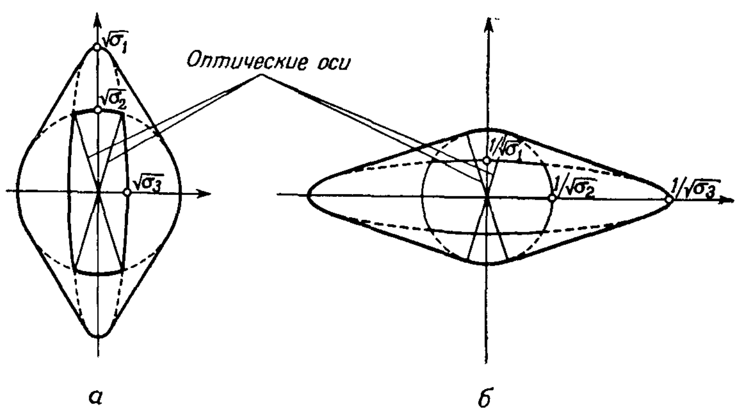


Рис. 49. *а* — поверхность нормалей; *б* — поверхность лучей.

так как она имеет четыре конические точки, направленные внутрь, в то время как соответствующие вершины для внутренней полости направлены наружу.

Как мы заметили выше, в точности то же самое справедливо для поверхности лучей, если параметры σ_1, σ_2, σ_3 заменить на обратные им числа. Однако надо обратить внимание на тот отмеченный в § 3, п. 5 факт, что определение двойственного преобразования требует некоторой модификации, когда речь идет о конических точках. Образ выпуклой поверхности, содержащей внутри начало координат, должен быть выпуклой поверхностью. Выпуклая внутренняя полость поверхности нормалей соответствует выпуклой оболочке поверхности лучей. (Обе они обведены жирными линиями на рис. 49.)

Конические точки поверхности нормалей переходят в четыре плоские „крышки", которые добавляются к поверхности лучей при построении ее выпуклой оболочки. Эти „крышки" не получаются как огибающие характеристических плоскостей, но являются кусками плоскостей, опорных для поверхности лучей в собственном смысле (которую можно представлять себе как огибающую характеристических плоскостей).

Так как соотношение между поверхностью нормалей и поверхностью лучей является соотношением двойственности, то выпуклая оболочка поверхности нормалей отображается во внутреннюю полость поверхности лучей. Та часть внешней полости поверхности нормалей, которая не содержится в выпуклой оболочке, отображается в соответствующую часть поверхности лучей (обе эти части на рис. 49 изображены пунктиром). Точно так же, как конические точки поверхности нормалей соответствуют „крышкам" поверхности лучей, „крышки" поверхности нормалей соответствуют коническим точкам поверхности лучей. Границы „крышек" являются параболическими кривыми, т. е. такими кривыми, на которых обращается в нуль одна из главных кривизн поверхности (см. рис. 49).

Действительно, границы „крышек" поверхности лучей являются окружностями; так как каждая из этих кривых есть линия соприкосновения плоскости и поверхности четвертого порядка, она должна быть кривой четвертого порядка, все точки которой двойные, т. е. коническим сечением. Чтобы убедиться в том, что граница „крышки" является окружностью, мы запишем уравнение поверхности лучей в однородных координатах η, τ:

$$\tau^4 - \tau^2\Psi(\eta) + R^2\Phi(\eta) = 0,$$

где параметры σ_1, σ_2, σ_3 в выражениях Ψ и Φ заменены обратными им числами. Отсюда следует, что поверхность лучей содержит абсолютную окружность проективного пространства, которая задается уравнениями

$$\tau = 0, \quad R^2 = 0.$$

Следовательно, пересечение поверхности лучей с любой плоскостью содержит две абсолютные точки этой плоскости. Если плоская кривая пересечения вырождается в две действительные кривые второго порядка, то одна из этих кривых содержит абсолютные точки, т. е. является окружностью. В частности, это справедливо для линии соприкосновения „крышки" с поверхностью лучей. (Между прочим, это рассуждение подтверждает тот факт, что кривая пересечения поверхности лучей с любой координатной плоскостью должна содержать окружность.)

5. Задача Коши для уравнений кристаллооптики. Задача Коши для системы уравнений кристаллооптики (это система уравнений

первого порядка), а также для других дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, например для уравнений магнитной гидродинамики, может быть переформулирована как задача Коши для некоторой системы второго порядка или для одного уравнения более высокого порядка; это делается с помощью исключения переменных (см. гл. I, § 2). Мы установим эквивалентность соответствующих задач для случая уравнений кристаллооптики.

Исключая вектор напряженности магнитного поля из исходных уравнений Максвелла (7), мы получаем систему трех уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \sigma_1\ddot{u}_1 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\,\partial x_3}, \\ \sigma_2\ddot{u}_2 &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\,\partial x_1}, \\ \sigma_3\ddot{u}_3 &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3\,\partial x_1} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3\,\partial x_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

С помощью процесса исключения мы легко можем убедиться, что все компоненты w вектора u удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению шестого порядка

$$D(\xi,\ \tau)\,w = 0, \tag{20}$$

где τ обозначает $\partial/\partial t$, ξ_i обозначает $\partial/\partial x_i$, а

$$D(\xi,\tau) = \begin{vmatrix} \rho^2 - \xi_1^2 - \sigma_1\tau^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \rho^2 - \xi_2^2 - \sigma_2\tau^2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2 - \xi_3^2 - \sigma_3\tau^2 \end{vmatrix}. \tag{20'}$$

Из уравнения (13) мы заключаем, что

$$D(\xi,\ \tau) = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3\,(\tau^6 - \Psi(\xi)\,\tau^4 + \rho^2\Phi(\xi)\,\tau^2). \tag{21}$$

Уравнение (20) можно свести к уравнению четвертого порядка, так как из каждого члена D можно выделить множитель τ^2. Если мы положим $v = w_{tt}$, то будем иметь

$$F(\xi,\ \tau)\,v = (\tau^4 - \Psi(\xi)\,\tau^2 + \rho^2\Phi(\xi))\,v = 0. \tag{22}$$

Применяя уравнения (7а), из двух уравнений системы (19) с помощью простых вычислений можно исключить две компоненты и таким образом для всех компонент вектора $\mathfrak{E}$ мы получим уравнение четвертого порядка

$$F(\xi,\ \tau)\,u = 0. \tag{22a}$$

Задачи Коши для уравнений Максвелла (7) и для уравнения (22) тесно связаны между собой. Мы покажем, что задача Коши для

уравнений Максвелла, которая состоит в том, что при $t=0$ задаются векторы $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, сводится к задаче Коши для уравнения (22) с начальными данными специального вида

$$v(0,\ x)=0,\quad v_t(0,\ x)=0,\quad v_{tt}(0,\ x)=0,\\ v_{ttt}(0,\ x)=g(x). \tag{22'}$$

Если мы положим $w^*(t,\ x)=\int\limits_0^t (t-s)\,v(s,\ x)\,ds$, то

$$D(\xi,\ \tau)\,w^*=0 \tag{23}$$

и

$$\begin{cases} w^*(0,\ x)=\dfrac{\partial^i}{\partial t^i}w^*(0,\ x)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),\\ \dfrac{\partial^5}{\partial t^5}w^*(0,\ x)=g(x). \end{cases} \tag{23'}$$

Если ввести для этого решения обозначение

$$w^*(t,\ x)=U\{g\},$$

то решение задачи Коши

$$D(\xi,\ \tau)\,w(t,\ x)=0, \tag{24}$$

$$w(0,\ x)=g_0(x),\quad \frac{\partial^i}{\partial t^i}w(0,\ x)=g_i(x) \qquad (i=1,\ \ldots,\ 5), \tag{24'}$$

очевидно, определяется формулами

$$\begin{aligned} w(t,\ x)=U\{g_5\}&+\frac{\partial}{\partial t}U\{g_4\}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}U\{g_3\}+U\{-\Psi(\xi)\,g_3\}+\\ &+\frac{\partial^3}{\partial t^3}U\{g_2\}+\frac{\partial}{\partial t}U\{-\Psi(\xi)\,g_2\}+\\ &+\frac{\partial^4}{\partial t^4}U\{g_1\}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}U\{-\Psi(\xi)\,g_1\}+U\{\rho^2\Phi(\xi)\,g_1\}+\\ &+\frac{\partial^5}{\partial t^5}U\{g_0\}+\frac{\partial^3}{\partial t^3}U\{-\Psi(\xi)\,g_0\}+\frac{\partial}{\partial t}U\{\rho^2\Phi(\xi)\,g_0\}. \end{aligned}$$

Чтобы решить теперь задачу Коши для системы уравнений Максвелла, мы просто должны проверить, что из данных Коши для системы сразу получаются данные Коши для уравнения (24). Система (7) выражает производные компонент w по времени через их пространственные производные, которые в свою очередь вычисляются через данные Коши. Производные по времени более высокого порядка получаются, если сначала продифференцировать систему по t, и т. д. Таким образом, задачу Коши для уравнений Максвелла можно решить, если мы сможем решить задачу Коши для уравнения (22) с начальными данными специального вида (22′). Мы рассмотрим эту последнюю задачу в § 14а.

6. Магнитная гидродинамика[1]). Изучение движения ионизированных газов и жидкостей, на которые действуют электромагнитные силы, приобретает все более важное значение. В связи с этим возникает множество задач, куда входят гиперболические операторы. Здесь для нас интереснее всего то, что даже простые примеры такого движения приводят к характеристическим поверхностям сравнительно сложной структуры, которые тем не менее оказываются в сфере действия общей теории, развитой в этой главе. Мы ограничимся простейшим случаем *идеально проводящей жидкости при наличии магнитного поля*. Пусть u обозначает вектор скорости течения, B — вектор напряженности магнитного поля, J — вектор плотности электрического тока, а μ — магнитную проницаемость. Мы будем также пользоваться обозначением ∇ для градиента и $\times$ для векторного произведения; скалярное произведение там, где это необходимо, будет обозначаться точкой.

Уравнения движения такой жидкости образуют гиперболическую систему; она анизотропна и нелинейна. Для упрощения предполагается, что все скорости течения малы по сравнению со скоростью света, так что можно пренебречь релятивистскими эффектами, такими, как ток смещения в уравнениях Максвелла. Тогда мы имеем

$$\mu J = \operatorname{rot} B, \tag{13}$$

где μ обозначает магнитную проницаемость. Дальнейшее предположение о бесконечной электропроводности позволяет нам найти выражение для вектора напряженности электрического поля E:

$$E = -u \times B. \tag{13'}$$

Оставшиеся два уравнения Максвелла вместе с уравнениями движения жидкости дают следующую систему дифференциальных уравнений для B, u и плотности жидкости ρ как функций от положения точки $x = (x, y, z)$ и времени t:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} B = 0, \\ B_t - \operatorname{rot}(u \times B) = 0, \\ \rho u_t + \rho(u \cdot \nabla) u + \operatorname{grad} p - \mu^{-1}(\operatorname{rot} B) \times B = 0, \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Последний член в третьем уравнении представляет собой силу $J \times B$, с которой магнитное поле действует на единичный объем жидкости.

---

[1]) Подробнее по этому вопросу см. Гофман и Теллер [1], Фридрихс и Кранцер [1], Град [1], Базер и Флейшман [1], см. также Фридлендер [2], Лайтхилл [1] и Вейтцнер [1]. Обозначения в этом пункте более соответствуют тому, что принято в физической литературе, чем обозначениям, применяемым в § 3.

Как и в случае обыкновенных уравнений Максвелла, первое уравнение имеет характер начального условия.

Мы рассмотрим линеаризованную форму этих уравнений, опуская все члены второго порядка. Тогда легко видеть, что система эквивалентна некоторой симметрической гиперболической системе в смысле § 3, п. 8.

Сначала мы рассмотрим случай *несжимаемой жидкости* $\rho = \mathrm{const}$. Последнее уравнение системы (14) тогда примет вид

$$\operatorname{div} u = 0,$$

а давление p может быть взято в качестве неизвестной функции. Чтобы получить характеристическое уравнение, мы рассмотрим произвольное многообразие $\varphi(x, t) = 0$ и положим

$$v = \varphi_t + u \cdot \nabla\varphi = \dot{\varphi} \tag{15}$$

($v = \dot{\varphi}$ есть скорость изменения величины φ с течением времени при наблюдении из точки, перемещающейся вместе с жидкостью, так как $(d/dt)\varphi(t, x(t)) = \varphi_t + u \cdot \nabla\varphi$). Далее, если $\varphi = 0$ есть характеристическое многообразие, то величина v удовлетворяет уравнению, в левой части которого стоит некоторый определитель, а в правой — нуль; если раскрыть этот определитель, то легко можно получить, что

$$\mu\rho v\,(\mu\rho v^2 - (B\nabla\varphi)^2)^2 = 0. \tag{16}$$

Таким образом, мы имеем однократную характеристическую скорость, соответствующую $v = 0$, и две характеристические скорости кратности 2, соответствующие значениям $\pm v = B\nabla\varphi(\mu\rho)^{-1/2}$.

Как и в п. 2, характеристика $v = 0$ дает линию тока. Оставшийся множитель в выражении (16) дает прямую и обратную *волны Альфвена*. В обозначениях $\tau = \varphi_t$, $\xi = \nabla\varphi$ соответствующие поверхности нормалей будут плоскостями с уравнениями $\sqrt{\mu\rho}(\tau + u\xi) \pm$ $\pm (B\xi) = 0$. Мы не ограничим общности, если положим $u = 0$, т. е. будем пользоваться системой координат, которая перемещается вместе с жидкостью, так как наши уравнения инвариантны относительно такого переноса. Взаимная поверхность нормалей для прямой волны Альфвена (иногда ее рассматривают вместо настоящей поверхности нормалей) является просто сферой диаметра

$$b = |B|(\mu\rho)^{-1/2},$$

проходящей через начало координат (см. рис. 50). Ее полюсом будет поверхность лучей, состоящая из единственной точки $x = bB/|B|$; эта точка проектируется из начала координат с помощью изолированного луча. Следовательно, прямая волна Альфвена распространяется только в направлении вектора B; ее скорость b относительно жидкости называется *скоростью Альфвена*. Аналогично, обратная

волна Альфвена распространяется с относительной скоростью b в направлении, обратном к B.

Для сжимаемой жидкости система (14) также применима, но тогда p есть заданная функция $p(\rho)$. Так как кроме скорости Альфвена b имеется *скорость звука*

$$a = \sqrt{p'},$$

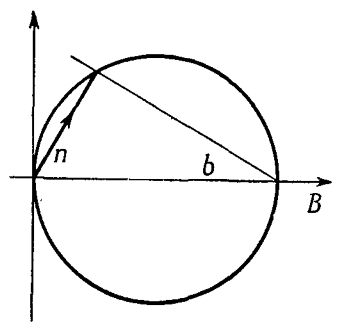


Рис. 50. Взаимная поверхность нормалей для прямой волны Альфвена.

положение теперь более сложное. Сохраняя обозначения, введенные для случая несжимаемой жидкости, мы получим характеристическое уравнение

$$v(v^2 - (b\nabla\varphi)^2)[v^4 - (a^2 + b^2)v^2 + a^2(b\nabla\varphi)^2] = 0, \quad (17)$$

где $a = \sqrt{p'}$, $b = |B|(\mu\rho)^{-1/2}$. Два первых множителя дают характеристическую поверхность $v=0$, соответствующую линиям тока, и характеристические поверхности Альфвена

$$v = \pm B\nabla\varphi(\mu\rho)^{-1/2}.$$

Геометрические места, соответствующие множителю четвертой степени в уравнении (17), т. е. поверхность нормалей и поверхность лучей, более сложны и более интересны, чем соответствующие поверхности Альфвена. Чтобы упростить исследование, не теряя при этом общности, мы снова будем считать, что скорость u обращается в нуль, по крайней мере в рассматриваемой точке. (Наши дифференциальные уравнения инвариантны относительно замены системы координат системой, перемещающейся с постоянной скоростью.) Как и ранее, в характеристическом уравнении мы заменим $\nabla\varphi$ вектором ξ, а φ_t — величиной τ.

Поверхность нормалей, вообще говоря, состоит из трех кусков, вместо которых мы можем изобразить их сечение плоскостью ξ_1, ξ_2, так как имеет место симметрия относительно оси вектора напряженности магнитного поля B. Внутренняя полость конуса нормалей, заключающая „сердцевину“, выпукла. Внешние полости уходят в бесконечность; они похожи на плоскости, ортогональные оси (вектора B), с изгибом около самой оси (см. рис. 51).

С геометрической точки зрения надо различать три случая, соответствующие разным соотношениям между скоростью звука a и скоростью Альфвена b:

(а) $a^2 < b^2$,
(б) $a^2 = b^2$,
(в) $a^2 > b^2$.

Поверхность нормалей показана на рис. 51. В случаях (а) и (в) поверхность нормалей имеет две двойные точки, а именно, точки на расстоянии $1/b$ от начала координат по направлению вектора B. Имеется также четырехкратная точка на бесконечности. Следует заметить, что те две полости, которые уходят в бесконечность, соответствуют множителю четвертой степени в характеристическом уравнении. Таким образом, конус нормалей не состоит из вложенных замкнутых поверхностей.

В случае (б) имеется две тройные точки, а именно общие точки пересечения полости, соответствующей множителям Альфвена, и полостей, соответствующих множителю четвертой степени. Точки пересечения являются коническими точками поверхности нормалей.

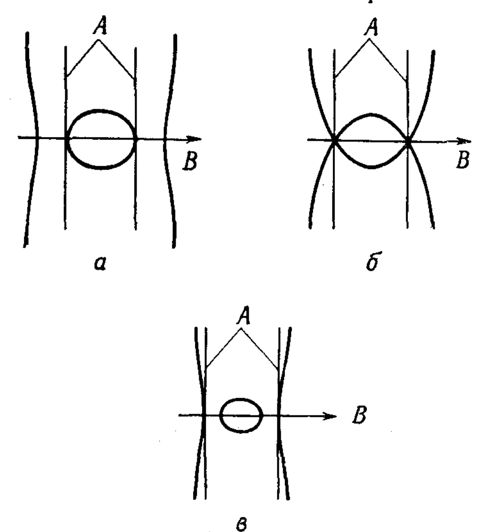


Рис. 51. Поверхность нормалей; A — поверхность Альфвена.

Соответствующие взаимные поверхности нормалей получаются из поверхностей нормалей (рис. 51) с помощью инверсии относительно единичной сферы. На рис. 52, *б*, *в* видно, что внешняя полость взаимной поверхности нормалей не обязана быть выпуклой, несмотря на то, что сердцевина настоящей поверхности нормалей выпукла.

Поверхность лучей показана на рис. 53. Ее алгебраическая степень выше, чем степень поверхности нормалей. Случай *а* показывает, что, хотя конус нормалей и поверхность нормалей регулярны, конус лучей может иметь особенности. В этом случае треугольники с остриями получаются из безобидных на первый взгляд овалов на рис. 52, *а*, *в*. Острия соответствуют точкам перегиба и бесконечно удаленным точкам внешних кусков поверхности нормалей. В случае,

представленном на рис. 53, *б*, внешняя полость конуса лучей уже не будет выпуклой, и, следовательно, не совпадает со своей выпуклой оболочкой. Лучи, соответствующие поверхности Альфвена, лежат

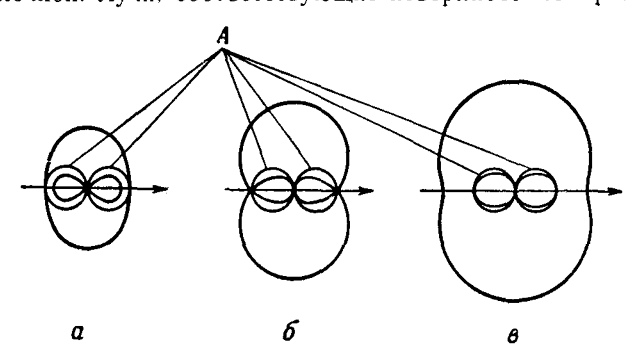


Рис. 52. Взаимная поверхность нормалей; *A* — поверхность Альфвена.

во внешности остальной части конуса лучей, несмотря на то, что поверхность Альфвена для нормальных скоростей, т. е. взаимная

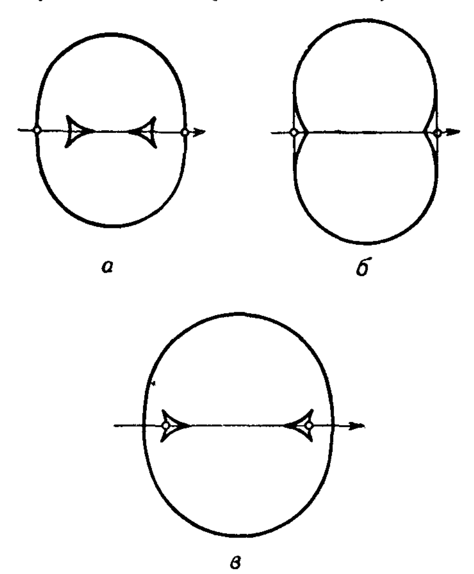


Рис. 53. Поверхность лучей.

поверхность нормалей, всегда лежит либо на остальной части поверхности нормальных скоростей, либо внутри нее. Это легко объяснить, если понять, что нормальные скорости и скорости по лучам, вообще говоря, различны.

Так как конус лучей имеет острия, то мы можем ожидать, что возмущения, которые в начальный момент имеют гладкую границу, могут в дальнейшем иметь границу с остриями. Это действительно возможно, как показано на рис. 54.

Эти примеры показывают, что коноид лучей может иметь сложную структуру и может иметь особенности, несмотря на то, что конус нормалей является регулярным. Соответственно и другие характеристические поверхности могут иметь неожиданные особенности. Эти особенности приводят к интересным вопросам, касающимся связи между алгебраической геометрией и теорией дифференциальных уравнений с частными производными.

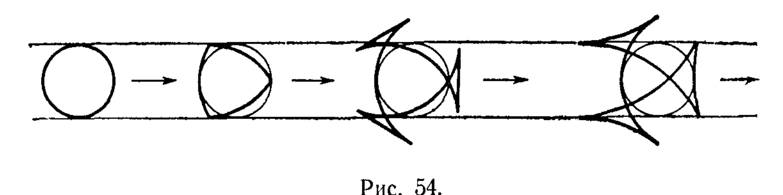


Рис. 54.

В этом параграфе мы рассматривали геометрические формы характеристических поверхностей, в частности фронтов волны. Позднее, когда мы будем подробно изучать задачу Коши и распространение волн, мы увидим, какое значение имеют проделанные ранее исследования для задач о распространении волн (см., например, § 4, 7, 12, 14, 15).

§ 4. *Распространение разрывов и задача Коши*

1. Введение. Для гладких начальных данных решение задачи Коши будет построено в § 8, 9 и 10 с помощью метода „интегралов энергии", т. е. метода, который не опирается непосредственно на понятие характеристик. Однако в этом и следующем параграфе мы увидим, что, тем не менее, структура решений определяется характеристическими поверхностями и лучами. Исходной точкой будет служить анализ распространения разрывов на характеристических поверхностях вдоль лучей (см. также § 1 и 2). Но этот анализ приведет нас к несколько более общему подходу к задаче; в результате мы получим по крайней мере приближенные решения для широкого класса задач с помощью одного только интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль лучей.

Разрывы начальных функций или производных этих начальных функций большей частью будут происходить только на $(n-1)$-мерных многообразиях начального пространства; в остальном начальные данные будут предполагаться настолько гладкими, насколько

это понадобится (т. е. они будут иметь непрерывные производные до любого желаемого порядка).

Как будет показано при подробном исследовании, анализ распространения особенностей основан на предположении, что рассматриваемые характеристики являются простыми, или, в случае кратных характеристик, что кратность одинакова для всех точек и всех характеристических элементов. Это ограничение исключает из области применения общей теории многие важные задачи математической физики. Несмотря на то что эти задачи можно решить с помощью специальных методов, несовершенство общей теории остается вызовом для исследователей [1]). Многочисленные примеры и комментарии в последующих параграфах сделают ситуацию более ясной.

2. Разрывы первых производных для систем первого порядка. Уравнение переноса. Сначала мы рассмотрим системы линейных дифференциальных уравнений [2]) первого порядка

$$L[u]=\sum_{i=0}^{n} A^i u_i + Bu = 0. \tag{1}$$

Выше (см. гл. III и гл. VI, § 3) мы убедились в том, что поверхности C: $\varphi(x)=0$, при переходе через которые сама функция u непрерывна, а производные первого или более высокого порядка имеют разрыв, являются характеристиками. Из соотношения на разрыве [3]) при переходе через C

$$(L[u])=\sum_{i=0}^{n} A^i (u_i)=0$$

следует, что

$$\sum_{i=0}^{n} A^i \varphi_i (u_\varphi) = A(u_\varphi) = 0,$$

так как $u_i = u_\varphi \varphi_i +$ тангенциальные производные, а тангенциальные производные предполагаются непрерывными при переходе через C. Следовательно, матрица $A=\sum A^i\varphi_i$ особенная, и скачок выводящей производной u_φ при переходе через C

$$g=(u_\varphi)=\sigma r \tag{2}$$

является правым нуль-вектором характеристической матрицы A, определенной в § 3; σ здесь скалярный множитель.

---

[1]) Некоторые успехи в теории кратных характеристик были достигнуты, например, в работе Людвига [3]; см. также Льюис [1].

[2]) Относительно квазилинейных систем см. п. 9.

[3]) Здесь снова символ (f) обозначает скачок функции f при переходе через C.

За исключением тех случаев, когда явно оговорено противное, мы здесь, как и в § 3, предполагаем, что характеристическая матрица A имеет ранг $k-1$ и, следовательно, с точностью до скалярного множителя σ имеет один правый нуль-вектор r и один левый нуль-вектор l, такие, что $lA = Ar = 0$.

Любое решение φ дифференциального уравнения

$$|A| = Q(\varphi_0, \ldots, \varphi_n; x) = 0$$

дает семейство характеристических поверхностей

$$C_c\colon \varphi(x) = c = \text{const},$$

и нуль-векторы r, l определены на всех этих поверхностях.

Теперь мы сформулируем следующую теорему: скаляр σ, определяющий скачок

$$(u_\varphi) = \sigma r,$$

распространяется по бихарактеристическим лучам, лежащим на поверхности C, в соответствии с обыкновенным дифференциальным уравнением (уравнением переноса)

$$\dot{\sigma} + P\sigma = 0 \tag{3}$$

(точка обозначает дифференцирование по некоторому параметру вдоль луча), где

$$P = lL[r]. \tag{4}$$

Чтобы коротко[1]) доказать эту теорему, исследуем разрыв u_φ при переходе через поверхность C: $\varphi = 0$, представляя решение в виде

$$u = \frac{1}{2}|\varphi|\, g(x) + R(x),$$

где $g = (u_\varphi) = \sigma r$, а функции $g(x)$ и $R(x)$ имеют непрерывные первые производные, для которых на C непрерывны внутренние производные. Положим $h(\varphi) = \frac{1}{2}$ для $\varphi > 0$ и $h(\varphi) = -\frac{1}{2}$ для $\varphi < 0$. Тогда в силу того, что $Ag = 0$, мы имеем на обеих сторонах поверхности C

$$L[u] = h(\varphi)\, Ag + \frac{1}{2}|\varphi| L[g] + L[R] = \frac{1}{2}|\varphi| L[g] + L[R] = 0.$$

Умножая это равенство на нуль-вектор l, получаем $\frac{1}{2}|\varphi|\, lL[g] + lL[R] = 0$.

Оператор $lL[R]$ является тангенциальным, так как $l\sum A^i\varphi_i = lA = 0$. Следовательно, по предположению, первые производные выражения $lL[R]$ непрерывны на C. Поэтому мы можем продифференцировать

[1]) В п. 4 мы будем более подробно и в более общем виде исследовать разрывы для систем вида (1).

последнее уравнение по φ и рассмотреть скачок левой и правой части при переходе через C; мы немедленно получим внутреннее дифференциальное уравнение на характеристической поверхности C: $lL[g] = l\sum A^i g_i + lBg = 0$. Кроме того, подстановка $g = \sigma r$ дает

$$l\sum A^i r\sigma_i + l\left(\sum A^i r_i + Br\right)\sigma = 0,$$

откуда в силу леммы из § 3, п. 11 получается уравнение

$$\dot{\sigma} + lL[r]\sigma = 0.$$

Между прочим, мы могли бы получить этот результат также по аналогии с § 2, п. 3, предположив сначала, что φ имеет специальный вид $\varphi = x_n$, и воспользовавшись затем инвариантностью характеристик и дифференцирования по характеристическим направлениям.

3. Разрывы начальных значений. Введение обобщенных функций. Бегущие волны. Как уже указывалось в гл. V, § 9, п. 1, правильное математическое описание физической реальности требует введения обобщенных решений с более сильными разрывами, например решений u, которые сами при переходе через C имеют скачок $(u) \neq 0$. Однако мы не можем приписать физический смысл всем разрывным решениям, возможным с математической точки зрения[1]). Обобщенные решения должны подчиняться тому ограничению, чтобы они и их производные получались из гладких решений с помощью предельного перехода. Следуя указанным выше идеям, мы будем допускать в качестве физически осмысленных решений такие решения, которые выражаются через *обобщенные функции*, или *распределения*.

Такие обобщенные функции, в частности дельта-функция Дирака, и раньше применялись в этой книге как символические обозначения. Здесь и далее мы определим их и будем пользоваться ими систематически.

Последовательная общая теория обобщенных функций дана в качестве приложения к этой главе, здесь мы сформулируем только следующие важнейшие идеи этой теории.

Распределения $S(\varphi)$, или обобщенные функции, зависящие от переменной φ, можно в ограниченной области изменения φ определить как символические производные непрерывной функции $W(\varphi)$ „фазовой переменной“ φ

$$S(\varphi) = D^{\alpha} W(\varphi),$$

---

[1]) Например, рассмотрим два различных решения u^1, u^2 уравнения $L[u] = 0$ и отождествим „разрывное решение“ u по одну сторону произвольной поверхности C с u^1, а по другую — с u^2. Тогда u имеет на C значок (u), и ни C, ни (u) ничем не выделяются.

где α — положительное число, а D есть $d/d\varphi$. Мы тогда сможем дифференцировать обобщенные функции так, как если бы они были обычными функциями. Мы можем также образовывать их линейные комбинации с обыкновенными функциями, дифференцируемыми не менее α раз, в качестве коэффициентов и получать таким образом новые обобщенные функции. Кроме того, мы можем подставлять обобщенные функции в линейные дифференциальные операторы и обращаться с этими идеализированными функциями так, как если бы они были обыкновенными.

Кроме обобщенной функции $S = S_0$, мы будем рассматривать обобщенные функции $S_\nu(\varphi)$, такие, что

$$S_\nu'(\varphi) = DS_\nu = S_{\nu-1}. \qquad (5)$$

Если $i > \alpha$, то S_i можно определить как $(i - \alpha)$ раз проинтегрированную функцию W, причем в качестве нижнего предела берется нуль, так что $S_i(0) = 0$.

Предположим, что $S(\varphi)$ — регулярная функция при $\varphi \neq 0$; это означает, что функция $W(\varphi)$ имеет обычные производные при $\varphi \neq 0$. Тогда, очевидно, $S_\nu(\varphi)$ имеют при возрастающих ν все меньшие особенности, непрерывны при $\nu \geqslant \alpha$ и сколь угодно гладки для достаточно больших ν. Кроме того, для ограниченного интервала и для $\nu > \alpha$ мы имеем

$$|S_\nu(\varphi)| < \frac{M}{(\nu - \alpha)!} |\varphi|^{\nu - \alpha},$$

где M — некоторая постоянная.

В качестве примера мы рассмотрим

$$W(\varphi) = \frac{1}{2}(|\varphi| + \varphi), \quad DW = \eta(\varphi),$$
$$D^2W = \delta(\varphi), \qquad D^\alpha W = \delta^{(\alpha-2)}(\varphi),$$

где $\eta(\varphi)$ — *функция Хевисайда*:

$$\eta(\varphi) = 1 \text{ для } \varphi > 0, \quad \eta(\varphi) = 0 \text{ для } \varphi < 0,$$

или

$$W(\varphi) = \frac{1}{2}|\varphi|, \qquad DW = \eta(\varphi) - \frac{1}{2} = h(\varphi),$$
$$D^2W = \delta(\varphi), \qquad D^\alpha W = \delta^{(\alpha-2)}(\varphi),$$

или

$$W(\varphi) = \sqrt{|\varphi|}, \quad DW(\varphi) = \frac{1}{2}|\varphi|^{-1/2} \text{ и т. д.}$$

или

$$W(\varphi) = \log|\varphi|, \quad DW(\varphi) = \frac{1}{\varphi}, \quad D^2W(\varphi) = -\frac{1}{\varphi^2} \text{ и т. д.}$$

В особой точке (здесь при $\varphi=0$) не имеет смысла[1]) отождествление обычных функций с обобщенными функциями, обозначаемыми теми же символами. Однако, как указывалось, такие обобщенные функции или их комбинации можно подставлять в линейные дифференциальные уравнения и обращаться с ними как с обычными функциями[1]).

Чтобы найти представление для функций $u(x, t)$, имеющих особенность на поверхности C: $\varphi(x, t)=0$, мы заметим, что после вычитания члена с особенностью может получиться остаток с более слабым разрывом. Это объясняет введение в рассмотрение разрывных (обобщенных) функций следующего вида:

$$u(x, t)=\sum_{\nu=0}^{N} S_\nu(\varphi)\, g^\nu(x, t)+R(x, t), \tag{6}$$

где N мы можем выбирать по нашему усмотрению, коэффициенты g^ν настолько гладкие, насколько это нужно, а остаточный член R также имеет любую необходимую степень гладкости. Если u — вектор, то коэффициенты g^ν и остаточный член R также должны быть векторами, а S_0, S_1, ... — скалярами.

Надо заметить, что такое представление не единственно, если мы просто хотим иметь определенную особенность при $\varphi=0$. Вне поверхности C: $\varphi=0$ мы можем произвольным образом изменять коэффициенты g^ν, считая, что $S(\varphi)$ регулярны всюду, кроме $\varphi=0$. Члены, которые получаются при изменении, всегда можно включить в остаточный член R. Если мы не должны обращать внимание на тонкости строения особенности функции u, то мы можем скомбинировать члены разложения (6) в одно или два слагаемых. Например, если $W(\varphi)=\log|\varphi|$ и, следовательно, $S(\varphi)=S_0(\varphi)=\text{const}\cdot\varphi^{-\alpha}$, то для целых α представление (6) может быть записано в виде

$$u=\frac{1}{\varphi^\alpha}\, G(x, t)+\log|\varphi|\, G^*(x, t),$$

где коэффициенты G, G^* регулярны.

Во всяком случае, разложения вида (6) оказываются наиболее подходящими для анализа.

Часто будет удобно в разложении (6) не указывать число N и не выделять остаточный член R, а писать

$$u(x, t)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(\varphi)\, g^\nu(x, t), \quad S_0=S; \tag{6'}$$

при этом подразумевается, что это формальное разложение надо прекратить после некоторого числа N членов и затем добавить остаточный член R нужной степени гладкости.

[1]) См. приложение.

Если в действительности ряд (6′) прерывается после N членов и остаточный член равен нулю, то мы будем называть функцию u (имея в виду дальнейшее изучение понятия волны в § 18) *бегущей волной порядка* N, или, если она может быть представлена в виде сходящегося ряда, *полной бегущей волной*; в противном случае u называется *приближенной бегущей волной*.

Как указывалось выше, обобщенные функции описанного типа можно рассматривать как (слабые) пределы при $\varepsilon \to 0$ функций вида $D^{\alpha}W^{\varepsilon}(\varphi)$, где $W^{\varepsilon}(\varphi)$ имеет производные всех нужных порядков. Тогда u рассматривается как предел регулярных функций u^{ε}, „резко изменяющихся" при переходе через C, но не вдоль C, таких, для которых $L[u^{\varepsilon}]$ стремится к $L[u]$. Вместо того чтобы работать с функциями u^{ε} и переходить в конце к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы формулируем простые правила действий над δ-функцией и вообще над обобщенными функциями вида $D^{\alpha}W(\varphi)$ (см. приложение).

Применение бегущих волн вида (6′) оправдывается также необходимостью подробного изучения характера разрыва u при переходе через C.

Например, разрыв типа скачка для функции u может быть представлен просто одним членом $\eta(\varphi)g(x, t)$; чтобы одновременно учесть разрыв нормальной производной u_{φ}, мы используем два члена $\eta(\varphi)g(x, t)+|\varphi|g^1(x, t)$ и т. д.

Мы снова заранее оговорим некоторые предположения. Прежде всего, мы всегда предполагаем, что коэффициенты дифференциального оператора и начальные данные настолько гладки, насколько это нужно для того, чтобы были справедливы утверждения относительно гладкости коэффициентов g^{ν} и остаточного члена R. Во-вторых, за исключением особенности при $\varphi=0$, и, возможно, еще при нескольких значениях φ, $S(\varphi)$ также предполагается достаточно гладкой функцией.

Чтобы построить обобщенное решение $u(x, t)$ типа бегущей волны (6) или (6′), мы просто подставим эти разложения в дифференциальное уравнение; при этом обобщенные функции дифференцируются так же, как если бы они были обычными. Затем потребуем, чтобы полученные в результате этого гладкие коэффициенты при обобщенных функциях S_{ν} обращались в нуль. Это приведет к последовательности дифференциальных уравнений для коэффициентов g^{ν}, а эти уравнения можно свести к простым обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Если число N достаточно велико, то остаточные члены можно сделать сколь угодно гладкими, что позволит нам завершить построение решения задачи Коши, обратившись к построению, приведенному в § 10.

В случае, когда ряд (6′) конечен или сходится, не надо учитывать остаточные члены; указанный метод применим тогда к *произвольным*

функциям $S(\varphi)=S_0(\varphi)$, независимо от того, сингулярные они или гладкие. Это замечание (см. также § 18) позволяет полностью построить решение для важных классов начальных данных, не обращаясь к теоремам существования из § 10.

4. Распространение разрывов для систем первого порядка. Чтобы провести указанные выше действия, заметим, что

$$u_i = S_{-1}(\varphi)\varphi_i g + \sum_{\nu=0}^{N-1} S_\nu(\varphi)\{g_i^\nu + g^{\nu+1}\varphi_i\} + \ldots \qquad (7)$$

$$(g^0 = g),$$

а также

$$u_{ij} = S_{-2}\varphi_i\varphi_j g + S_{-1}\{\varphi_{ij}g + \varphi_i g_j + \varphi_j g_i + g^1\varphi_i\varphi_j\} +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{N-2} S_\nu\{g_{ij}^\nu + g_i^{\nu+1}\varphi_j + g_j^{\nu+1}\varphi_i + g^{\nu+1}\varphi_{ij} + g^{\nu+2}\varphi_i\varphi_j\} + \ldots \qquad (8)$$

и т. д.; точками здесь обозначены регулярные члены. Если оборвать формальное разложение после некоторого числа членов, то, как было указано ранее, остаточный член будет сколь угодно гладким.

Подставим выражение (7) в оператор первого порядка (1) и получим

$$L[u] = S_{-1}Ag^0 + \sum_{\nu=0}^{N-1} S_\nu(Ag^{\nu+1} + L[g^\nu]) +$$
$$+ (S_N L[g^N] + L[R]) = 0, \qquad (9)$$

где $A = A^i\varphi_i$, а R — регулярная функция для достаточно больших N. Мы предположим, что все коэффициенты при S_{-1}, S, $S_1, \ldots$, а также выражение $S_N L[g^N] + L[R]$ обращаются в нуль не только при $\varphi = 0$, но также и на поверхностях C_c: $\varphi = c \neq 0$ для прилегающей части пространства x.

Таким образом,

$$Ag = 0, \qquad (10)$$

$$L[g^\nu] + Ag^{\nu+1} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, N-1), \qquad (10')$$

$$S_N L[g^N] + L[R] = 0. \qquad (10'')$$

Следовательно, как и ранее, $|A| = Q(D\varphi) = 0$,

$$g^0 = g = \sigma r.$$

Поэтому семейство $\varphi = \text{const}$ представляет собой семейство характеристических поверхностей C_c. Умножая равенства (10′) на левый нуль-вектор l, получаем

$$lL[g^\nu] = 0 \qquad (11)$$

и, в частности, для $\nu=0$

$$lL[g]=lL[\sigma r]=\sum_{\nu} lA^{\nu}r\sigma_{\nu}+lL[r]\sigma=0, \tag{11'}$$

или (см. лемму § 3, п. 11)

$$lL[\sigma r]=\dot{\sigma}+lL[r]\sigma=0. \tag{12}$$

Это фундаментальное обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее $g^0=g$, как указывалось выше в п. 2.

Коэффициенты g^1, g^2, ... теперь определяются последовательно; мы рассматриваем $g^{\nu+1}$ как решение системы линейных уравнений (10′); из способа вывода этой системы следует, что она совместна[1]), несмотря на то, что ее матрица A особенная. Как следствие мы получаем, что

$$g^{\nu+1}=\sigma^{\nu+1}r+h^{\nu+1}. \tag{13}$$

Здесь величина $h^{\nu+1}$ определяется однозначно (по модулю r), если известно значение $L[g^{\nu}]$, а $\sigma^{\nu+1}$ — скалярный множитель.

Подставим выражение (13) в (11) и напишем $\nu+1$ вместо ν; мы снова получим обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль луча

$$\dot{\sigma}+lL[r]\sigma+k^{\nu}=0, \quad \sigma=\sigma^{\nu+1}, \tag{12'}$$

где k^{ν} известно, если известно $L[g^{\nu}]$.

Эти обыкновенные *дифференциальные уравнения „переноса“* (12) и (12′) позволяют последовательно определить функции g^{ν} на поверхности C_c: $\varphi=\text{const}=c$, если известны их начальные значения на пересечении C_c с некоторым пересекающим его многообразием, например $x_0=0$. Тогда функции g^{ν} определены в некоторой $(n+1)$-мерной части пространства x, заполненной характеристическими поверхностями $\varphi=\text{const}=c$.

В случае, когда функция u имеет разрыв типа скачка, $S(\varphi)=\eta(\varphi)$, $(u)=g$, соотношения (7) и (8) сразу позволяют нам выразить скачки производных (u_i), (u_{ij}), ... на поверхности разрыва C: $\varphi=0$ через коэффициенты g^{ν} и их производные на C. Так как скачки $\delta(\varphi)$, $\delta'(\varphi)$, ... равны нулю, мы имеем

$$\begin{aligned}
(u)&=g,\\
(u_i)&=g_i+g^1\varphi_i,\\
(u_{ij})&=g_{ij}+g^1_i\varphi_j+g^1_j\varphi_i+g^1\varphi_{ij}+g^2\varphi_i\varphi_j,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{14}$$

[1]) Кроме того, совместность является непосредственным следствием полученных ниже соотношений (12′).

Обратно, скачки производных функции u позволяют последовательно определить функции g, g^1, g^2, ... на C_0 (надо иметь в виду, что продолжение функций g, g^1, ... вне C_0 не определяется скачками u, u_i, ... и т. д.).

5. Характеристики постоянной кратности. Как указывалось в § 3, для симметрических гиперболических систем наличие кратных характеристик не обязательно приводит к серьезным трудностям. Хотя большинство уравнений математической физики симметрические, желательно обобщить проделанный выше анализ на важный случай уравнений с кратными характеристиками, кратность которых постоянна, т. е. не меняется ни в зависимости от направления нормали, ни от точки к точке; система при этом может быть или не быть симметрической. Мы предположим, что существует s линейно независимых правых нуль-векторов r^1, r^2, ..., r^s и s независимых левых нуль-векторов l^1, l^2, ..., l^s: $Ar^i = l^j A = 0$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant s$. В силу того что $A(u) = 0$, скачок (u) должен быть линейной комбинацией векторов r^1, r^2, ..., r^s:

$$(u) = \sigma_1 r^1 + \sigma_2 r^2 + \ldots + \sigma_s r^s. \tag{15}$$

В общем случае мы выведем дифференциальные уравнения для скалярных множителей σ_i: подставим выражение (15) в равенство $lL[u] = 0$ и для $l = l^j$ получим

$$l^j \sum_{i=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{n} A^\nu r^i \sigma_\nu^i + l^j \sum_{i=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{n} \left(A^\nu r_\nu^i + Br^i\right) \sigma^i = 0 \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{11''}$$

Эти равенства снова представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно σ_1, σ_2, ..., σ_s на C. Таким образом, дифференцирование при $s > 1$ может и не привести к обыкновенным уравнениям вдоль бихарактеристических лучей; разрывы, резко локализованные в начальный момент, могут распространиться на всю поверхность C (ниже будут даны примеры). Однако это не может случиться, и, как и раньше, разрывы будут распространяться вдоль лучей, если во всех точках пространства x характеристики имеют одинаковую кратность. Ссылаясь на § 3, п. 10, мы следующим образом определим такую кратность: алгебраическое уравнение $Q(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) = 0$ при произвольном наборе значений φ_1, φ_2, ..., φ_n (в некоторой n-мерной области) определяет кратный корень $\varphi_0 = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, такой, что матрица $A = A^\nu \varphi_\nu$ имеет s линейно независимых правых нуль-векторов r^i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и столько же независимых левых нуль-векторов l^i.

Чтобы доказать наше утверждение, мы обратимся к лемме § 3, п. 11. Согласно этой лемме в дифференциальных уравнениях (11″)

все величины σ^i дифференцируются по одному и тому же бихарактеристическому направлению

$$\dot{x}_\nu : \dot{x}_0 = -f_\nu, \qquad \nu > 0$$

и, таким образом, наше утверждение доказано. Как легко видеть, эти бихарактеристические лучи относятся к неприводимому множителю выражения Q, определяющему рассматриваемую полость характеристической поверхности.

5а. Примеры распространения разрывов вдоль многообразий более чем одного измерения. Коническая рефракция. Если предположение п. 5 не выполняется, т. е. характеристическая поверхность C имеет кратность более единицы, но не принадлежит семейству характеристических поверхностей, обладающих одинаковой кратностью для всех направлений нормали и во всех точках пространства, то может случиться, что начальные разрывы из точки, лежащей на поверхности C, распространяются по многообразиям, лежащим на C, имеющим размерность два или более.

Это можно увидеть на почти очевидных примерах. Рассмотрим систему трех уравнений и предположим, что первое уравнение не содержит дифференцирования по переменной x_3. Тогда плоскости $x_3 = \text{const}$ будут характеристическими поверхностями кратности два (или, может быть, три), так как существует по крайней мере одна линейная комбинация остальных двух уравнений, в которую не входит дифференцирование по x_3. Теперь легко видеть, что начальный разрыв на поверхности C: $x_3 = 0$ распространяется по C в двух направлениях. Достаточно рассмотреть типичный пример. Мы будем писать x, y, z вместо x_1, x_2, x_3 и u, v, w вместо u_1, u_2, u_3; рассмотрим систему

$$u_x = 0,$$
$$v_y - u = 0,$$
$$w_z - v = 0.$$

Характеристической плоскости $z = 0$ соответствуют два линейно независимых левых нуль-вектора $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$; эта плоскость C покрыта не одним, а двумя семействами бихарактеристических кривых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Компонента v удовлетворяет дифференциальному уравнению $v_{xy} = 0$, и, очевидно, разрывы v при переходе через плоскость $z = 0$ распространяются как решения этого же уравнения. Разрыв, первоначально локализованный в точке, распространяется по двум бихарактеристикам $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, проходящим через эту точку.

В предыдущем примере отклонение от „нормального" поведения можно считать минимальным. Однако имеются важные с физической

точки зрения случаи, когда отличие от нормального поведения оказывается более существенным. В этих случаях число независимых переменных больше трех и характеристические кривые, проходящие через некоторую начальную точку на рассматриваемой характеристической поверхности, образуют двумерное многообразие, конус. Наиболее известен пример из кристаллооптики (*коническая рефракция*). Согласно проведенному в § 3а исследованию дифференциальных уравнений кристаллооптики, плоские фронты волны вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - \eta t = 0$ являются характеристическими поверхностями для этих дифференциальных уравнений, если нормаль $\alpha = \xi/|\xi|$ и скорость $\eta = -\tau/|\xi|$ связаны характеристическим уравнением (9б) из § 3а. Это уравнение, вообще говоря, определяет два значения скорости для заданного направления нормали и один характеристический луч для каждой из этих скоростей. (Построение двух лучей для заданной нормали имеется в § 3, п. 4.)

Однако существует одно исключение из этого правила, а именно случай, когда нормаль α направлена по оптической оси кристалла. Тогда обе скорости совпадают и вместо двух лучей, проходящих через точку, мы имеем круговой конус, составленный из лучей. Это явление „конической рефракции", впервые теоретически открытое Гамильтоном и затем подтвержденное экспериментально, означает, что луч, входящий в кристалл по направлению оптической оси, разбивается на множество лучей, направленных по всем образующим конуса; разрыв, принесенный входящим лучом, распространяется прежде всего по конической поверхности, но также (в сильно смягченном виде) и внутрь конуса. Аналитически в этом можно убедиться, применив построения п. 5 и соответствующим образом преобразовав полученные дифференциальные уравнения; тогда видно, что величина разрыва удовлетворяет волновому уравнению, содержащему два пространственных переменных и время.

Явление, аналогичное конической рефракции, встречается и в магнитной гидродинамике (см. § 3а, п. 6), если на жидкость из вакуума падает фронт электромагнитной волны по направлению магнитного поля этой жидкости[1]), а скорость звука в этой жидкости и скорость Альфвена совпадают.

6. Устранение начальных разрывов и решение задачи Коши. В этом пункте мы воспользуемся построенной выше теорией для того, чтобы свести задачу Коши с разрывными начальными данными к соответствующей задаче с гладкими данными. Существование и единственность решения этой последней задачи будут доказаны в последующих параграфах. Такое сведе́ние опирается на тот факт, что можно построить конечную волну w вида (6), которая имеет задан-

---

[1]) Подробный анализ см. в работе Людвига [2].

ные начальные разрывы и для которой выражение $L[w]$ сколь угодно гладко.

Мы предположим, что $x_0 = t = 0$ — начальное многообразие $\mathcal{J}$ пространственного типа. Тогда из $(n-1)$-мерного многообразия $\mathcal{J}_0$, определяемого уравнением

$$\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x) = c = \text{const на } \mathcal{J},$$

исходят k характеристических поверхностей $C^\varkappa$: $\varphi^\varkappa(t, x) = \text{const} = c$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$, пучком расходящихся в пространство x, t. Независимо от того, совпадают ли некоторые из них между собой, из гиперболичности $L[u]$ следует, что для характеристической матрицы существует k линейно независимых правых нуль-векторов $r^\varkappa$.

Предполагается, что начальные данные имеют разрыв S при переходе через $(n-1)$-мерное многообразие $\mathcal{J}_0$: $\varphi(x) = 0$, и что они имеют вид

$$u(0, x) = u_0(x) = \sum_{\nu=0}^{N} S_\nu(\varphi(x))\, g^\nu(x) + R(x).$$

Первый шаг в решении задачи Коши состоит в разложении начальных значений $u_0(x)$ на k компонент, каждая из которых соответствует одной из k характеристических поверхностей $\varphi^\varkappa(t, x) = c$ пучка, проходящего через многообразие $\varphi(x) = 0$. Соответственно мы разложим и решение u на k компонент

$$u(t, x) = \sum_{\varkappa=1}^{k} U^\varkappa(t, x).$$

В обозначениях п. 3 мы потребуем, чтобы

$$U^\varkappa \sim \sum_\nu S_\nu(\varphi^\varkappa(t, x))\, g^{\nu, \varkappa}(t, x),$$

$$L[U^\varkappa] = 0 \quad \text{и} \quad \sum_\varkappa U^\varkappa(0, x) = u_0(x).$$

Поскольку для всех $\varkappa$ мы имеем $\varphi^\varkappa(0, x) = \varphi(x)$, то в соответствии с этим мы при каждом ν потребуем выполнения равенства

$$\sum_\varkappa g^{\nu, \varkappa}(0, x) = g^\nu(x), \tag{16}$$

считая, что функции $g^\nu(x)$ известны из начальных данных. В силу сказанного в п. 4, функции $g^{\nu, \varkappa}$ выражаются через скаляры $\sigma^{\nu, \varkappa}$ и известные нуль-векторы $r^\varkappa$ с помощью формулы (13). Это для каждого ν приводит к системе k линейных уравнений для начальных значений $\sigma^{\nu, \varkappa}$ на $\mathcal{J}$.

В частности, для начального разрыва типа скачка, т. е. для $S_0(\varphi) = S(\varphi) = \eta(\varphi)$, где $\eta(\varphi)$ снова обозначает функцию Хевисайда,

величина $g^0(\varphi) = g(\varphi)$ при $\varphi = 0$ измеряет величину скачка вектора u при переходе через C.

В соответствии с п. 4 скачок функции u при переходе через $C^\varkappa$: $\varphi^\varkappa(t, x) = 0$ определяется выражением $(u^\varkappa) = \sigma^\varkappa(t, x)\, r^\varkappa(t, x)$; следовательно, на начальной плоскости при $\varphi = 0$ мы имеем

$$\sum (u^\varkappa) = (u_0) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \sigma^\varkappa(0, x)\, r^\varkappa(0, x) = g(0, x). \tag{17}$$

Эта система k линейных уравнений невырожденная и, следовательно, однозначно определяет скаляры $\sigma^\varkappa(0, x)$; действительно, в силу предположения о гиперболичности векторы $r^\varkappa(0, x)$ линейно независимы. Таким образом, начальный разрыв (u_0) распадается на k компонент, каждая из которых соответствует одной из k характеристик пучка, проходящего через начальный разрыв.

Для начального многообразия $\varphi = 0$ такое распадение обязательно; теперь мы потребуем, чтобы оно происходило для всех характеристик $C_c^\varkappa$ пучка, проходящего через многообразие $\varphi(x) = c = \text{const}$, в соответствии с формулой (17); это согласуется с замечаниями п. 4. В силу обыкновенных дифференциальных уравнений переноса (12′) начальные значения $\sigma^\varkappa(0, x)$ определяют функции $\sigma^\varkappa$ и, следовательно, множители $g^{0,\varkappa}$ на всех характеристических поверхностях $C_c^\varkappa$, несмотря на то, что поверхности $C_c^\varkappa$ не несут разрывов при $c \neq 0$.

Применяя формулы (13), мы можем аналогичным образом с помощью некоторого числа простых шагов определить коэффициенты $g^\nu(x)$ и их продолжение на характеристики $C_c^\varkappa$. Для скаляров $\sigma^{\nu,\varkappa}(0, x)$ уравнения (16) немедленно приводят к системе линейных уравнений вида

$$\sum_\varkappa \sigma^{\nu,\varkappa} r^\varkappa = M^\varkappa,$$

где величина $M^\varkappa$ известна, если известны $g^{\mu,\varkappa}$ для $\mu < \nu$. Таким образом, шаг за шагом, сначала определяются начальные значения для $\sigma^{\nu,\varkappa}$, а затем, в силу уравнений (12′), эти скаляры, а следовательно, и $g^{\nu,\varkappa}$, *определяются на поверхностях* $C_c^\varkappa$. *Тем самым* эти функции определяются в некоторых $(n+1)$-мерных окрестностях $C_c^\varkappa$ для подходящих окрестностей $c = 0$.

Данное выше разложение величин g^ν применимо не только к разрывам типа скачков, но и к произвольным особенностям $S(\varphi)$. Однако для $S(\varphi) = \eta(\varphi)$ мы можем сделать еще один шаг вперед, связав коэффициенты g^ν со скачками производных функции u_0. Читатель легко может убедиться в том, что это можно сделать на основании формул (14) из п. 4.

После этих приготовлений легко закончить решение задачи Коши. Возьмем достаточно большое N и составим функцию

$$U = \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{N} S_\nu(\varphi^\varkappa(x, t)) g^{\nu, \varkappa}(x, t).$$

Тогда выражение $L[U] = G(x, t)$ будет настолько гладким, насколько это нужно; то же самое справедливо относительно функции $w = u - U$. Поэтому из того, что $L[u] = 0$, следует дифференциальное уравнение

$$L[w] = -G(x, t)$$

с гладкими начальными условиями и гладкой правой частью. Единственное решение такого типа задач будет построено в § 10. Следовательно, $u = U + w$ является единственным решением задачи Коши, поставленной в этом пункте.

6а. Характеристические поверхности как фронты волны. Сделаем несколько замечаний относительно *волн* и *фронтов волны*. В § 3 характеристические поверхности рассматривались как возможные поверхности разрывов или фронты волны для решений u уравнения $L[u] = 0$, которые носят название „волн". Теперь, в силу предыдущих результатов, мы убедились в том, что *любая характеристическая поверхность* $\varphi(t, x) = 0$ *является фронтом волны* для соответствующим образом построенной волны u. Следовательно, характеристические поверхности можно *определить* как фронты волны.

Кроме того, построение Гюйгенса фронтов волны как огибающих семейств других фронтов волны $\varphi(t, x, \alpha)$, зависящих от параметров $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ находит отражение в следующей теореме: если волна $u(t, x, \alpha)$ есть решение уравнения $L[u] = 0$, зависящее от параметров α и имеющее особенность на фронте волны $\varphi(t, x, \alpha) = 0$, то суперпозиция таких волн $u(t, x) = \int u(t, x, \alpha)\, d\alpha$ является волной, особенности которой сосредоточены на огибающей фронтов $\varphi(t, x, \alpha) = 0$. Для доказательства этого факта мы сошлемся на рассуждения § 15, п. 3 [1]).

7. Решение задачи Коши с помощью сходящегося разложения на волны. Если разложение на бегущие волны обрывается после N членов или сходится к полной бегущей волне, то приведенное выше построение дает решение задачи Коши, причем без обращения к доказательству теоремы существования в § 10. Как указывалось раньше, в этом случае разложение дает решение урав-

[1]) См. также Людвиг [1].

нения $L[u]=0$ для произвольной функции $S(\varphi)$, независимо от того, имеет ли она особенности.

Мы рассмотрим случай полных бегущих волн. Чтобы построить все коэффициенты g^ν, мы предположим, что коэффициенты A^ν и B имеют производные всех порядков; точнее, мы предполагаем, что они являются аналитическими функциями (например, постоянными или многочленами). Тогда справедлива следующая замечательная теорема.

Пусть начальные значения задаются рядом

$$u(0,\ x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(\varphi(x))\,g^\nu(x),$$

таким, что функция $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(1/\nu!)(\varphi)^\nu g^\nu(x)$ аналитична по x, т. е. разлагается в равномерно сходящийся степенной ряд в некоторой окрестности точки $x=0$, $\varphi=0$. Тогда бесконечный ряд

$$u(t,\ x)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(\varphi^\varkappa(t,\ x))\,g^{\varkappa,\nu}(t,\ x),$$

определенный в п. 4, также равномерно сходится при достаточно малых $|x|$ и t и дает решение задачи Коши. Здесь $S(\varphi)$ — произвольная обобщенная функция.

Можно было бы попытаться доказать это с помощью оценок для коэффициентов $g^{\varkappa,\nu}$ и их производных, опираясь на построение, проведенное в п. 4. Однако мы просто сошлемся на изящное доказательство Людвига [1], которому удалось свести эту теорему к теореме существования Коши — Ковалевской.

8. Системы второго и высших порядков. Для решений вида (6) систем уравнений порядка m тем же методом, что и для систем первого порядка, получен весьма общий результат. Его можно сформулировать следующим образом: фазовая функция φ задает характеристику, а множители g^ν определяются формулами вида

$$g^\nu=\sigma^\nu r+h^\nu,$$

где σ^ν — скаляр, величины h^ν известны, если известны $g^{\nu-1}$, $g^{\nu-2}$, ...; $h^0=0$, а r — правый нуль-вектор характеристической матрицы A.

На характеристической поверхности C_c: $\varphi=c=\text{const}$ скаляр $\sigma=\sigma^\nu$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению переноса вдоль бихарактеристических лучей:

$$\dot\sigma+P\sigma+k^\nu=0, \tag{18}$$

где k^{ν} известно, если известны функции $g^{\nu-1}, \ldots, k^0=0$, и где, независимо от ν, на C_c выполняется соотношение

$$P=\frac{1}{(m-1)!}\, lL\left[(\varphi-c)^{m-1} r\right]. \tag{19}$$

Здесь l обозначает левый нуль-вектор матрицы A.

Доказательство этой общей теоремы можно провести с помощью непосредственных вычислений, например для случая $m=2$, т. е. для системы k уравнений второго порядка

$$L[u] \equiv \sum_{i,\, j=0}^{n} A^{ij} u_{ij}+\sum_{i=0}^{n} A^i u_i+Bu=0, \tag{20}$$

где $A^{ij}=A^{ji}$, A^i и B — квадратные матрицы порядка k (см. § 3, п. 1). Предполагается, что эти матрицы имеют достаточно большое число производных по x (для квазилинейной системы также по u и u_i). Характеристическая матрица равна $A=\sum A^{ij}\varphi_i\varphi_j$. Так как $A_{\varphi_i}= 2\sum\limits_{j=0}^{n} A^{ji}\varphi_j$, то подстановка выражений (7) и (8) в уравнение (20) дает

$$L[u]=S_{-2}Ag^0+S_{-1}\left[Ag^1+A_{\varphi_i}g_i^0+\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^0\right]+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{N-2} S_\nu\left[Ag^{\nu+2}+A_{\varphi_i}g_i^{\nu+1}+\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^{\nu+1}+Lg^{\nu}\right]+\ldots$$

Мы снова потребуем [1]) для $i \leqslant N-2$, чтобы все множители при функциях S_i обращались в нуль не только на поверхности $C=C_0$, но и на всех поверхностях C_c: $\varphi=c=\text{const}$ в некоторой $(n+1)$-мерной окрестности C_0. Поэтому на этих поверхностях мы также будем иметь $Ag=0$. Следовательно, $|A|=0$; таким образом, все семейство C_c состоит из характеристик и $g=\sigma r$, как мы видели выше в п. 4.

Приравнивание нулю множителей при $S_{-1}, S_0, \ldots$ дает на C_c

$$Ag^1+A_{\varphi_i}g_i^0+\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^0=0, \tag{21}$$

$$Ag^{2+\nu}+A_{\varphi_i}g_i^{1+\nu}+\left(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i\right)g^{1+\nu}+L[g^{\nu}]=0 \tag{21'}$$
$$(\nu=0,\ 1,\ \ldots)$$

. . . .

[1]) На поверхности $\varphi=0$ это является следствием уравнения $L[u]=0$, если S_i имеют надлежащие особенности.

Умножим теперь каждое из этих равенств на левый нуль-вектор l матрицы A; в силу того что $lA=0$, мы точно так же, как в п. 4, получим

$$lA_{\varphi_i}g_i^0+l(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i)g^0=0, \tag{22}$$

$$lA_{\varphi_i}g_i^\nu+l(A^{ij}\varphi_{ij}+A^i\varphi_i)g^\nu+lL[g^{\nu-1}]=0, \tag{22'}$$

. . . .

Снова эти обыкновенные дифференциальные уравнения являются внутренними на характеристических поверхностях $\varphi=\text{const}$, так как на них $\sum_{j=1}^{n} lA_{\varphi_j}\varphi_j=2lA=0$. Согласно лемме из § 3 п. 11, вектор $\dot{x}_i=Q_{\varphi_i}$, направленный по характеристическому лучу, пропорционален вектору $lA_{\varphi_i}r$. *Поэтому, подставив в формулу* (22) *вектор* $g=\sigma r$, мы получим для σ обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль лучей, лежащих на поверхности C_c: $\dot{\sigma}+P\sigma=0$, где $P=lL[r(\varphi-c)]$.

Неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие коэффициенты g^ν для $\nu>0$, получаются так же, как в п. 4; формулы (21′) дают для $g^{\nu+2}$ систему линейных уравнений с вырожденной матрицей A. Следовательно, в силу того что система (21′) совместна (см. п. 4), мы имеем

$$g^{\nu+2}=\sigma^{\nu+2}r+h^{\nu+2}, \tag{23}$$

где правая часть $h^{\nu+2}$ известна, если известны функции g, g^1, ..., $g^{\nu+1}$ и их производные, а $\sigma^{\nu+2}$ — скаляр. Напишем ν вместо $\nu+2$ и подставим выражение (23) в (22′); на поверхности $\varphi-c=0$ для σ^ν мы получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение (уравнение переноса)

$$\dot{\sigma}^\nu+P\sigma^\nu=K^\nu,$$

с той же однородной частью, как и ранее. Таким образом, шаг за шагом определяются все коэффициенты g^ν в формуле (6), если известны их начальные значения на некотором $(n-1)$-мерном начальном многообразии, принадлежащем C_c и пересекающем все лучи.

Для систем высших порядков доказательство по существу остается таким же. Приведенные выше вычисления можно упростить, воспользовавшись свойствами инвариантности характеристик, сформулированными в § 3. Подробности мы здесь опустим.

9. Дополнительные замечания. Слабые решения. Ударные волны. Как указывалось в гл. V, § 9 для случая двух независимых переменных, обобщенные решения, обладающие особенностями, можно получить с помощью понятия „слабых решений“, заменив дифферен-

циальное уравнение $L[u]=0$ интегральным соотношением

$$\int uL^*[v]\,dx=0.$$

Здесь L^* — сопряженный оператор, а v — произвольная гладкая „пробная“ функция, финитная, т. е. равная нулю вне достаточно большой сферы. Для n независимых переменных рассуждения остаются совершенно без изменений и нет необходимости приводить их здесь. Во всяком случае, они тесно связаны с понятием обобщенных функций (см. приложение).

Но необходимо добавить замечание, касающееся *квазилинейных уравнений* (1). Конечно, для них понятие характеристик и бихарактеристик остается таким же, как в линейном случае. Остаются справедливыми также результаты, относящиеся к разрывам первых производных.

Однако теория предыдущего параграфа неприменима, если рассматриваются разрывы самой функции u. Так же, как в гл. V, § 3, мы можем ввести такие разрывы, называемые „ударными волнами“, в случае, когда система первого порядка имеет вид системы *законов сохранения*, т. е. когда она может быть записана в форме

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}P^{ij}(x,\ u)=0,\qquad j=1,\ \ldots,\ k.$$

Тогда для поверхности C: $\varphi(x)=0$, на которой функция u испытывает разрыв, интерпретация этих законов в слабом смысле точно так же как в гл. V, § 9, дает *условия на ударной волне*

$$\sum(P^{ij}(u))\varphi_i=0\qquad(j=1,\ \ldots,\ k);$$

эти условия связывают между собой скачки функции u и уравнение поверхности C: $\varphi=0$; таким образом, *поверхность ударной волны* уже не является характеристикой.

Самый важный пример дают уравнения гидродинамики [1]), рассмотренные уже в гл. V для случая двух независимых переменных.

§ 5. Колеблющиеся начальные значения. Асимптотическое разложение решения. Переход к геометрической оптике.

1. Предварительные замечания. Бегущие волны высшего порядка. Применение метода § 4 к колеблющимся начальным значениям [2]) объясняет явление распространения волн по лучам в „геометрической

---

[1]) Подробный анализ см. в книге Куранта и Фридрихса [1], стр. 116—172.

[2]) См. П. Лакс [4].

оптике". Для быстрых колебаний этот метод дает асимптотическое решение задачи Коши с помощью только решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Представляется естественным построение решения в виде суперпозиции решений задачи Коши с разрывными начальными функциями, а именно, с функциями $\psi(x)=\delta(x-\xi)$, резко локализованными в точке $x=\xi$ (см. также § 15). Однако с тем же успехом можно было бы разложить начальные функции на плоские волны с помощью интеграла Фурье. В соответствии с этим сначала надо было бы найти колеблющиеся решения, а затем построить полное решение задачи Коши в виде их комбинации; этот метод аналогичен методу, который применялся в случае постоянных коэффициентов (см. гл. III, § 5).

В свете теории § 4 мы начнем с исследования „бегущих волн", записанных в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} T_j(\varphi(x,\ t))\, g^j(x,\ t), \tag{1}$$

где функции T_j как функции фазовой переменной $\varphi(x,\ t)$ не обязаны иметь особенностей и где $T_j'=T_{j-1}$. Как и в § 4, мы формально подставим выражение (1) в уравнение $L[u]=0$ и потребуем, чтобы все множители при T_{-1}, T_0, T_1, ... обращались в нуль. Очевидно, что полученные в результате этого соотношения для множителей g^i будут совпадать с соотношениями, полученными в § 4 для сингулярных функций $T_j=S_j$.

Применим комплексные обозначения и возьмем, в частности,

$$T_0(\varphi(x,\ t))=e^{i\xi\varphi(x,\ t)}, \qquad T_j=\frac{1}{(i\xi)^j}\, e^{i\xi\varphi(x,\ t)}$$

с большим параметром ξ.

2. Построение асимптотических решений. Независимо от замечаний, объясняющих, почему решение ищется в таком виде, мы теперь поставим себе целью построить асимптотические решения гиперболической системы

$$L[u]=u_t+\sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j}+Bu=u_t+N(u)=0 \tag{2}$$

в виде суммы k выражений вида [1])

$$U^{\varkappa}(x,\ t;\ \xi)=e^{i\xi\varphi^{\varkappa}(x,\ t)}\left\{u_0^{\varkappa}+\frac{u_1^{\varkappa}}{\xi}+\ \dots\ +\frac{u_\nu^{\varkappa}}{\xi^\nu}+\dots\right\}, \tag{3}$$

[1]) Отсутствие множителя $(i)^j$ в знаменателе несущественно.

где вектор-функции u_0, u_1, ..., u_ν не зависят от ξ и где предполагается, что выражение, взятое до члена u_ν/ξ^ν, дает остаток порядка $\xi^{-\nu-1}$.

Мы хотим решить задачу Коши с начальными данными

$$u(0, x) = e^{i\xi\varphi(x)}\psi(x),$$

поэтому мы положим $\varphi^\varkappa(x, 0) = \varphi(x)$; начальные данные для функций $U^\varkappa$ будут заданы позже.

Теперь в формуле (3) мы опустим индекс $\varkappa$ и будем исследовать структуру отдельного выражения вида (3). Подставим выражение (3) в уравнение $L[u] = 0$, обозначим единичную матрицу через I, введем характеристическую матрицу $A = I\varphi_t + \sum_{j=1}^{n} A^j\varphi_j$ и сразу получим, что

$$0 = e^{-i\xi\varphi(x, t)} L[u] = i\xi A \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u_\nu}{\xi^\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{L[u_\nu]}{\xi^\nu}.$$

Как и в § 4, последовательное сравнение коэффициентов при $\xi^{-\nu}$, $\nu = -1, 0, 1, \ldots$, в левой и правой части приводит к соотношениям

$$Au_0 = 0, \tag{5}$$

$$iAu_{\nu+1} + L[u_\nu] = 0 \text{ для } \nu = 0, 1, \ldots. \tag{6}$$

Для решения u уравнения (5) снова должно быть $Q = |A| = 0$. Следовательно, семейство $\varphi = \text{const} = c$ есть семейство характеристических многообразий с заданными начальными данными $\varphi(x, 0) = \varphi(x)$. Предположим, что ранг матрицы A равен $k - 1$ и обозначим правые и левые нуль-векторы A через r и l соответственно: $Ar = 0$, $lA = 0$. Тогда мы будем иметь соотношение

$$u_0 = \sigma r, \tag{7}$$

где σ — некоторый скаляр. Умножим уравнение (6) при $\nu = 0$ на l и получим для функции u_0, а следовательно, и для σ, соотношение

$$lL[u_0] = lL[\sigma r] = 0, \tag{8}$$

совпадающее с соотношением (11′) в § 4. Это соотношение позволяет определить σ из обыкновенного дифференциального уравнения вдоль лучей, принадлежащих характеристической поверхности $\varphi = \text{const}$, если известны начальные значения σ при $t = 0$.

Кроме того, если мы предположим, что функция u_0 известна, то уравнение (6) при $\nu = 0$ превращается в систему линейных уравнений

относительно компонент вектора u_1 с вырожденной матрицей A. Как и в § 4, отсюда следует, что

$$u_1 = \sigma^1 r + h^1, \tag{9}$$

где σ^1 — *скаляр, а* h^1 *выражается* через $L[u_0]$. Чтобы найти σ^1, мы умножим уравнение (6) для $\nu = 1$ на l и получим „уравнение переноса"

$$lL[u_1] = lL[r\sigma^1] + lL[h^1] = 0, \tag{10}$$

т. е. опять обыкновенное дифференциальное уравнение, на этот раз неоднородное, для скалярной величины σ^1 вдоль луча, принадлежащего характеристическому многообразию $\varphi = \mathrm{const}$.

Точно так же мы находим, что

$$u_j = \sigma^j r + h^j, \tag{11}$$

$$lL[u_j] = 0 \text{ или } lL[r\sigma^j] + lL[h^j] = 0, \tag{12}$$

где величина h^j известна, если известны $u_0, u_1, \ldots, u_{j-1}$, а они определяются из предыдущих дифференциальных уравнений для скаляров σ^j.

Положив

$$^J U = \alpha e^{i\xi\varphi(x,\,t)} \left\{ u_0 + \frac{u_1}{\xi} + \ldots + \frac{u_J}{\xi^J} \right\}, \tag{13}$$

мы будем иметь

$$L[^J U] = \alpha e^{i\xi\varphi(x,\,t)} \sum_{\nu=-1}^{J} (iAu_{\nu+1} + L[u_\nu]) \frac{1}{\xi^\nu} = \frac{P^J}{\xi^J}, \tag{14}$$

где P^J ограничены; это выражение порядка ξ^{-J} относительно ξ, т. е. мы получили асимптотическое выражение для U.

Возвращаясь к задаче Коши для системы (2), мы теперь заметим, что из гиперболичности системы (2) вытекает (см. § 3) следующее утверждение: из любого начального многообразия, принадлежащего семейству $\varphi(x) = c = \mathrm{const}$, выходит пучок k характеристических поверхностей $\varphi^\varkappa(x, t) = c$; все они соответствуют одинаковым начальным значениям $\varphi^\varkappa(x, 0) = \varphi(x)$; все эти функции $\varphi^\varkappa$ удовлетворяют характеристическому дифференциальному уравнению

$$Q = \left| \varphi_t I + \sum_{j=1}^{n} A^j \varphi_j \right| = 0.$$

Даже если некоторые из этих поверхностей совпадают, k левых нуль-векторов $l^1, l^2, \ldots, l^k$ и k правых нуль-векторов $r^1, r^2, \ldots, r^k$ образуют линейно независимые системы.

Для каждой из этих характеристических поверхностей $\varphi^\varkappa$ мы рассмотрим построенное выше асимптотическое решение $U^\varkappa$. Соответ-

ственно в формулах (7), (11) мы должны рассматривать k скалярных множителей σ, которые мы будем обозначать ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$, ..., ${}^k\sigma$, опуская индекс j функции u_j. Затем мы зададим начальные значения для компонент $u_0^\varkappa(x, 0)$, $u_j^\varkappa(x, 0)$ с помощью равенств

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} u_0^\varkappa(x, 0) = \psi(x), \tag{15}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} u_j^\varkappa(x, 0) = 0 \quad (j \geqslant 1), \tag{16}$$

где $\psi(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

В уравнения (15) и (16) мы подставим $u_0^\varkappa = {}^\varkappa\sigma^0 r^\varkappa$ и $u_j^\varkappa = {}^\varkappa\sigma^j r^\varkappa + {}^\varkappa h^j$ для $j \geqslant 1$ из формул (7) и (11) и рассмотрим эти соотношения при $t=0$. Из линейной независимости векторов $r^\varkappa$ следует, что для каждого j начальные значения k скаляров ${}^\varkappa\sigma^j$ определяются однозначно. Таким образом, решение задачи Коши для системы (2) с начальными значениями $u(x, 0) = e^{i\varphi(x)}\psi(x)$ строится как сумма k сумм вида (3).

Из того, что в силу соотношения (14) компоненты $U^\varkappa$ асимптотически выражаются через конечные степенные ряды относительно $1/\xi$ для ${}^J U^\varkappa$, мы можем сделать следующий вывод: выражение ${}^J U = \sum_{\varkappa=1}^{k} {}^J U^\varkappa$ является асимптотическим приближением для функции u, соответствующей начальным значениям $e^{i\varphi(x)}\psi(x)$. Действительно, из уравнения $L[u] = 0$, в силу формулы (14), для ${}^J V = {}^J U - u$ получаем, что

$$L[{}^J V] = \frac{P^J}{\xi^J},$$

и функция ${}^J V$ имеет нулевые начальные значения. Поэтому интегральное представление Дюамеля (см., например, § 10, п. 1) для функции ${}^J V$ показывает, что функция ${}^J V$ имеет порядок ξ^{-J} и наше разложение является асимптотическим.

Кроме того, справедливы аналогичные оценки асимптотических выражений для производных, порядок которых может быть выбран сколь угодно высоким, если начальные данные имеют достаточно большое число непрерывных производных.

Данное выше асимптотическое решение позволяет получить приближенное — часто очень точное — решение задачи Коши. Оно получается только с помощью решений обыкновенных дифференциальных уравнений, так как определение функций $\varphi^\varkappa$, так же как и последовательное вычисление u_0, u_1, ..., u_j, требует только реше-

ния обыкновенных дифференциальных уравнений и алгебраических уравнений.

3. Геометрическая оптика. Изложенная здесь асимптотическая теория геометрической оптики была построена Грином, Лиувиллем (1837), Зоммерфельдом и Рунге[1]).

Теперь мы в состоянии понять соотношение между *волновой оптикой*, которая описывается дифференциальным уравнением в частных производных (2), и *геометрической оптикой*, которая описывает явления распространения в терминах лучей. В оптике мы имеем дело с колебаниями высокой частоты; тогда точное решение дифференциального уравнения с частными производными в первом приближении дается первым членом его асимптотического разложения. Этот член, так же как и дальнейшие члены разложения, определяется с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль лучей. Естественно, что существует тесная связь между геометрической оптикой и разложениями § 4 и этого параграфа.

Обычно в оптике мы имеем дело не с задачей Коши, а со смешанными или краевыми задачами, в предположении, что зависимость решения и начальных данных от времени заключается только в наличии множителя $e^{i\omega t}$. Кроме того, предполагается, что коэффициенты дифференциального уравнения не зависят от времени. Рассмотрим систему первого порядка

$$L[u] \equiv u_t + M[u] \equiv u_t + \sum_{\nu=1}^{n} A^{\nu}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + B(x) u = 0. \qquad (17)$$

Мы можем разделить пространственные переменные и время и искать решение в виде

$$u(x, t) = e^{i\omega t} v(x).$$

Тогда функция $v(x)$ должна удовлетворять „приведенному уравнению"

$$M[v] + i\omega v = 0. \qquad (18)$$

С другой стороны, мы знаем, что уравнение (17) имеет решения вида

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(\varphi)\, g^j(x, t), \qquad (19)$$

где $T_j(\varphi) = e^{i\omega\varphi}/(i\omega)^j$. Ввиду того что коэффициенты дифференциального уравнения не зависят от t, мы рассмотрим такие решения,

[1]) Литературу см. в работах Келлера [1], Келлера, Льюиса и Секлера [1], Клайна [1], П. Лакса [4] и Люнебурга [2], [1].

для которых коэффициенты $g^j(x, t)$ не зависят от t. Если мы положим

$$\varphi(x, t) = t + \psi(x),$$

то будем иметь

$$u(x, t) = e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\psi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^j(x)}{(i\omega)^j};$$

следовательно,

$$v(x) = e^{i\omega\psi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^j(x)}{(i\omega)^j}. \tag{20}$$

Таким образом, метод, который мы применяем в этом параграфе, приводит нас к асимптотическому разложению для приведенного уравнения (18). Коэффициенты $g^j(x)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\left(I\varphi_t + \sum_{\nu=1}^{n} A^\nu \varphi_\nu\right) g^{j+1} + L(g^j) = 0 \qquad (j = -1, 0, \ldots), \tag{21}$$

или эквивалентным соотношениям

$$\left(I + \sum_{\nu=1}^{n} A^\nu \psi_\nu\right) g^{j+1} + Mg^j = 0 \qquad (j = -1, 0, \ldots).$$

Как мы видели выше в § 4 и в настоящем параграфе, уравнения (21) можно решить с помощью одних только обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль лучей. Следовательно, разложение (20) можно построить, решая только обыкновенные дифференциальные уравнения. Эти обыкновенные дифференциальные уравнения вдоль лучей являются уравнениями геометрической оптики.

Аналогичное соответствие существует между теорией § 4 и неоднородным приведенным уравнением (18). Рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv u_t + Mu = e^{i\omega t} f(x). \tag{22}$$

Если $u(t, x) = e^{i\omega t} v(x)$, то функция $v(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$Mv + i\omega v = f(x).$$

Мы определим функцию $w(x, t)$ с помощью следующих условий:

$$L[w] = 0 \quad \text{для} \quad t > 0,$$
$$w(x, 0) = f(x).$$

Применение принципа Дюамеля приводит тогда к формальному решению

$$v(x, \omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega s} w(x, s)\, ds. \tag{23}$$

Асимптотическое разложение для функции v при больших значениях ω определяется особенностями функции $w(x, t)$, которые зависят от особенностей $f(x)$; в соответствии с § 4 эти особенности распространяются по лучам. Таким образом, здесь, как и ранее, асимптотическое разложение функции $v(x)$, соответствующей геометрической оптике, определяется с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль лучей.

§ 6. Примеры теорем единственности и области зависимости для задачи Коши

Метод интегралов энергии впервые применил Заремба [1]. Он был снова открыт и обобщен Рубиновичем [1, 2], а также Фридрихсом и Г. Леви [1], и применен для исследования симметрических гиперболических систем. Многочисленные дальнейшие работы Фридрихса [2], а также Шаудера [4] окончательно показали, насколько мощным и гибким является этот метод[1]).

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые типичные примеры теорем единственности и области определенности решения задачи Коши сначала для уравнений второго порядка с тем, чтобы можно было лучше понять общую теорию § 8 (см. также гл. V, § 4).

Существование и единственность решения задачи Коши для произвольных начальных данных тесно связаны между собой (см. гл. III, § 6); эти вопросы будут рассматриваться в § 8, 9 и 10 с помощью некоторых квадратичных средних значений решений и их производных, т. е. с помощью так называемых „интегралов энергии". Решение задачи в точке P определяется однозначно, если данные Коши известны только в некоторой ограниченной „области зависимости", связанной с точкой P. Предметом § 6 и 7 является выяснение фактов, связанных с вопросами единственности и определенности.

1. Волновое уравнение. Для двумерного волнового уравнения

$$L[u] \equiv u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

можно привести доказательство теоремы единственности, которое несколько отличается от рассуждений гл. V. Пусть S — произвольная начальная поверхность $\varphi(x, y, t) = 0$ пространственного типа, т. е.

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0,$$

или

$$t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 > 0,$$

---

[1]) Очень сильные результаты с помощью интегралов энергии получены в работе Петровского [5]. — *Прим. ред.*

где x_ν, y_ν, t_ν обозначают компоненты единичного вектора нормали к поверхности, т. е.

$$x_\nu = \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}, \qquad y_\nu = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}, \qquad t_\nu = \frac{\varphi_t}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}.$$

Предположим, что решение дифференциального уравнения u обращается в нуль вместе со своими первыми производными в некоторой подобласти B' поверхности S. Мы утверждаем, что *функция u обращается в нуль во всех точках P, для которых характеристический конус, проходящий через P, пересекается с начальной поверхностью S внутри B'* (см. рис. 55). Мы обозначим

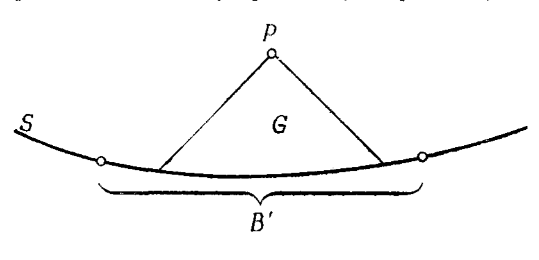


Рис. 55.

через G область, ограниченную куском поверхности B' и характеристическим конусом с вершиной в точке P. Характеристический конус в пространстве x, y, t — это конус, образующие которого наклонены к плоскости $t=0$ под углом в 45°, т. е. являются характеристическими лучами.

Доказательство основано на тождестве

$$2u_t L[u] \equiv -2(u_t u_x)_x - 2(u_t u_y)_y + (u_x^2)_t + (u_y^2)_t + (u_t^2)_t = 0, \qquad (2)$$

причем это тождество интегрируется по области G. Так как выражение (2) имеет вид дивергенции, то, применяя теорему Гаусса[1]) и подставляя начальные данные, мы получаем

$$0 = \iint_M \left(u_x^2 t_\nu + u_y^2 t_\nu + u_t^2 t_\nu - 2u_t u_x x_\nu - 2u_t u_y y_\nu\right) dS =$$
$$= \iint_M \frac{1}{t_\nu} \left[(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2 + (u_y t_\nu - u_t y_\nu)^2\right] dS,$$

где M — та часть поверхности конуса, которая является границей области G, dS — элемент поверхности на M; кроме того, принимается во внимание, что на M выполнено соотношение $t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 = 0$.

[1]) Здесь и в других местах книги теоремой или формулой Гаусса автор называет известную формулу Гаусса — Остроградского. — *Прим. ред.*

Следовательно, последний интеграл по поверхности конуса обращается в нуль; тогда подинтегральная функция также равна нулю. Другими словами, $u_x t_\nu - u_t x_\nu = 0$ и $u_y t_\nu - u_t y_\nu = 0$ всюду на M; таким образом, на M обращаются в нуль две линейно независимые внутренние производные функции u. Поэтому решение u постоянно на M и, следовательно, оно тождественно равно нулю в силу начальных условий. Из этого следует, что u обращается в нуль в точке P.

Одновременно это рассуждение позволяет найти для нашего дифференциального уравнения область зависимости в следующем смысле: *значение решения u в точке P с заданными на S начальными данными зависит только от начальных данных на той части поверхности S, которая вырезается направленной назад к S полостью характеристического конуса, проходящего через P.*

На вопрос о единственности и области зависимости в случае трех и большего числа независимых переменных можно также ответить, применяя данный в гл. V, § 4 метод к более общему дифференциальному уравнению $u_{tt} - \Delta u + a u_x + b u_y + c u_t + d u = 0$, где коэффициенты a, b, c, d — произвольные непрерывные функции t и пространственных переменных (см. общую теорию в § 8).

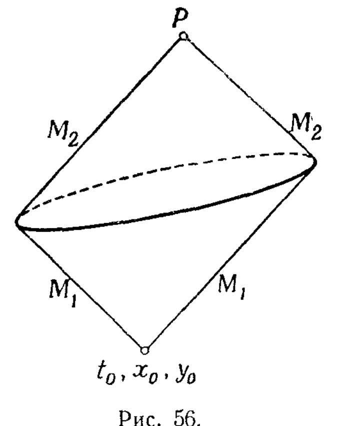


Рис. 56.

Затем мы докажем *единственность для „характеристической задачи Коши“ для волнового уравнения.* Здесь начальные данные уже не задаются на начальном многообразии пространственного типа, для которого $\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0$; теперь они задаются на некотором специальном характеристическом многообразии, а именно, на половине характеристического конуса K:

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0 \quad (t \geqslant t_0). \quad (3)$$

Согласно полученным ранее результатам, мы уже не можем произвольным образом задавать функцию u и некоторую выводящую производную (т. е. все производные); мы можем задавать только значения самой функции u. Мы предположим, что начальные значения функции u задаются как значения, которые на поверхности конуса принимает некоторая функция, непрерывно дифференцируемая в окрестности конуса, содержащей его вершину. Тогда справедливо следующее утверждение: *значения функции u на половине конуса K, определенной уравнениями* (3), *однозначно определяют функцию u всюду внутри этой половины конуса*, т. е.

для x, y, t, таких, что

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2>0, \quad t>t_0$$

(см. рис. 56). Доказательство получается из установленных выше формул. Предположим, что заданные на характеристическом конусе начальные значения решения u равны нулю, и проинтегрируем выражение (2) по области G, ограниченной этим конусом и характеристическим конусом, проходящим через точку P. Если M_1 и M_2 — соответствующие части этих конических поверхностей, то мы сразу получим в прежних обозначениях

$$\iint\limits_{M_2} \frac{1}{t_\nu}[(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2+(u_y t_\nu - u_t y_\nu)^2]\,dS=0.$$

Интеграл по нижнему конусу обращается в нуль, так как в подинтегральную функцию входят только внутренние производные функции u на этом конусе, а они по предположению все равны нулю. Следовательно, две независимые внутренние производные $u_x t_\nu - u_t x_\nu$, $u_y t_\nu - u_t y_\nu$ также равны нулю на характеристическом конусе, проходящем через P. Другими словами, на поверхности этого конуса решение u постоянно и, следовательно, равно нулю, так как u обращается в нуль на пересечении двух конических поверхностей.

2. Дифференциальное уравнение $u_{tt}-\Delta u-\frac{\lambda}{t}u_t=0$ (уравнение Дарбу) [1]. Другой вариант метода применяется к дифференциальному уравнению

$$L[u]\equiv u_{tt}+\frac{\lambda}{t}u_t-\Delta u=0, \tag{4}$$

так называемому уравнению Дарбу, которое содержит сингулярный член. Здесь λ — произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция переменных x_i и t. Характеристическое уравнение снова имеет вид

$$\varphi_t^2-\varphi_{x_1}^2-\varphi_{x_2}^2-\ldots-\varphi_{x_n}^2=0 \tag{5}$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{\partial\nu}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\nu}\right)^2=0, \tag{5'}$$

и характеристические конусы $\varphi(x,\ t)=(t-\tau)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2=0$ такие же, как в п. 1. Мы покажем следующее: *если дважды непрерывно дифференцируемое решение u уравнения* (4) *и его производная u_t обращаются в нуль при $t=0$ на основании B характеристического конуса с вершиной в точке $P(t>0)$, то*

[1] См. § 13.

функция и равна нулю в точке P и всюду во внутренности конуса G.

Доказательство. Мы имеем

$$0 = -2u_t L[u] \equiv 2\sum_{i=1}^{n} (u_t u_{x_i})_{x_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2\right)_t - \frac{2\lambda}{t} u_t^2.$$

Поэтому, если мы проинтегрируем это соотношение по области G (элемент объема обозначается через dv), принимая во внимание начальные данные на B, и применим теорему Гаусса к дивергенции, стоящей в правой части, то получим

$$0 = \iiint\limits_G \frac{2\lambda}{t} u_t^2\, dv + \iint\limits_M \left[-2u_t \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \nu} + \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\right) \frac{\partial t}{\partial \nu}\right] dS,$$

где M обозначает поверхность конуса, а dS — элемент поверхности на M. Подинтегральная функция в интеграле, который берется по M, в силу того, что на M выполняется характеристическое соотношение (5′), может быть записана в виде

$$\frac{1}{t_\nu} \sum_{i=1}^{n} \left(u_{x_i} \frac{\partial t}{\partial \nu} - u_t \frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2.$$

Так как $\lambda > 0$, немедленно получается, что $u_t = 0$ всюду в G. Таким образом, как мы и утверждали, функция u тождественно равна нулю в G.

3. Уравнения Максвелла в вакууме. В качестве примера системы дифференциальных уравнений с четырьмя независимыми переменными мы рассмотрим систему уравнений Максвелла[1]) (см. гл. III, § 2), считая скорость света c равной единице:

$$\mathfrak{E}_t - \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{H}_t + \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0. \tag{6}$$

Для этой системы дифференциальных уравнений мы рассмотрим задачу Коши, считая, что начальные данные для векторов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ заданы при $t = 0$.

Нашей целью является доказательство следующего утверждения: *если начальные значения для $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ обращаются в нуль, то векторы $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ равны нулю тождественно.* Данное ниже доказательство единственности (так же как аналогичное доказательство

---

[1]) К уравнениям Максвелла добавляются соотношения

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

На основании уравнений (6) легко показать, что эти соотношения выполняются всюду, если они выполняются в начальном пространстве $t = 0$. Таким образом, они имеют характер начальных условий.

для дифференциальных уравнений кристаллооптики) становится гораздо более ясным, если рассматривать его как частный случай более общего результата, доказанного в § 8. Тем не менее, поскольку исторически доказательство в этом частном случае послужило стимулом к развитию общей теории, оно будет дано здесь.

Каждой точке P в четырехмерном пространстве x, y, z, t соответствует характеристический конус G, который высекает на начальной плоскости $t=0$ трехмерный шар B. С помощью плоскости $t=h$, параллельной начальной плоскости, мы построим усеченный конус G_h, ограниченный шаром B, частью M_h конуса G и шаром D_h, который конус G высекает в плоскости $t=h$ (см. рис. 57).

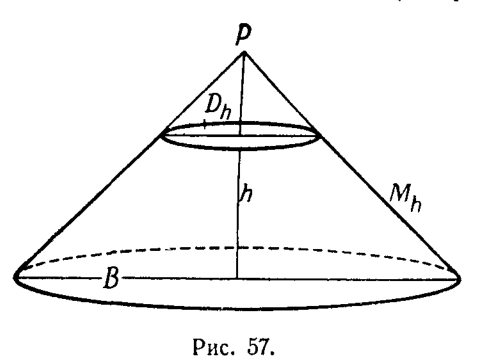


Рис. 57.

Из уравнений Максвелла в силу векторного соотношения $\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{E}-\mathfrak{E}\operatorname{rot}\mathfrak{H}=\operatorname{div}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]$ следует, что

$$0=2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}_t-\operatorname{rot}\mathfrak{H})+2\mathfrak{H}(\mathfrak{H}_t+\operatorname{rot}\mathfrak{E})=(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)_t+2\operatorname{div}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}].$$

Теперь мы проинтегрируем это соотношение по G_h сначала только по x, y, z, считая t фиксированным, а затем по t от 0 до h.

Принимая во внимание начальные условия $\mathfrak{E}=\mathfrak{H}=0$ при $t=0$, мы сразу получим

$$\iiint\limits_{M_h}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\,t_\nu\,dS+2\iiint\limits_{M_h}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]\,\underline{r}_\nu\,dS+$$
$$+\iiint\limits_{D_h}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\,dx\,dy\,dz=0, \qquad (7)$$

где $\underline{r}_\nu$ — вектор нормали к сфере радиуса t с центром в точке проекции P в трехмерное пространство x, y, z; $t_\nu=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ — компонента нормали к поверхности M_h в направлении оси t.

В силу того что на M_h выполняется характеристическое соотношение $t_\nu^2 = \underline{r}_\nu^2$, мы имеем на M_h

$$(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\,t_\nu^2+2t_\nu \underline{r}_\nu[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]=\mathfrak{E}^2t_\nu^2+2\mathfrak{E}\,[\mathfrak{H}\times \underline{r}_\nu]\,t_\nu+\mathfrak{H}^2\underline{r}_\nu^2.$$

Так как $[\mathfrak{H}\times\underline{r}_\nu]^2=\mathfrak{H}^2\underline{r}_\nu^2-(\mathfrak{H}\cdot\underline{r}_\nu)^2$, правая часть равна

$$(\mathfrak{E}t_\nu+[\mathfrak{H}\times\underline{r}_\nu])^2+(\mathfrak{H}\underline{r}_\nu)^2.$$

Из формулы (7) вытекает, что

$$0=\iiint\limits_{D_h}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\,dx\,dy\,dz+ \\ +\iiint\limits_{M_h}\frac{1}{t_\nu}\,\{(\mathfrak{E}t_\nu+[\mathfrak{H}\times\underline{r}_\nu])^2+(\mathfrak{H}\cdot\underline{r}_\nu)^2\}\,dS,$$

откуда следует, что $\mathfrak{E}=\mathfrak{H}=0$ на D_h, а, следовательно, и всюду внутри G, что и требовалось доказать.

Для дифференциальных уравнений кристаллооптики (7) из § 3а можно было бы аналогично доказать теорему единственности и найти область зависимости; однако мы не будем делать этого и сошлемся на общую теорию § 8.

§ 7. Области зависимости для гиперболических задач

1. Введение. Как указывалось в примерах § 6, важной чертой задачи Коши для однородных гиперболических уравнений является следующее: решение $u(P)$ в точке P однозначно определяется данными Коши только в некоторой ограниченной области $\Gamma=\Gamma_P$, соответствующей точке P. Данные Коши вне этой области не влияют на значение $u(P)$. Соответственно $u(P)=0$, если данные Коши в области Γ_P обращаются в нуль. Это свойство соответствует тому факту, что гиперболические задачи связаны с распространением волн с конечной скоростью.

Очевидно, что существование таких *областей зависимости* Γ_P доказывается с помощью теорем единственности, связывающих $u(P)$ и начальные данные на Γ_P. Мы получим и сформулируем такие теоремы в § 8. В настоящем параграфе мы ограничимся геометрическим описанием областей зависимости Γ_P.

Попутно мы заметим, что понятие области зависимости влечет за собой понятие *области влияния* для некоторой начальной области D. Это множество точек P, для которых области зависимости имеют общие точки с D. С физической точки зрения, начальные данные в области D не влияют на явления, происходящие вне области влияния I_D, т. е. среда вне I_D „не знает“, каково начальное состояние в D.

Заранее надо указать на некоторую неопределенность понятия области зависимости. Утверждение „Γ_P является областью зависимости для $u(P)$“ имеет негативный характер; утверждается только, что данные вне Γ_P *не влияют* на значение $u(P)$. Любая область Γ^*, заключающая Γ_P, попадает в тот же класс. Поэтому было бы разумно определить *область зависимости в точном смысле* как *наименьшее* множество точек Γ, такое, что $u(P)$ однозначно определяется начальными значениями на Γ. Но в общем случае эту область Γ трудно охарактеризовать. Она может быть областью в пространстве x, содержащей лакуны[1]); в других случаях она может состоять только из границ таких областей (см. дальнейшие исследования, касающиеся принципа Гюйгенса). Поэтому мы стараемся найти некоторый компромисс, считая по определению область зависимости Γ настолько малой, насколько это можно сделать с помощью удобного и естественного геометрического описания, не ставя себе целью обязательно найти наилучшее точечное множество Γ. Такие описания будут даны в следующем пункте.

2. Описание области зависимости. Мы снова выделим время $t = x_0$ и будем обозначать совокупность пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$ через x; предполагается, что пространство x пространственного типа и что t есть настоящая временная переменная. Мы будем рассматривать следующие тесно связанные между собой понятия: область зависимости Γ_P и выпуклую оболочку коноида лучей, или внешний сферический фронт волны с центром в точке P, обозначенный Γ в § 3. Такой коноид, проведенный из точки P в сторону убывающих значений времени, называется „обратным коноидом зависимости“; коноид, проведенный в сторону возрастающих значений t, называется „прямым“. Если уравнение неоднородное, то область зависимости состоит из всех точек $(n+1)$-мерного пространства x, t, лежащих внутри Γ и на Γ между точкой P и начальным многообразием. Если уравнение однородное, то область зависимости состоит только из точек внутри Γ и на Γ, лежащих на начальном многообразии. Мы позволим себе снова обозначать область зависимости через Γ_P, или, для однородного случая, через γ_P.

Повторяя и дополняя определения, данные в § 3, мы рассмотрим сначала операторы $L[u]$, главные части которых имеют постоянные коэффициенты. Из гиперболичности оператора $L[u]$ следует тогда, что „сердцевина“ конуса нормалей выпукла (см. § 3, п. 7). Двойственный для нее конус Γ также будет выпуклым; в каждой точке Γ нормали принадлежат сердцевине конуса нормалей. Следовательно,

---

[1]) Возможность существования таких лакун видна на примере упругих волн (см. § 13а)) или уравнений кристаллооптики. Глубокое исследование этого явления принадлежит Петровскому [3].

элементы поверхности Γ отделяют элементы пространственного типа от всех остальных. Как было указано выше, поверхность $\Gamma = \Gamma_P$ по определению есть коноид зависимости.

Мы можем также определить Γ_P следующим образом: пусть точка P имеет координаты $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Для любого α рассмотрим характеристическую плоскость

$$v(t-\tau)-\alpha\cdot(x-\xi)=0,$$

для которой скорость v максимальная. Γ_P есть пересечение всех полупространств $v(t-\tau)-\alpha\cdot(x-\xi)\leqslant 0$, т. е. множество точек, общих для всех этих полупространств; α пробегает единичную сферу.

Для непостоянных коэффициентов определение аналогично: через линейное многообразие $(\alpha x)=0$ или $(\alpha(x-\xi))=0$ в плоскости $t=\tau$ пространственного типа в направлении $t<\tau$ мы проведем характеристические поверхности „типа плоскостей“. Одна из них, для которой „отрицательные“ направления нормалей идут по границе сердцевины конуса нормалей, отделяет элементы пространственного типа от всех остальных и соответствует наибольшей локальной скорости в точке P. Тогда Γ_P есть пересечение соответствующих полупространств, причем α пробегает всю единичную сферу. И здесь Γ_P можно рассматривать как выпуклую оболочку обратного коноида лучей, проходящего через точку P.

Определение направлений „временнóго типа“, данное в § 3, п. 7, немедленно приводит к следующему утверждению: *внутренность коноида зависимости Γ_P есть множество точек, которые можно соединить с точкой P кривыми, всюду имеющими направление временнóго типа.*

В следующем параграфе мы ограничимся *симметрическими гиперболическими операторами* первого порядка

$$L[u]=u_t+\sum_{i=1}^{n}A^i u_i+Bu=u_t+Mu. \tag{1}$$

Тогда плоскости $t=\text{const}$ — пространственного типа. Поверхности R_τ, состоящие из куска плоскости $t=\tau$, лежащего внутри коноида, и из куска полости R_τ^* коноида Γ, лежащего между плоскостями $t=0$ и $t=\tau$ $(0\leqslant t\leqslant\tau)$, образуют „линзу пространственного типа“ L_τ. Если $t=\tau$ есть временнáя координата точки P, то эта линза совпадает с внутренностью коноида для $0\leqslant t\leqslant\tau$.

Если уравнение $\varphi(t, x)=0$ задает границу линзы L_τ, то характеристическая форма $A=I\varphi_t+\sum_{i=1}^{n}A^i\varphi_i$ просто совпадает с единичной

матрицей I при $t=0$ и $t=\tau$, и *характеристическая матрица A неотрицательна на конической части поверхности R_τ^** [1]).

Действительно, на характеристической поверхности „типа плоскости", соответствующей максимальной скорости, характеристическая матрица неотрицательна. Так как любая точка границы Γ_P является точкой касания с такой характеристической поверхностью, характеристическая матрица будет неотрицательной на границе Γ_P. Следовательно, для поверхности, элементы которой лежат как раз на границе между элементами пространственного и не пространственного типа, матрица обязательно будет неотрицательной.

Конечно, понятия области зависимости и области влияния точно так же применимы к любому более общему точечному множеству II, например к некоторой области плоскости $t=\text{const}>0$. Область зависимости C_{II} является тогда замыканием множества всех точек, таких, что $t\geqslant 0$, которые могут быть соединены с точками области II с помощью кривых временно́го типа.

Как мы подчеркивали выше, понятие области зависимости Γ_P не совсем точно, так как область Γ_P всегда может быть заменена более широкой областью $\overline{\Gamma}_P$, содержащей Γ_P. В частности, мы можем рассматривать „тетраэдральную" область $\overline{\Gamma}_P$, ограниченную тремя характеристическими поверхностями „типа плоскостей", проходящими через P и соответствующими максимальной скорости. Тогда Γ_P есть область, общая для всех таких „тетраэдральных" областей $\overline{\Gamma}_P$.

Снова заметим, что оправдание введения понятий, которые рассматривались в этом параграфе, неявно содержится в приведенном ниже доказательстве теоремы существования и единственности [2]).

§ 8. Интегралы энергии и теоремы единственности для линейных симметрических гиперболических систем первого порядка

1. Интегралы энергии и единственность решения задачи Коши. В этом параграфе мы ограничимся линейными симметрическими

[1]) Часть R^* является поверхностью „слабо пространственного типа"; иногда мы будем называть ее поверхностью пространственного типа. Основное состоит в том, что на R^* выполняется неравенство $A\geqslant 0$.

[2]) Частные случаи, допускающие явное решение, показывают, что не всегда необходимо заменять коноид лучей его выпуклой оболочкой. Например, пусть $n=2$, $k=2$, $L_1=D_0^2-D_1^2-4D_2^2$, $L_2=D_0^2-4D_1^2-D_2^2$. Поверхность лучей на плоскости x, y тогда состоит из двух пересекающихся эллипсов. Система $L_1[u_1]=0$, $L_2[u_2]=0$, очевидно, имеет единственное решение, если начальные данные для каждой из функций u_1 и u_2 заданы на одном из этих эллипсов; здесь нет необходимости рассматривать выпуклую оболочку. Но если два уравнения связаны через члены порядка, ниже второго, содержащие и u_1, и u_2, то поверхность лучей не изменится, а данные надо будет задавать на выпуклой оболочке.

гиперболическими системами первого порядка, которые уже рассматривались раньше (см., например, § 3, п. 8 и стр. 587).

Они имеют вид

$$L[u]=\sum_{i=0}^{n} A^i u_i + Bu = 0, \qquad (1)$$

где все матрицы A^i симметричны, а B не обязана быть симметричной.

Согласно § 3, п. 7, поверхность S: $\varphi(x)=0$ является поверхностью пространственного типа для оператора L, если на S характеристическая матрица

$$A = A^i \varphi_i$$

положительно определенна. Мы предположим, что система (1) гиперболическая, т. е. что для нее существуют поверхности пространственного типа. Без ограничения общности мы опять можем предположить, что плоскости $x_0=t=\text{const}$ являются поверхностями пространственного типа, т. е. что матрица A^0 положительно определенная.

Рассуждения этого параграфа основаны на формуле Гаусса, которая непосредственно вытекает из следующего „дивергентного" представления для $uL[u]$:

$$2uL[u]=(u,\ A^j u)_j + 2(u,\ \widehat{B}u)=0, \qquad (2)$$

где

$$\widehat{B}=B-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} A^j_j. \qquad (3)$$

С помощью простой замены переменных мы всегда можем преобразовать L в такой оператор, для которого форма $(u,\ \widehat{B}u)$ положительно определенна. Мы введем вместо u функцию

$$v=e^{-\mu x_0}u \qquad (4)$$

с положительной постоянной μ. Отсюда получается, что $L[u]=$ $=e^{\mu x_0}\{L[v]+\mu A^0 v\}=0$ и, следовательно,

$$\sum A^j v_j + B^* v = 0, \qquad (1a)$$

где

$$B^*=\widehat{B}+\mu A^0. \qquad (5)$$

Так как, по предположению, матрица A^0 положительно определенна, то квадратичная форма $(u,\ B^*u)$ также будет положительно определенной в любой заданной области, если постоянная μ выбрана достаточно большой. В частности, мы можем считать, что

$$(u,\ u)\leqslant 2(u,\ B^*u). \qquad (6)$$

Пусть D — область, имеющая форму линзы, описанная в § 7, т. е. область, ограниченная двумя поверхностями S_0 и S, причем обе они пространственного типа и соединены по их общей границе. Тогда справедлива следующая *теорема единственности*[1]): ***если решение и равно нулю на S_0, то оно обращается в нуль на любой поверхности S, которая образует с S_0 линзу пространственного типа.***

Доказательство сразу получается с помощью интегрирования равенства (2) по линзе D. Полученная таким образом формула Гаусса имеет вид

$$0 = \int_S (u, Au)\,dS - \int_{S_0} (u, Au)\,dS + \iint_D (u, \widehat{B}u)\,dx,$$

где dS обозначает элемент поверхности, $dx = dx_0\,dx_1\,dx_2\,\ldots$ обозначает элемент объема, A — характеристическая матрица на границе. Так как обе формы (u, Au) и $(u, \widehat{B}u)$ положительно определенные, отсюда следует, что u обращается в нуль на D.

Заметим, что в этом доказательстве мы пользовались тем, что S — пространственного типа, но не пользовались пространственным характером S_0.

Если B тождественно обращается в нуль, то оператор L называется *консервативным*. В этом случае „энергия“

$$\int (u, Au)\,dS$$

одинакова на поверхностях S_0 и S; этот факт можно интерпретировать как „сохранение энергии“, что оправдывает название „интеграл энергии“.

2. Интегралы энергии первого и высших порядков. Мы будем выделять в качестве особой переменной время $x_0 = t$ и, как и ранее, предположим, что гиперплоскость $t = \text{const}$ — пространственного типа. В соответствии с § 3, можно ввести такие новые неизвестные функции u, что дифференциальное уравнение примет более простой вид

$$L[u] = u_t + \sum_1^n A^i u_{x^i} + Bu = 0, \tag{1б}$$

где матрицы A^i по-прежнему симметричны.

Мы рассмотрим специальные линзообразные области, или, точнее, однопараметрические семейства линзообразных областей, построенных

---

[1]) Читатель может сравнить последующие рассуждения с доказательством теоремы Хольмгрена в гл. III, приложение 2. Доказательство теоремы Хольмгрена основано на существовании решения задачи Коши для сопряженного дифференциального уравнения, но в нем не используется ни симметричность, ни гиперболичность.

следующим образом. Пусть P — точка в пространстве t, x с положительным t. Пусть Γ_P — обратный коноид зависимости для точки P (см. § 7). Обозначим через R_h пересечение Γ_P с гиперплоскостью $t=h$. Теперь рассмотрим линзообразную область, ограниченную поверхностями $S_0=R_0$ и $S_1=R_h+M_h$, где M_h — часть поверхности (полости) коноида, заключенная между гиперплоскостями $t=0$ и $t=h$. Как мы видели в § 7, M_h — поверхность „слабо" пространственного типа, т. е. форма (u, Au) неотрицательна на M_h. Так как поверхности R_0 и R_h пространственного типа, то справедлива следующая сформулированная ранее теорема единственности.

Если функция u удовлетворяет уравнению $L[u]=0$ внутри Γ_P и обращается в нуль на R_0, то и обращается в нуль всюду в Γ_P.

Из этого результата получается следующий важный факт.

Значение функции u в точке P однозначно определяется значениями $L[u]=f$ в Γ_P и данными Коши на R_0; следовательно на значения u в точке P не влияют данные задачи вне Γ_P.

Этот факт, конечно, оправдывает название „коноид зависимости" для области Γ_P.

Если мы введем обозначение [1])

$$\|u(h)\| = \left\{ \int_{R_h} u^2(x, h)\,dx \right\}^{1/2}, \tag{7}$$

то из доказательства теоремы единственности, данного в предыдущем пункте, в предположении, что $(u, \hat{B}u) \geqslant 0$, следует *энергетическое неравенство*

$$\|u(h)\| \leqslant \|u(0)\|. \tag{8}$$

Аналогичные неравенства справедливы для *интегралов энергии* $\|u(h)\|_r$ порядка r, которые определяются следующим образом:

$$\|u(h)\|_r^2 = \int_{R(h)} \sum_{|p| \leqslant r} |D^p u|^2\,dx, \tag{9}$$

причем суммирование в правой части распространяется на все частные производные $D^p u$ порядка $|p| \leqslant r$ по переменным x (множество всех этих частных производных мы будем обозначать вектором V).

Энергетическое неравенство порядка r имеет вид

$$\|u(h)\|_r \leqslant c\,\|u(0)\|_r. \tag{10}$$

---

[1]) Введенное здесь обозначение отличается от того, которое применялось для «максимум-нормы» $\|u\| = \max|u|$ в гл. V, § 6 и 7.

Здесь c — постоянная, зависящая от максимумов модулей коэффициентов оператора L и производных этих коэффициентов до порядка r включительно. (Всегда предполагается, что произведена замена (4) с экспоненциальным множителем, содержащим достаточно большую постоянную μ.)

Доказываются эти неравенства так же, как обычное энергетическое неравенство (8). Надо только применить те же самые рассуждения к системе дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет вектор V; эта система получается дифференцированием $L[u]=0$ по переменным x. Таким образом мы получим систему уравнений вида $L[V]+MV=0$; здесь один и тот же оператор L применяется к каждой отдельной производной $D^l u$, а MV обозначает линейную комбинацию всех компонент V. Дифференциальное уравнение (1б) и уравнения, полученные из него дифференцированием по t и x, позволяют выразить все производные функции u порядка r через производные u по переменным x порядка $r' \leqslant r$. Сопоставляя это с энергетическими неравенствами высших порядков (10), мы получим

$$\|u(h)\|_r^* \leqslant c' \, \|u(0)\|_r, \tag{11}$$

$$\|u(h)\|_r^{*2} = \int\limits_{R_h} \sum_{|p| \leqslant r} |D^p u|^2 \, dx, \tag{9'}$$

причем суммирование теперь распространяется на *все* частные производные функции $u(x, t)$ порядка $r' \leqslant r$, а не только на производные по переменным x.

Наконец, *для решений неоднородного уравнения* $L[u]=f$ *справедливо следующее энергетическое неравенство*:

$$\|u(h)\|^2 \leqslant 2\,\|u(0)\|^2 + \int\limits_0^h \|f(t)\|^2 \, dt, \tag{12}$$

где

$$\|f(t)\|^2 = \int\limits_{R(t)} f^2(x, t)\, dx.$$

Чтобы доказать неравенство (12), мы воспользуемся тождеством (2) неравенством

$$2uf \leqslant u^2 + f^2$$

и применим неравенство (6):

$$2(u, \hat{B}u) - u^2 \geqslant 0.$$

Следующий аналогичный результат справедлив относительно интегралов энергии высших порядков:

$$\|u(h)\|_r^2 \leqslant c\,\|u(0)\|_r^2 + c\int_0^h \|f(t)\|_r^2\,dt. \tag{12a}$$

Как будет показано ниже, все эти неравенства имеют важное значение для построения и исследования решений, а не только для доказательства единственности.

3. Энергетические неравенства для смешанных задач. Интегралы энергии из п. 2 позволяют нам немедленно распространить доказательства единственности на некоторые важные классы задач, а именно на смешанные задачи для симметрических, но не обязательно гиперболических уравнений, содержащие начальные и граничные условия (см. гл. V, § 6). В этом пункте мы кратко укажем, как можно осуществить такое обобщение [1]). Мы ограничимся гиперболическими смешанными задачами и даже такими *смешанными задачами, содержащими начальные и граничные условия*, в которых выделена временна́я переменная $t = x_0$ и предполагается, что дифференциальные уравнения имеют вид (1б). Такие задачи состоят в том, чтобы найти решение u уравнения (1б), определенное для всех x в заданной области пространства G и для всех положительных t, когда в G заданы начальные условия $u(x, 0)$; кроме того, решение u должно удовлетворять некоторым условиям на границе S области G (см. также гл. V, § 6, п. 4). Мы предположим, что эти граничные условия — линейные однородные соотношения между компонентами u на S. Они могут изменяться от точки к точке границы S и зависеть от времени t. Физически они могут иметь смысл ограничений, наложенных на систему, когда ее рассматривают только в области G (например, кинематические условия); или же они могут выражать взаимодействие между системой и внешними факторами, ограничивающими систему, например отражение, преломление, закрепление, затухание, остывание, испарение, излучение и т. д.

Наши рассуждения будут касаться только единственности; общие доказательства теорем существования для смешанных задач остаются за пределами этой книги, хотя соответствующие теоремы для задачи Коши приведены в § 10 (см., однако, гл. V, § 6, п. 4 и приложение для случая двух независимых переменных).

---

[1]) Сошлемся на статью Фридрихса [3], в которой рассматриваются вопросы существования и единственности для симметрических систем, не обязательно гиперболических. См. также работу П. Лакса и Филлипса [1] и Даффа [3].

Мы позволим себе обозначать через S: $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ либо границу области G, либо вертикальную часть границы цилиндра Z, перпендикулярного $t=0$, построенного над границей G. На S характеристическая матрица $A=\sum_{i=0}^{k} \xi_i A^i$ просто равна

$$A=\sum_{i=1}^{k} \xi_i A^i \qquad (\xi_i=\gamma_{x_i}),$$

так как компонента нормали к Z по направлению оси t обращается в нуль.

Основная цель этого пункта состоит в том, чтобы сформулировать соответствующие граничные условия на Z (или S) при $t>0$, которые вместе с данными Коши на G гарантируют единственность решения и в то же время таковы, что можно ожидать и существования решения.

Соответствующие граничные условия, так же как и в гл. V, § 6, п. 4, выражаются следующим образом: в каждой точке x, t на боковой поверхности S цилиндра Z вектор $u(x, t)$ принадлежит некоторому линейному пространству N размерности $r=k-p$, определенному p линейными однородными соотношениями

$$(u, m^j)=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, p), \tag{13}$$

где m^j — линейно независимые векторы. На пространство N налагается следующее ограничение: для векторов u, принадлежащих N, *квадратичная форма*

$$Q(u, u)=(u, Au)$$

неотрицательна на Z.

Обоснование таких граничных условий дает применение формулы Гаусса к соотношению (2)

$$\iiint\limits_D (u, \hat{B}u)\,dt\,dx+\iint\limits_S (u, Au)\,dS=0,$$

где $A=\sum_{i=0}^{n} A^i \varphi_i$ — характеристическая матрица на поверхности, ограничивающей D. Если $(u, \hat{B}u)$ — положительно определенная форма, то эта формула обеспечивает единственность решения уравнения (1) в D, если из заданных граничных условий следует неотрицательность формы $(u, Au)=Q(u)$ в каждой точке поверхности S. Интересно отметить, что это замечание справедливо независимо от того, является ли система (1) гиперболической.

В частности, если мы выберем в качестве D цилиндрическую область над G между гиперплоскостями $t=0$ и $t=\tau$, то для решения уравнения (1б) мы получим

$$\int_G (u,\ u)\,dx \Big|_{t=0}^{t=\tau} + \int_0^\tau \int_S (u,\ Au)\,ds\,dt + \int_D \int (u,\ \widehat{B}u)\,dx\,dt = 0. \quad (14)$$

Тогда из граничных условий для u, несомненно, следует единственность решения смешанной задачи так же, как это получалось в п. 1 для задачи Коши. Это замечание является главным в настоящем пункте. Однако мы хотим добавить несколько замечаний, чтобы внести бóльшую ясность и получить удобный для применения критерий единственности.

Во-первых, для заданной матрицы A пространство N можно выбирать различными способами. Например, в простом случае, когда $k=2$, а $(u,\ Au)=u_1^2-u_2^2$, любое линейное пространство, заданное соотношением $u_2-\sigma u_1=0$ с $|\sigma|<1$, очевидно, удовлетворяет условию определенности.

Во-вторых, если задано слишком много граничных условий, то мы не можем ожидать, что решение будет существовать (например, в случае, когда меньшее число граничных условий все еще гарантирует единственность). Так как граничное пространство N тем шире, чем меньше граничных условий мы налагаем, то мы приходим к рассмотрению следующего понятия, тесно связанного с требованием существования: *граничное пространство N должно быть максимальным неотрицательным, т. е. его нельзя расширить до большего линейного пространства, на котором квадратичная форма $(u,\ Au)$ все еще всюду неотрицательна.*

Хотя мы не будем доказывать существования, мы потребуем, чтобы пространство N было *максимальным.*

Самый важный вопрос, касающийся N, таков: какова размерность пространства N, т. е. сколько линейно независимых условий (13) всегда определяют максимальное неотрицательное пространство N?

Предположим для простоты, что цилиндр Z нигде не имеет характеристического направления, т. е. на нем не обращается в нуль ни одно собственное значение матрицы A [1]). Тогда мы утверждаем следующее: *число измерений r максимального неотрицательного пространства N равно числу положительных собственных значений матрицы A.* Число r и число $p=k-r$ условий вида $(u,\ m^j)=0$, налагаемых на функцию u, не зависят от конкретного выбора максимального пространства N (для случая двух переменных см. гл. V, § 6).

---

[1]) Легко видеть, что это удобное предположение несущественно.

Критерий, который дает эта теорема, часто можно непосредственно применять.

Доказательство опирается на тот факт, что в d-мерном линейном пространстве k-мерных векторов (т. е. векторов с k компонентами) всегда можно найти не равный нулю вектор u, который удовлетворяет s линейным однородным условиям, если только $d+s<k$.

Рассмотрим теперь полное множество нормированных собственных векторов $u_1, \ldots, u_k$ матрицы A, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Предположим, что первые собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ положительны, а остальные отрицательны. Если

$$u=\alpha_i u_i,$$

то

$$(u, Au)=\alpha_i^2\lambda_i.$$

Сначала мы покажем, что $\dim N \leqslant r$. Действительно, если бы пространство N имело более r измерений, то мы могли бы найти в N вектор u, такой, чтобы выполнялись r условий ортогональности $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=0$ и, следовательно, было бы $(u, Au)= \sum_{i=r+1}^{k} \alpha_i^2\lambda_i<0$, что противоречит предположению о положительности матрицы A для всех u из N.

Затем мы покажем, что пространство N не является максимальным, если $d=\dim N<r$.

Действительно, наложим на вектор u условия

$$(u, Av)=0 \quad \text{для всех } v \text{ из } N$$

и

$$(u, u_i)=0 \quad \text{для } i=r+1, \ldots, k;$$

эти условия представляют собой $d+k-r$ линейных однородных уравнений для вектора u, и, так как $d+k-r$ меньше, чем k, существует отличный от нуля вектор u, удовлетворяющий этим условиям (из первого условия следует, что u не принадлежит N). Тогда для любого вектора вида $w=\alpha u+v$, где v принадлежит N, а α — положительная постоянная, мы имеем

$$(w, Aw)=\alpha^2(u, Au)+(v, Av)>0. \qquad (15)$$

Это означает, что все векторы w принадлежат N, что противоречит максимальности N, так как u не лежит в N.

Следовательно, возможно только, что $\dim N=r$, и наше утверждение доказано.

Аналогично можно было бы определить максимальные отрицательные пространства N^* размерности $p=k-r$, которые являются положительными пространствами для формы $-A$.

До сих пор мы предполагали, что $|A| \neq 0$. Если же $|A| = 0$, то существуют некоторые собственные функции u, удовлетворяющие уравнению $Au = 0$. По существу, ничего не меняется, только пространства N и N^* имеют общее дополнительное, например g-мерное, пространство таких собственных функций.

В качестве последнего замечания мы укажем, что для сопряженной задачи для оператора $L^*[u] = 0$, рассматриваемой в обратном направлении, т. е. для задачи, в которой задаются значения $u(x, \tau)$ в области G и решение ищется при $t < \tau$, правильные граничные условия на Z таковы: решение u должно принадлежать *максимальному неположительному пространству* N^*.

4. Интегралы энергии для одного уравнения второго порядка. В этом пункте мы выведем энергетическое неравенство и, следовательно, получим теорему единственности для одного гиперболического уравнения второго порядка. В § 3, п. 8 мы свели гиперболическое уравнение второго порядка к симметрической гиперболической системе первого порядка. Поэтому энергетические неравенства следуют из результатов предыдущих пунктов этого параграфа. Тем не менее стоит привести их независимый вывод в случае уравнения второго порядка (что исторически было сделано раньше) [1]), так как эти неравенства служат простым общим обоснованием для примеров § 6 и так как этот вывод является моделью вывода соответствующих неравенств для уравнений высших порядков, что будет проделано в следующем параграфе.

Как и в § 3, мы рассмотрим уравнение второго порядка вида

$$L[u] = u_{tt} - \sum a^{ij} u_{ij} + \ldots = 0. \tag{16}$$

Мы предположим, что это уравнение гиперболическое и что гиперплоскости $t = \text{const}$ — поверхности пространственного типа. В соответствии с § 3, так будет тогда и только тогда, когда квадратичная форма a^{ij} положительно определенна. Мы выразим $u_t L[u]$ в виде дивергенции [2])

$$2u_t L[u] = (u_t^2)_t - 2\sum (a^{ij} u_i u_t)_j + \sum (a^{ij} u_i u_j)_t + Q,$$

где через Q обозначены члены, не содержащие производных второго порядка. Если мы для удобства предположим, что оператор L не содержит членов нулевого порядка, то Q будет квадратичной формой относительно производных первого порядка от u.

---

[1]) См. литературу в § 6, стр. 636.

[2]) Q в этом пункте и в § 9, конечно, не обозначает характеристическую форму.

Теперь мы проинтегрируем это тождество по линзообразной области D, ограниченной двумя поверхностями S_0 и S_1; если u является решением уравнения $L[u]=0$, то из формулы Гаусса мы получим, что

$$\int_{S_1} q\,dS - \int_{S_0} q\,dS = \int_D\int Q\,dx\,dt, \tag{17}$$

где

$$q = \tau u_t^2 - 2\sum a^{ij}u_i u_t \xi_j + \sum a^{ij}u_i u_j \tau.$$

Здесь τ и ξ_j обозначают компоненты нормалей к S_0 и S_1 по направлению осей t и x_j; нормали проведены по направлению положительной оси t.

Пусть теперь в качестве S_0 выбрана область $R(0)$, вырезанная на начальной гиперплоскости $t=0$ с помощью обратного коноида лучей Г, проходящего через точку P, а S_1 пусть состоит из области $R(h)$, вырезанной коноидом лучей на гиперплоскости $t=h$, и из $M(h)$, куска полости коноида, заключенного между гиперплоскостями $t=0$ и $t=h$. Интегральное соотношение (17) можно тогда переписать следующим образом:

$$\int_{R(h)} q\,dS + \int_{M(h)} q\,dS - \int_{R(0)} q\,dS = \int_D\int Q\,dx\,dt.$$

Как указывалось в § 3, величина q, если рассматривать ее как квадратичную форму относительно u_t и u_x, неотрицательна на $R(h)$, $R(0)$ и $M(h)$. Тогда, обозначая интеграл по $R(h)$ через $E(h)$, мы получим энергетическое неравенство

$$E(h) \leqslant E(0) + \int_D\int Q\,dx\,dt,$$

где

$$E(h) = \int_{R(h)} q\,dS = \int_{R(h)} \left\{ u_t^2 + \sum a_{ij}u_i u_j \right\} dx.$$

Квадратичная форма Q мажорируется произведением q на достаточно большую постоянную C:

$$Q \leqslant Cq.$$

Подставляя это соотношение в энергетическое неравенство, мы получим

$$E(h) \leqslant E(0) + C\int_0^h E(t)\,dt.$$

Простым следствием этого интегрального неравенства является оценка

$$E(h) \leqslant E(0)\,e^{Ch};$$

это и есть искомая окончательная форма энергетического неравенства.

Аналогичные неравенства для интегралов энергии высших порядков можно получить с помощью дифференцирования уравнения (16).

§ 9. Энергетические оценки для уравнений высших порядков

1. Введение. Результаты § 8, касающиеся симметрических систем первого порядка, являются достаточно общими для большинства задач о распространении волн, встречающихся в физике. Тем не менее желательно построить теорию и для других гиперболических задач. Для таких задач удовлетворительная теория была построена [1]) при строгом ограничении, что все характеристики различны, так что все полости конуса нормалей можно разделить полостями некоторого другого конуса.

Мы вкратце опишем метод Лере [2] [2]) для одного уравнения порядка m. Этот метод без каких-либо изменений можно применить к слабо связанным системам гиперболических уравнений с одинаковой главной частью. Так как (см. гл. I, § 2, п. 2) произвольную гиперболическую систему с различными характеристиками можно свести к слабо связанной системе, то метод Лере охватывает такие гиперболические системы уравнений.

Ключом к теоремам единственности (§ 8) и существования (§ 10) являются энергетические неравенства. Поэтому мы ограничимся тем, что покажем, как можно получить энергетические оценки без предположения симметричности.

2. Энергетические тождества и неравенства для решений гиперболических уравнений высших порядков. Метод Лере и Гординга. Метод, примененный в § 8 к уравнениям второго порядка, состоял в том, что уравнение $L[u]=0$ умножали на $\partial u/\partial t$, и полученное квадратичное выражение интегрировали по линзообразной области, причем с помощью интегрирования по частям результат удавалось свести к сумме интегралов по области и по границе от квадратичных форм относительно первых производных функции u. Последний шаг состоял в доказательстве того, что граничные интегралы — положительно определенные. Чтобы обобщить этот метод на уравнения высших порядков, мы должны 1) выбрать подходящий

---

[1]) Построение общей теории начал И. Г. Петровский, см. работы [5] и [4].

[2]) Изящные рассуждения Лере даны здесь в изложении Гординга [3].

множитель, 2) произвести преобразование с помощью интегрирования по частям и 3) установить, что граничные интегралы положительно определенные.

Пусть L — гиперболический оператор порядка m. Множитель будет иметь вид $N[u]$, где N — некоторый оператор порядка $m-1$. Прежде чем выбрать конкретный вид оператора N, мы выразим произведение $N[u]L[u]$ как сумму дивергенции и некоторой квадратичной формы относительно производных порядка, меньшего m. Это формальное тождество не зависит от гиперболичности оператора L. Чтобы вывести его, мы ограничимся членами порядка $m-1$ и m в операторах N и L соответственно, так как произведения, содержащие члены более низких порядков, можно включить во введенную ниже форму Q.

Пусть G — некоторая область, а B — ее граница, причем компоненты единичного вектора нормали к границе равны γ_i. Тогда существуют две формы $q(u)$ и $Q(u)$, квадратичные относительно производных функции u до порядка $m-1$ включительно и такие, что

$$\int_G\int N[u]L[u]\,dx = \int_B q(u)\,dS + \int_G\int Q(u)\,dx, \tag{1}$$

где dS — элемент поверхности на B, а dx — элемент объема в G. Достаточно доказать формулу (1) в случае, когда N и L — одночлены, $N = aD_1D_2\ldots D_{m-1}$, $L = bD_m\ldots D_{2m-1}$, где символы D_j, $j = 1, \ldots, 2m-1$, обозначают частные производные по некоторым переменным (эти переменные не обязательно различны для различных j), а a и b — функции x. Интегрируя по частям по переменной, соответствующей D_m, получаем

$$\int_G\int ab\,\{D_1\ldots D_{m-1}u\}\,\{D_m\ldots D_{2m-1}u\}\,dx =$$
$$= -\int_G\int ab\,\{D_1\ldots D_m u\}\,\{D_{m+1}\ldots D_{2m-1}u\}\,dx + O,$$

где через O обозначены члены, которые войдут в Q или q, поскольку они, как требуется, являются интегралами от квадратичных форм, а именно

$$-\int_G\int D_m\{ab\}\,\{D_1\ldots D_{m-1}u\}\,\{D_{m+1}\ldots D_{2m-1}u\}\,dx +$$
$$+\int_B ab\,\{D_1\ldots D_{m-1}u\}\,\{D_{m+1}\ldots D_{2m-1}u\}\,\gamma_m\,dS.$$

Первый член снова можно преобразовать, интегрируя по частям последовательно по переменным, соответствующим $D_1, \ldots,$ и таким образом последовательно перебрасывая дифференцирования D_i из

первой скобки $\{\ldots\}$ во вторую. После нечетного числа $2m-1$ таких операций операторы N и L поменяются местами и получится тождество следующего типа:

$$\int\limits_G\int N[u]\,L[u]\,dV = -\int\limits_G\int L[u]\,N[u]\,dV + \\ + 2\int\limits_B q(u)\,dS + 2\int\limits_G\int Q(u)\,dV,$$

где q и Q — квадратичные формы относительно производных до $(m-1)$-го порядка функции u. Отсюда следует требуемое тождество (1). Заметим, что $Q\equiv 0$, если коэффициенты операторов L и N постоянны и если L и N не содержат членов низшего порядка.

Квадратичная форма $q(u)$, связанная с операторами L и N и поверхностью B, не определяется однозначно, если порядок L выше двух и если имеется более двух независимых переменных. Но любые две такие формы отличаются на член вида дивергенции на поверхности, т. е. значение $\int\limits_B q(u)\,dS$ не зависит от конкретного выбора формы q.

Если оператор L гиперболический, а G — линзообразная область, ограниченная двумя поверхностями пространственного типа S_1 и S_2, имеющими общую границу, то мы попытаемся так выбрать оператор N, чтобы граничный интеграл $\int q\,dS$ в формуле (1) был положительно определенным на S_1 и отрицательно определенным на S_2. Это будет выполнено, если мы, следуя Лере, выберем оператор N таким образом, чтобы *полости его характеристического конуса нормалей разделяли полости конуса нормалей для* L в следующем смысле.

Пусть $L(\xi)$ и $N(\xi)$ — характеристические формы, связанные с операторами L и N. Мы назовем направление ζ *направлением пространственного типа* для оператора L, если для любого направления θ, не параллельного ζ, характеристическая форма $L(\lambda\zeta+\theta)$ обращается в нуль для m действительных различных значений λ. Говорят, что характеристики оператора N разделяют характеристики L, если форма $N(\lambda\zeta+\theta)$ обращается в нуль для $m-1$ действительных различных значений λ и эти значения λ разделяют[1]) корни формы L.

Для данного гиперболического оператора L можно построить оператор N на единицу меньшего порядка, характеристики которого

[1]) Нетрудно показать, что если оператор N обладает этим свойством разделения для одного направления пространственного типа ζ, то он будет разделяющим для всех направлений пространственного типа.

разделяют характеристики L. Мы можем, например, взять

$$N(\xi) = \frac{d}{d\lambda} L(\xi + \lambda\zeta)\Big|_{\lambda=0}.$$

То, что N есть разделяющий оператор, получается как непосредственное следствие классической теоремы о том, что корни многочлена разделяются корнями его производной.

Теперь мы более точно сформулируем утверждение о положительной определенности граничных интегралов в формуле (1). Мы предположим, что имеем самый простой случай: пусть S_1 и S_2 — две гиперплоскости $t=0$ и $t=T$, и пусть коэффициенты операторов L и N постоянны. Мы предположим также, что рассматриваемое решение u обращается в нуль для достаточно больших значений пространственных переменных (т. е. переменных в гиперплоскостях S). Мы утверждаем тогда следующее.

Если оператор L гиперболический и его характеристики разделены характеристиками оператора N, и если гиперплоскости $t = \text{const}$ — поверхности пространственного типа, то квадратичный функционал $\int q(u)\,dx$, связанный с операторами N, L и гиперплоскостями $t = \text{const}$, является *положительно определенным*, т. е. для всех гладких функций, обращающихся в нуль при больших значениях $|x|$, мы имеем

$$\int q(u)\,dx \geqslant \text{const} \cdot \int \sum |D^\alpha u|^2\,dx, \qquad (2)$$

где сумма в правой части распространена на все частные производные функции u порядка, не превышающего $m-1$.

В аналогичной ситуации для операторов второго порядка мы проверили положительную определенность соответствующего квадратичного функционала $\int q\,dx$, показав, что подинтегральная функция $q(u)$ есть положительно определенная квадратичная форма относительно производных первого порядка от функции u. В общем случае это не всегда справедливо и, следовательно, такую проверку произвести невозможно. Вместо этого мы применим критерий положительной определенности, принадлежащий Гордингу [3].

Обозначим через $U_\nu(\xi)$ преобразование Фурье по пространственным переменным функции $\partial^\nu u/\partial t^\nu$. Пусть $D^\alpha u$ — любая частная производная от u порядка $m-1$; запишем ее как $D_1 \ldots D_{m-1-\nu}\partial^\nu u/\partial t^\nu$, где символы $D_1, \ldots, D_{m-1-\nu}$ снова обозначают дифференцирование по пространственным переменным. (Согласно хорошо известным правилам, преобразование Фурье производной $D^\alpha u$ равно $i^{m-1-\nu}\xi_1 \ldots \xi_{m-1-\nu} U_\nu$.) Применяя формулу Парсеваля, мы можем

выразить $\int q\,dx$ как интеграл по пространству ξ от соответствующей эрмитовой формы h:

$$\int q(u)\,dx = \int \sum h_{\nu\mu}(\xi)\, U_\nu \overline{U}_\mu\, d\xi,$$

где $h_{\nu\mu}$ — полином степени $2m-2-\nu-\mu$ относительно ξ.

Аналогично мы имеем

$$\int \sum |D^\alpha u|^2\,dx = \int \sum |\xi|^{2m-2-2\nu}\, |U_\nu|^2\, d\xi,$$

где $|\xi|$ обозначает $(\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2)^{1/2}$. Таким образом, неравенство (2), которое мы хотим доказать, эквивалентно неравенству:

$$\int \sum h_{\nu\mu} U_\nu \overline{U}_\mu\, d\xi \geqslant \text{const} \cdot \int \sum |\xi|^{2m-2-2\nu}\, |U_\nu|^2\, d\xi. \tag{3}$$

Так как функции U_ν, $\nu = 0, \ldots, m-1$, независимы друг от друга, то легко видеть, что такое неравенство справедливо тогда и только тогда, когда *эрмитова форма h положительно определенна для всех* ξ.

Таким образом, чтобы доказать неравенство (2), остается только при указанных условиях проверить, что эрмитова форма, связанная с q, положительно определенна. По этому поводу мы сошлемся на уже упомянутую статью Гординга.

Мы резюмируем наши результаты, касающиеся уравнений с постоянными коэффициентами, как закон сохранения энергии.

Положительно определенная величина $\int q(u)\,dx$, которую можно рассматривать в качестве „интеграла энергии“, для всех решений уравнения $L[u]=0$ не зависит от t. Этот результат можно без существенных трудностей распространить на уравнения с переменными коэффициентами. Можно построить аналогичный „интеграл энергии“, который, хотя и будет зависеть от t, но будет расти с ограниченной скоростью, т. е. его значение при $t=T$ превышает его значение при $t=0$ не более чем в e^{CT} раз. Величина постоянной C зависит от коэффициентов оператора L и от величины их первых производных [1])

3. Другие методы. Надо обратить внимание на другой подход к этой задаче, принадлежащий Кальдерону и Зигмунду. Их работы [1, 2], касающиеся сингулярных интегральных уравнений, дали гибкое орудие для исследования задач, рассматриваемых в этом параграфе, и для изучения других вопросов, связанных с линейными

---

[1]) См. работу Гординга [3]. Мы вернемся к неравенству Гординга в томе III.

уравнениями с частными производными. Основой метода является тот факт, что, применяя соответствующие интегральные операторы, можно приводить дифференциальные операторы с частными производными к симметрическому виду и таким образом получать отличные от метода Лере способы вывода энергетических неравенств [1]).

Наконец, мы дадим схему другого доказательства энергетических неравенств, принадлежащего Пейзеру [1] и основанного на нормальной форме линейного гиперболического оператора для двух переменных x и t, введенной в гл. V, § 8, п. 2 и 3.

Сначала мы рассмотрим гиперболический оператор $L[u]$ порядка m относительно функции $u(x, t)$ двух переменных x, t, причем будем считать, что он задан в нормальной форме:

$$L[u] = D_1 D_2 \ldots D_m u + R, \tag{4}$$

где дифференциальный оператор R содержит только производные порядка, меньшего чем m, и где все m операторов дифференцирования по характеристическим направлениям $D_i = \partial/\partial t + \tau^i \partial/\partial x$ различны. (Обозначения несколько отличаются от тех, которые применялись в гл. V, § 8.) Мы введем операторы $V_j = (D_1 \ldots D_m)_j$ порядка $m-1$, причем в произведении, стоящем в правой части, пропущен множитель D_j. Согласно результатам гл. V, § 8, все производные порядка $m-1$ и более низких порядков можно линейно выразить через величины $V_j u$. Мы рассмотрим решение u уравнения $L[u] = 0$ в слое Σ: $0 \leqslant t \leqslant T$ и предположим, что функция u финитна в Σ, т. е. обращается в нуль, если величина $|x|$ превышает некоторое фиксированное число.

Теперь мы введем оператор порядка $m-1$

$$N[u] = \sum_{j=1}^{m} V_j[u], \tag{5}$$

который может быть получен из оператора L с помощью формального дифференцирования его главной части относительно символа $\partial/\partial t$. Мы сразу же получим основное тождество

$$N[u]\, L[u] = \frac{1}{2} \sum_j D_j (V_j u)^2 + Q[u], \tag{6}$$

где $Q[u]$ — квадратичная форма относительно производных u порядка меньшего, чем m. Интегрируя по всему слою, учитывая, что

---

[1]) См. также позднейшие результаты Мизохата [1] и [2].

функция u финитна, и рассматривая t как параметр на каждой из k характеристик, мы получаем интегральное соотношение

$$0=\int\limits_{\Sigma}\int N[u]\,L[u]\,dx\,dt=\int[q(u(x,\ T))-q(u(x,\ 0))]\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Sigma}\int Q(u(x,\ t))\,dx\,dt=E(T)-E(0)+\int\limits_{\Sigma}\int Q(u(x,\ t))\,dx\,dt,$$

где $q(u)=\frac{1}{2}\sum(V_j u)^2$ — положительно определенная квадратичная форма, а $E(t)$ обозначает „интеграл энергии"

$$E(t)=\int q(u(x,\ t))\,dx. \qquad (7)$$

Оценивая производные низших порядков так, как это делалось выше, мы почти сразу получаем, что

$$\int\limits_{\Sigma}\int Q(u(x,\ t))\,dx\,dt\leqslant\text{const}\cdot\int\limits_0^T E(t)\,dt.$$

Следовательно, для нашего решения u уравнения $L[u]=0$ справедливо *энергетическое неравенство*

$$E(T)\leqslant E(0)+\text{const}\cdot\int\limits_0^T E(t)\,dt, \qquad (8)$$

причем $E(t)$ — положительный квадратичный функционал относительно производных $(m-1)$-го порядка функции u [1]).

Следующий шаг состоит в распространении этого результата на случай n переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Для этого мы предположим, что оператор L имеет постоянные коэффициенты. Тогда, коротко говоря, неравенство устанавливается так: сначала с помощью преобразования Фурье решение u разлагается на плоские волны $v(t,\ y;\ \alpha)$, зависящие от единичного вектора α в пространстве x: $u(x,\ t)=$

[1]) Надо заметить, что, как было указано при формальном выводе равенства (1), формула

$$\int\int N[u]\,L[u]\,dx\,dt=\int[q(u(x,T))-q(u(x,0))]\,dx+$$
$$+\int\int Q(u(x,t))\,dx\,dt$$

получается при повторном интегрировании выражения $N[u]\,L[u]$ по частям по переменным x и t; полученная таким образом функция $q(u)$ может отличаться от нашей функции только выражением типа дивергенции, так что значение функционала $E(t)$ не изменяется.

$= \int\limits_{|\alpha|^2=1} v(t, y; \alpha)\, d\alpha$, $y = (\alpha, x)$, причем плоская волна v как функция x и t удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[v] = 0$. Финитность функции u обеспечивает возможность такого разложения и соответствующего разложения для всех производных u, входящих в оператор L. Тогда можно применить полученные выше энергетические соотношения к функции v, зависящей от двух переменных y и t, а затем интегрирование по α позволяет с помощью формулы Парсеваля получить искомые энергетические соотношения для функции $u(t, x)$.

§ 10. Теорема существования

1. Введение. В этом пункте мы применим энергетические неравенства, полученные в § 8 и 9, для доказательства существования решений симметрических гиперболических систем уравнений

$$L[u] = u_t + M[u] = 0 \tag{1}$$

с произвольными гладкими начальными условиями.

Мы напомним, что формула для решения задачи Коши в случае неоднородного уравнения

$$L[u] = f(x, t), \tag{1'}$$

удовлетворяющего, например, начальным условиям $u(x, 0) = 0$, получается непосредственно из *принципа Дюамеля*. Если $U(x, t; \tau)$ — решение уравнения (1) при $t > \tau$, такое, что $U(x, \tau; \tau) = f(x, \tau)$, то решение u определяется формулой

$$u(x, t) = \int\limits_0^t U(x, t; \tau)\, d\tau.$$

Таким образом, мы можем ограничиться доказательством существования для однородного уравнения (1).

Для того чтобы сформулировать результат в достаточно общем виде, удобно будет следующим образом воспользоваться терминологией гильбертова пространства. Рассмотрим в пространстве x область R, зависящую, может быть, от параметра t, и „гладкие функции“ u в области R, обладающие непрерывными производными до порядка r включительно. В качестве областей R (или R_t) не обязательно выбирать плоские сечения коноида зависимости Γ_P для некоторой точки P. Они, например, могут соответствовать области зависимости для произвольной плоской области $t = \text{const}$ в слое Σ (см. § 7). Функции u не обязаны быть решениями дифференциального уравнения. Мы введем теперь гильбертово пространство $H_r(t)$

или $H_r^*(t)$ как пополнение[1]) нашего пространства гладких функций u по норме r-го порядка $\|u(t)\|_r$ или $\|u(t)\|_r^*$, определенной в § 8, п. 2. Тогда энергетические неравенства § 8 дают следующее утверждение: если начальные значения принадлежат пространству $H_r(0)$ или $H_r^*(0)$, то значения u решения уравнения (1) для достаточно малых положительных t принадлежат соответствующему пространству $H_r(t)$ или $H_r^*(t)$, а их нормы равномерно ограничены при ограниченных значениях t. Справедливость энергетических неравенств с подходящими константами для произвольных областей R либо может быть доказана непосредственно, либо эти неравенства могут быть получены с помощью объединения нескольких областей R_i описанного выше типа.

В некоторых частных случаях элементы абстрактных пространств H_r могут быть связаны с обычными функциями. Эта связь устанавливается с помощью леммы Соболева (см. гл. III, приложение 1), которая утверждает, что для достаточно больших r элементы H_r будут гладкими функциями. А именно, если R — ограниченная область с гладкой границей и если $2r > n$, то

$$\max_{x \in R} |u(x)| \leqslant \text{const} \cdot \|u\|_r,$$

причем величина постоянной зависит только от R и от r. Кроме того, для $r > \frac{n}{2} + s$ все элементы пространства H_r имеют ограниченные частные производные до порядка s.

В дополнение к энергетическим неравенствам необходимо иметь конструктивный элемент; здесь его дает теорема Коши — Ковалевской[2]), если следовать идеям Шаудера [4].

---

[1]) Это означает следующее: если $u_1, \ldots, u_j, \ldots$ — последовательность функций, имеющих в области R непрерывные производные до порядка r включительно и равномерно ограниченные нормы $\|u_j\|_r$, и если, кроме того, функции u_j образуют последовательность, фундаментальную в норме порядка r, т. е. если $\|u_i - u_j\|_r \to 0$ при $i \to \infty$, $j \to \infty$, то мы приписываем последовательности $\{u_j\}$ в качестве предела идеальный элемент u. Примерно так же вводятся действительные числа как пополнение системы рациональных чисел. Норма предельной функции определяется формулой

$$\|u\|_r = \lim_{j \to \infty} \|u_j\|_r.$$

[2]) Другие идеи см. в работе Фридрихса [2]; там применяются конечно-разностные уравнения, а в работе П. Лакса [6] — ортогональные проекции в гильбертовом пространстве. Относительно теорем существования решений смешанных задач для уравнений второго порядка см. Кшижанский и Шаудер [1] и Ладыженская [1]. Некоторый класс смешанных задач для уравнений, которые не обязательно должны быть гиперболическими, рассматривается в работе Фридрихса [3], см. также П. Лакс и Филлипс [1].

Мы дадим подробное доказательство для *симметрических* гиперболических систем первого порядка и коротко проведем рассуждения для несимметрических систем и для уравнений высшего порядка. Кроме того, укажем, что замечания в § 4, п. 7, и позже, в § 15, приводят к другому способу построения решения.

2. Теорема существования. *Задача Коши для уравнения* $L[u]=0$ *с условием* $u(x, 0)=\psi(x)$ *имеет в* $R(t)$ *гладкое решение* u, *если оператор* L *гиперболический, а его коэффициенты и начальная функция* ψ *имеют достаточное число производных. Если* u *принадлежит пространству* H_r *над областью* $R(0)$, *то* u *принадлежит* H_r *и в любом сечении* $R(t)$ *коноида зависимости.*

Необходимо добавить следующее: если функция ψ просто непрерывна или не имеет достаточного числа производных для того, чтобы обеспечить гладкость решения u, то, тем не менее, можно определить *обобщенное решение* u как элемент пространства H_r, $\bar{u}=\lim u_n$, с помощью замыкания в норме H_r.

Доказательство распадается на три этапа. Сначала мы построим решения для случая, когда коэффициенты оператора L, а также начальные данные ψ аналитические; затем мы перейдем к случаю, когда начальные данные принадлежат гильбертову пространству H_r; наконец, мы снимем ограничение аналитичности коэффициентов оператора L.

1. Пусть ψ — произвольная функция из H_r. Мы приблизим ψ по норме r-го порядка последовательностью аналитических функций, например полиномов ψ_l $(l=1, 2, \ldots)$. Задача Коши для аналитического уравнения $L[u]$ с аналитическими (полиномиальными) начальными значениями ψ_l была решена в гл. I, § 7 методом Коши—Ковалевской, состоящим в применении степенных рядов. Аналитическое решение u_l, которое определяется однозначно в силу теоремы единственности, было построено в достаточно узком слое Σ_T: $0\leqslant t\leqslant T$. Ширина этого слоя, T, *не зависит* от конкретных полиномов[1]) ψ_l, хотя зависит от аналитической структуры коэффициентов уравнения.

2. Так как последовательность начальных значений ψ_l сходится к функции ψ по норме r-го порядка над областью $R(0)$, то энергетические оценки, примененные к разности u_l-u_m, дают следующий результат: все частные производные порядка не выше чем r соответствующего решения u_l сходятся по норме порядка r на любом сечении $R(t)$ слоя Σ_T при $t\leqslant T$. Очевидно, что энергетические оценки остаются справедливыми и сходимость имеет место, если $R(t)$ есть некоторая конечная часть горизонтальной плоскости $t=\text{const}$ в слое Σ_T.

[1]) См. гл. I, § 7.

Тогда из леммы Соболева следует, что последовательности функций u_l и всех их производных порядка меньшего, чем $r-\frac{n}{2}$, равномерно сходятся в слое Σ_T. Если r больше, чем $\frac{n}{2}+1$, то предельная функция u имеет непрерывные первые производные и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Кроме того, так как пространство H_r полное, то таким образом полученное решение $u(x, t)$ принадлежит H_r над областью $R(t)$ при $t \leqslant T$.

Теперь мы можем повторить этот процесс; если в слое $0 \leqslant t \leqslant T$ задано решение u, значения которого над областью $R(T)$ принадлежат H_r, то мы построим решение u в слое[1] $T \leqslant t \leqslant 2T$ с начальными данными, заданными в $R(T)$, и т. д. Таким образом в любом слое Σ мы можем построить решение с заданными начальными значениями. Очевидно, выбирая вместо точки P точку P', для которой коноид зависимости $\Gamma_{P'}$ включает в себя Γ_P, мы можем распространить решение u на более широкую область вне Γ_P.

3. Это доказательство легко можно обобщить на случай, когда коэффициенты A^i, B уравнения (1) не аналитические, а просто достаточно гладкие — например, обладающие непрерывными производными до порядка $r+1$ включительно — причем снова применяются энергетические оценки. Здесь достаточно дать краткие пояснения. Мы предположим, что $r > \frac{n}{2}+1$, и равномерно приблизим в слое Σ коэффициенты оператора L и их производные с помощью аналитических функций A_n^i, B_n $(n=1, 2, \ldots)$ и их производных. Таким образом, мы заменим оператор L аналитическим аппроксимирующим оператором L_n. Задача Коши для этого оператора в слое Σ имеет решение u_n; для этой функции $L_n[u_n]=0$; $u_n(x, 0)=\psi(x)$.

Предположим сначала, что функция ψ принадлежит H_{r+1}. Тогда, в силу энергетического неравенства, $u_n(t)$ также принадлежит H_{r+1} и $\|u_n(t)\|_{r+1} \leqslant \text{const} \cdot \|\psi\|_{r+1}$, где постоянная не зависит от n. Разность $u_n - u_m$, очевидно, удовлетворяет неоднородному уравнению

$$L_n[u_n-u_m]=(L_m-L_n)\,u_m=f_{nm}.$$

Функция u_n-u_m обращается в нуль при $t=0$, поэтому

$$\|u_n-u_m\|_r \leqslant \text{const}\,\|f_{nm}\|_r.$$

Так как коэффициенты оператора L_n и все их частные производные до порядка r равномерно приближают соответствующие коэффициенты и производные L, отсюда следует, что $\|f_{nm}\|_r \leqslant \varepsilon_{nm}\|u_m\|_{r+1}$, причем $\varepsilon_{nm} \to 0$ при возрастании n и m. Мы уже показали, что

---

[1]) Равномерность ширины слоя, в которой существует аналитическое решение, следует из теоремы Коши — Ковалевской.

норма $\|u_m\|_{r+1}$ равномерно ограничена. Следовательно, $\|f_{nm}\|_r$ стремится к нулю и, в силу энергетического неравенства, к нулю стремится и $\|u_n - u_m\|_r$.

Согласно лемме Соболева, последовательность функций u_n и их частных производных первого порядка также равномерно сходится. Предел $u(t)$ функций u_n принадлежит H_r при каждом значении t. Кроме того, так как функции u_n удовлетворяют энергетическому неравенству

$$\|u_n(t)\|_r \leqslant \text{const} \cdot \|\psi\|_r$$

с постоянной, не зависящей от n, такое же неравенство справедливо для предельной функции u.

До сих пор мы предполагали, что функция ψ принадлежит H_{r+1}. Чтобы построить решение для любой функции ψ из H_r, мы приблизим ψ последовательностью функций ψ_n, принадлежащих H_{r+1}. В силу полученного выше результата для этих начальных функций существуют однозначно определенные решения u_n, принадлежащие H_r, и для $u_n - u_m$ справедливо энергетическое неравенство

$$\|u_n - u_m\|_r \leqslant \text{const} \cdot \|\psi_n - \psi_m\|_r.$$

Это показывает, что последовательность u_n сходится по норме r-го порядка к некоторому пределу u, который и является искомым решением.

3. Замечания о сохранении свойств начальных значений и о соответствующих полугруппах. Малый принцип Гюйгенса. Представим себе, что начальные значения $\psi(x) = u(x, 0)$ заданы на всей гиперплоскости $t=0$. В силу теорем существования из п. 2, решение уравнения (1) однозначно определяется для всех последующих значений времени $t > 0$. Кроме того, если функция $\psi(x)$ принадлежит H_r во всем пространстве x, то решение $u(x, t)$ будет принадлежать $H_r(t)$ для всех последующих значений времени. Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Если сопоставить решение уравнения $L[u] = 0$ в момент времени $t > 0$ его значениям при $t = 0$, то получится отображение функционального пространства H_r в себя. В частности, решение задачи Коши выражается с помощью некоторого линейного оператора T, зависящего от t:

$$u(x, t) = T(t, t_0)\psi,$$

если функция u принимает начальные значения ψ при $t = t_0$. Очевидно, что вместо того, чтобы делать один шаг, переходя от начальных значений при $t = t_0 = 0$ к значениям u в момент t, можно ввести промежуточное значение t_1, найти $u(x, t_1)$ и затем решить

задачу Коши с начальными значениями $u(x, t_1)$ вместо $u(x, t_0) = \psi(x)$. Тогда решение выразится через линейный оператор

$$u(x, t) = T(t, t_1)\, u(x, t_1)$$

и, следовательно, через произведение двух операторов

$$u(x, t) = T(t, t_1)\, T(t_1, t_0)\, \psi.$$

Тогда, в силу теоремы единственности, операторы T должны удовлетворять соотношению

$$T(t, t_0) = T(t, t_1)\, T(t_1, t_0) \quad \text{при} \quad t > t_1 > t_0. \tag{2}$$

Если мы предположим, что коэффициенты оператора L не зависят от t, то оператор $T(t, t_0)$ будет зависеть только от разности $t - t_0$ и соотношение (2) примет вид

$$T(t - t_0) = T(t - t_1)\, T(t_1 - t_0) \quad \text{при} \quad t > t_1 > t_0. \tag{2a}$$

Это является групповым соотношением. Так как здесь предполагается что оно выполняется только для $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$, то можно сказать, что операторы T образуют *полугруппу*[1]).

Адамар обратил внимание на соотношения (2) или (2а) и назвал тот факт, который они описывают, „малым принципом Гюйгенса". В случае, когда операторы T могут быть явно представлены как интегральные операторы, соотношение (2) приводит к интересным тождествам для ядер этих операторов. Между прочим, то же самое справедливо в случае граничных задач для эллиптических и параболических уравнений, если они решаются с помощью функции Грина[2]).

Некоторое свойство P начальных функций называется *сохраняющимся*, если решение $u(x, t)$, соответствующее начальной функции ψ, которая обладает свойством P, при любом другом значении времени t также обладает свойством P. На этом языке наши предыдущие результаты можно выразить следующим образом: *свойство иметь ограниченную норму r-го порядка является сохраняющимся*[3]).

Как мы увидим из примеров, приведенных в следующем пункте, свойства функции $\psi(x)$ иметь производные или непрерывные производные не сохраняются; некоторые из свойств дифференцируемости

---

[1]) Рассматривая „обратную" задачу Коши, мы можем убедиться, что оператор T имеет однозначный обратный $T(t_0, t_1) = T^{-1}(t_1, t_0)$. Поэтому на самом деле эту полугруппу можно расширить до настоящей группы.

[2]) В этих случаях граничные задачи имеют решение только в полупространстве, например для $t \geqslant 0$, и соответствующие операторы образуют лишь полугруппу.

[3]) Для несимметрических уравнений это свойство уже не обязано сохраняться. Например, рассмотрим систему

$$u_t - v_x = 0, \quad v_t = 0,$$

теряются при применении оператора T. Так как предположение о справедливости малого принципа Гюйгенса очевидно является разумным с физической точки зрения, то ясно, что имеющим физический смысл сохраняющимся условием является наличие энергетических норм, а не дифференциальные свойства [1]).

4. Фокусирование. Пример несохранения дифференцируемости. Обычно в математической физике дифференциальное уравнение $L[u]=0$ имеет регулярные, например постоянные, коэффициенты, и начальные данные также регулярны, например бесконечно дифференцируемы, за исключением, может быть, начального многообразия $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-2})=0$, где функция u или ее производные имеют разрывы, как это было описано в § 4, п. 3. Эти разрывы, согласно § 4, распространяются вдоль характеристик. Однако там было построено решение только „в малом", т. е. в полосе $0 \leqslant x_n \leqslant \lambda$ при достаточно малых λ, причем эта полоса может расширяться до тех пор, пока лучи, исходящие из многообразия S_0, порождают гладкие характеристические поверхности C. Если же на C эти лучи имеют огибающую, или „каустику", которая может быть ребром возврата поверхности C, то начальные особенности могут усиливаться на этой каустике. Хотя из этого явления, которое называется *фокусированием*, не следует, что решение нельзя продолжить за каустику [2]), оно все же локально понижает гладкость решений.

В этом смысле интересно рассмотреть следующий пример, несмотря на то, что в нем каустика состоит всего из одной точки.

с начальными данными

$$u(0, x)=0, \qquad v(0, x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{для} \quad x>0, \\ 0 & \text{для} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда для $x>0$

$$u(t, x)=\frac{t}{2\sqrt{x}}; \quad v(t, x)=\sqrt{x}.$$

Очевидно, что интеграл $\int (u^2+v^2)\,dx\,|_{t=0}<\infty$ конечен для любого ограниченного интервала, но при $t>0$ интеграл $\int (u^2+v^2)\,dx$ не существует. Другой пример дают начальные условия

$$u(0, x)=0, \quad v(0, x)=\sqrt{|x|}\,e^{-x}.$$

Тогда

$$u(t, x)=t\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{|x|\sqrt{|x|}}-\sqrt{|x|}\right)e^{-x}, \quad v(t, x)=\sqrt{|x|}\,e^{-x}.$$

[1]) Этот факт был впервые отмечен Фридрихсом и Г. Леви в работе [1].
[2]) См. подробности и доказательства в работе Людвига [1].

Мы рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения, например, в трехмерном пространстве:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0,$$

с начальными значениями $u(0, x, y, z) = 0$,

$$u_t(0, x, y, z) = \begin{cases} (1 - r^2)^{3/2} & \text{для } r^2 \leqslant 1, \\ 0 & \text{для } r^2 \geqslant 1. \end{cases}$$

Здесь $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Эти начальные условия имеют непрерывные производные вплоть до второго порядка. Явное решение задачи Коши на оси t определяется формулами[1])

$$u(t, 0, 0, 0) = \begin{cases} t(1 - t^2)^{3/2} & \text{для } t \leqslant 1, \\ 0 & \text{для } t > 1. \end{cases}$$

Мы имеем $u_t = 0$, $u_{tt} = 0$ для $t > 1$, а для $t < 1$

$$u_t = (1 - t^2)^{3/2} - 3t^2(1 - t^2)^{1/2},$$
$$u_{tt} = -3(1 - t^2)^{1/2} - 6t(1 - t^2)^{1/2} + 3t^2(1 - t^2)^{-1/2}.$$

Очевидно, что производная u_t непрерывна при $t = 1$, а u_{tt} — разрывна[2]).

5. Замечания о квазилинейных системах[3]). Следует заметить, что эту теорию можно распространить на нелинейные системы с по-

---

[1]) Формулы гл. III, § 3 показывают, что сферически симметричные решения волнового уравнения имеют вид $u(r, t) = \frac{f(t + r) - f(t - r)}{r}$. Из этой формулы непосредственно видно, что $u(0, t)$ имеет на одну производную меньше, чем f.

[2]) В основном мы рассматривали одно дифференциальное уравнение высшего порядка. Если мы положим $w = u_t + u_x$, $v^1 = -u_y$, $v^2 = -u_z$, то функции w, v^1 и v^2 удовлетворяют системе $w_t - w_x + v^1_y + v^2_z = 0$, $v^1_t + v^1_x + w_y = 0$, $v^2_t + v^2_x + w_z = 0$ и начальным условиям

$$w(0, x, y) = \begin{cases} (1 - r^2)^{3/2} & (r^2 \leqslant 1), \\ 0 & (r^2 > 1), \end{cases}$$
$$v^1(0, x, y) = 0,$$
$$v^2(0, x, y) = 0.$$

Здесь функция w непрерывна при $t = 1$, а w_t — разрывна. Таким образом, непрерывность первых производных для начальных значений не гарантирует непрерывности первых производных решения.

[3]) Для квазилинейных систем второго порядка этот метод был проведен Шаудером [4]. Дальнейшие результаты принадлежат Франклю [1]. Задачу Коши для нелинейных гиперболических уравнений любого порядка рассматривал Лере [2]. [Ранее решение задачи Коши для гиперболических квазилинейных уравнений и систем было получено в работе Петровского [5]. — *Прим. ред.*]

мощью метода итераций. Если система (1) квазилинейная, т. е. если матрицы коэффициентов зависят только от неизвестных функций u, то метод итераций, приведенный в гл. V, § 7, можно обобщить на случай n переменных. Таким образом мы получим доказательство единственности, а также существования решения u, которое строится как предел $u = \lim\limits_{n\to\infty} u^n$, где u^{n+1} — решение линейной задачи Коши

$$u_t^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{m} A^{\nu}(x,\ u^n)\, u_{x_\nu}^{n+1} + B(x,\ u^n)\, u^{n+1} = 0.$$

Начальными значениями для всех функций u^n служат заданные значения $\psi(x)$.

6. Замечания о задачах высших порядков и о несимметрических системах. Как мы подчеркивали выше, большая часть гиперболических задач математической физики сводится к симметрическим системам, для которых построенная выше теория решения задачи Коши вполне удовлетворительна. Однако задача о решении одного дифференциального уравнения высшего порядка или несимметрической системы первого порядка интересна с математической точки зрения. Замечателен тот факт, что данные выше энергетические оценки позволяют обобщить доказательства на такие задачи.

Энергетические оценки, полученные в § 8, п. 4, немедленно позволяют получить решение задачи Коши для любого гиперболического уравнения второго порядка. (Другим способом эта задача решается, если свести такое уравнение к симметрической гиперболической системе; это было сделано в § 3, п. 8.)

Чтобы решить задачу Коши для одного гиперболического уравнения порядка m или для системы таких уравнений с одинаковой главной частью, можно воспользоваться общими энергетическими оценками, полученными в § 9. После этого доказательство существования проводится приблизительно так же, как в первых пунктах этого параграфа.

Оценки § 9 и сделанные из них выводы применимы также к произвольной гиперболической системе первого порядка с различными характеристиками, так как любую систему такого типа с помощью исключения функций (см. гл. I, § 2, п. 2) можно свести к системе k уравнений порядка m, причем главная часть оператора, т. е. члены старшего порядка, в каждом из уравнений одинакова и относится только к одной из неизвестных функций $u^1, u^2, \ldots, u^k$. Уравнения связаны между собой только через члены низших порядков. Как это видно из гл. V, с такими системами можно обращаться почти так же, как с одним уравнением порядка k.

Снова следует заметить, что этот метод требует гиперболичности в строгом смысле, т. е. полости характеристического конуса нормалей

должны быть различными (а следовательно, то же самое будет справедливо и для конуса лучей). Случай общих уравнений с кратными характеристиками не охватывается изложенной выше теорией и остается нерешенной проблемой[1]).

Часть II

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ

§ 11. Введение

1. Общие понятия. Обозначения. Для линейных гиперболических дифференциальных уравнений, в частности для уравнений с постоянными коэффициентами, решение задачи Коши может быть выражено с помощью более или менее явных формул[2]) (см. также гл. III, § 5 и гл. V). Такие представления решений в виде функционалов от начальных данных не только приводят ко многим интересным формальным соотношениям[3]), но, что, пожалуй, еще важнее, позволяют изучать свойства решений. Эти представления основаны на разложении решений (а также и других произвольных функций) на плоские волны (см. также гл. III, § 3), а иногда — на сферические волны. Плоская волна определялась как решение дифференциального уравнения, зависящее только от времени t и от некоторой линейной комбинации пространственных координат. Сферическая волна — это решение, обладающее сферической симметрией относительно некоторой точки в пространстве.

Колеблющиеся плоские волны, которые применялись для разложения функции в интеграл Фурье, не всегда дают наиболее простой аппарат. Иногда возможен более прямой подход. Но никогда применение колеблющихся плоских волн не позволяет непосредственно выявить области зависимости и роль характеристик. Однако этот недостаток компенсируется изяществом явных результатов.

В § 12 и § 13 мы будем рассматривать одно уравнение второго порядка; в § 13а мы приведем в качестве примера интегрирование уравнений упругих волн. В § 14 мы рассмотрим уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами, а в § 15 мы получим представление для решений произвольных гиперболических задач, не обязательно с постоянными коэффициентами. Мы будем

---

[1]) См. дальнейшие замечания в § 4 и § 15, а также в работе Людвига [3].

[2]) Среди прочей литературы см., в частности, обширную монографию Джона [4].

[3]) По этому вопросу имеется очень много работ. Мы ограничимся, несколько субъективно, теми из них, которые представляются интересными в рамках этой книги.

опираться на теоремы существования и единственности, доказанные в первой части этой главы, и будем предполагать, что начальные данные обладают указанными там свойствами гладкости (§ 10). Надо, однако, сказать, что явные формулы части II могут быть использованы не только для представления решений, но и для конструктивного доказательства теорем существования с помощью непосредственной проверки.

В § 16 и 17 мы рассмотрим „ультрагиперболические" дифференциальные уравнения и некорректно поставленные задачи для гиперболических уравнений. Последний параграф содержит краткое изложение некоторых свойств передачи сигналов, подчиняющихся гиперболическим уравнениям.

Как и выше, мы выделяем временну́ю переменную $t = x_0$, а совокупность пространственных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначаем через вектор x с абсолютной величиной

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Единичную сферу в n-мерном пространстве мы будем обозначать через ω_n или ω, элемент ее поверхности — через $d\omega_n$ или $d\omega$, площадь ее поверхности [1]) есть

$$\omega_n = 2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2).$$

Сфера радиуса r обозначается через Ω_r или Ω, элемент ее поверхности есть $d\Omega = r^{n-1}\,d\omega$, а элемент объема—$dx = dx_1\,dx_2 \ldots dx_n = |x|^{n-1}\,d\omega_n\,d\,|x| = |r|^{n-1}\,d\omega_n\,dr$. Единичные векторы обозначаются через α, β, и иногда элемент поверхности единичной сферы вместо $d\omega$ обозначается через $d\alpha$, $d\beta$. Иногда, если это удобно, мы будем применять обозначения, принятые в рассматриваемой области.

2. Некоторые интегральные формулы. Разложение функций на плоские волны. Для последующего будет полезно собрать здесь некоторые формулы интегрального исчисления в n-мерном пространстве; большинство этих формул касается интегрирования по сферам.

Сначала мы рассмотрим интеграл от функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ по шару $|x| \leqslant r$, где r фиксировано. Применяя обозначения $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = \rho^2 = r^2 - p^2$, $x_n = p$, мы напишем

$$K(r) = \int\limits_{|x| \leqslant r}\int f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-r}^{+r} dp \int\limits_{\rho^2 \leqslant r^2 - p^2} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, p)\,dx_1 \ldots dx_{n-1}. \qquad (1)$$

1) См. гл. IV, § 1, п. 1.

Интеграл по поверхности сферы Ω_r, т. е. по поверхности $|x| = r$, выражается формулой

$$\iint\limits_{|x|=r} f\, d\Omega = \iint\limits_{|x|=r} f r^{n-1}\, d\omega = \frac{d}{dr} K(r). \tag{2}$$

Если функция f не зависит от $x_n = p$, то мы имеем

$$\iint\limits_{|x|=r} f\, d\Omega = \iint\limits_{\rho \leqslant r} r f(x_1, \ldots, x_{n-1}) \frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \tag{3}$$

Еще более важен тот случай, когда функция f зависит только от одной переменной x_1, или, в более общем случае, от скалярного произведения x на некоторый вектор β; мы будем применять обозначение

$$(x, \beta) = (x\beta) = p\,|x|.$$

В силу того что наш интеграл инвариантен относительно вращения, мы можем взять $p = \beta_n$. Тогда формулы (1) и (2) при $r = 1$ дают следующую важную формулу

$$\iint\limits_{\beta^2 = 1} f(x\beta)\, d\beta = \omega_{n-1} \int\limits_{-1}^{+1} f(p\,|x|)(1 - p^2)^{(n-3)/2}\, dp \tag{4}$$

(здесь мы пишем $d\beta$ вместо $d\omega_n$). При получении этой формулы мы рассматриваем пересечение шара $|\beta| \leqslant r$ с плоскостью $\beta_n = p$, вводим полярные координаты и предполагаем, что $f = f(p\,|x|)$, где $p\,|x| = (x\beta)$, например с $p = \beta_n$. Тогда на рассматриваемом сечении мы имеем $d\beta_1 \ldots d\beta_{n-1} = \rho^{n-2}\, d\rho\, d\omega_{n-1}$. Интеграл от функции f по сечению равен $[1/(n-1)](r^2 - p^2)^{(n-1)/2}\, \omega_{n-1} f(p\,|x|)$, откуда немедленно получается формула (4).

Надо обратить внимание на то, что формула (4) имеет различный характер для четных и нечетных n, так как множитель $(1 - p^2)^{(n-3)/2}$ в подинтегральной функции рационален для нечетных n и иррационален для четных n.

Отметим некоторые частные случаи: $f = 1$ дает

$$\omega_n = \omega_{n-1} \int\limits_{-1}^{+1} (1 - p^2)^{(n-3)/2}\, dp = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, \omega_{n-1}.$$

Функция $f = \log(|\beta x|)$ дает

$$\iint\limits_{\beta^2 = 1} \log|x\beta|\, d\beta = \omega_{n-1} \int\limits_{-1}^{+1} \log(p\,|x|)(1 - p^2)^{(n-3)/2}\, dp,$$

или, как легко вычислить,

$$\int\limits_{\beta^2=1}\int \log|x\beta|\,d\beta = \omega_n \log|x| + c, \tag{4a}$$

где c — постоянная. Для $f = |x\beta|$ мы получим

$$\int\limits_{\beta^2=1}\int |x\beta|\,d\beta = 2\omega_{n-1}\int\limits_0^1 |x|\,p\,(1-p^2)^{(n-3)/2}\,dp,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{\beta^2=1}\int |x\beta|\,d\beta = \frac{2\omega_{n-1}}{n-1}\,|x|. \tag{4б}$$

Эти формулы дают для функций $|x|$ и $\log|x|$ представление в виде суперпозиции плоских волн.

Формулы (4a) и (4б) вместе с основной формулой теории потенциала позволяют получить разложение произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на плоские волны, т. е. на функции, зависящие только от линейной комбинации (αx) пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$, где α — единичный вектор. Это разложение имеет следующий вид:

$$4\,(2\pi)^{n-1}\,(-1)^{(n-1)/2}\,f(z) = \Delta_z^{(n+1)/2}\int\int f(x)\,|((x-z)\,\alpha)|\,d\alpha\,dx \tag{5}$$

для нечетных n и

$$(2\pi)^n\,(-1)^{(n-2)/2}\,f(z) = \Delta_z^{n/2}\int\int f(x)\log|((x-z)\,\alpha)|\,d\alpha\,dx \tag{5'}$$

для четных n, причем Δ_z^{ν} обозначает ν-ю итерацию оператора Лапласа, взятого по переменным z, а интегрирование распространено на единичную сферу $\alpha^2 = 1$ и на все пространство x. Можно предполагать, что функция $f(x)$ обращается в нуль для больших значений $|x|$, так что не будет возникать трудностей, связанных с вопросом о сходимости интеграла при $|x| \to \infty$.

Формулы (5) дают разложение функции $f(z)$ на плоские волны, зависящие только от $(x-z,\ \alpha)$.

Для того чтобы доказать их, мы напомним теорему Пуассона из теории потенциала (см. гл. IV, § 2). Функция

$$w(z) = \frac{1}{(2-n)\,\omega_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f(x)\,|z-x|^{2-n}\,dx \quad \text{для } n > 2, \tag{6}$$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f(x)\log|z-x|\,dx \qquad \text{для } n = 2 \tag{6'}$$

является решением уравнения Пуассона $\Delta_z w = f(z)$. Здесь Δ_z обозначает оператор Лапласа относительно независимых переменных z.

Далее, элементарные вычисления дают

$$\Delta^{(n-1)/2}|x| = (-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-1)!}{2-n}|x|^{2-n} \text{ для нечетных } n, \tag{7}$$

$$\Delta^{(n-2)/2}\log|x| = \frac{2^{n-2}(-1)^{(n-2)/2}}{2-n}\left(\left(\frac{n-2}{2}\right)!\right)^2|x|^{2-n} \text{ для четных } n. \tag{7'}$$

Эти формулы вместе с (4а) и (4б) сразу дают представления (5) и (5′), если подобрать соответствующим образом постоянные множители. Мы просто должны выразить $|x|^{2-n}$ в формуле Пуассона через формулы (7), (7′), заменить $|x|$ на $|z-x|$, а затем вынести итерированный оператор Лапласа за знак интеграла.

Используя аппарат обобщенных функций, мы можем найти очень сжатую форму для только что доказанных соотношений; мы дадим ее здесь и будем пользоваться ею позднее, в § 15.

Сначала мы напомним, что соотношения (6) и (6′) можно записать в виде

$$\delta(x) = \begin{cases} \Delta\dfrac{1}{(2-n)\,\omega_n}\dfrac{1}{|x|^{n-2}} & \text{для } n>2, \\ \dfrac{1}{2\pi}\Delta\log x & \text{для } n=2, \end{cases} \tag{6*}$$

где $\delta(x) = \delta(x_1, \ldots, x_n)$ — дельта-функция в n-мерном пространстве; тогда формулы (7) и (7′) дают

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \delta(x) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\alpha^2=1}\delta^{(n-1)}(x, \alpha)\,d\alpha \text{ для нечетных } n; \tag{8}$$

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \delta(x) = \frac{(-1)^{(n+2)/2}}{(2\pi)^n}\int\limits_{\alpha^2=1}\log^{(n)}|(x, \alpha)|\,d\alpha \text{ для четных } n. \tag{9}$$

Здесь $\delta(x, \alpha)$ — дельта-функция, зависящая только от одной переменной (x, α), $\delta^{(n-1)}$ — ее $(n-1)$-я производная, а производную

$$\log^{(n)}|z| = \frac{d^n}{dz^n}\log|z| \tag{10}$$

надо понимать как обобщенную функцию.

Следующий изящный метод, принадлежащий Джону [4] и Гельфанду и Шилову [1], позволяет получить общее выражение для четных и нечетных n. Мы рассмотрим для действительных значений z главное значение функции $\log z = \log|z| + i\pi(1-\eta(z))$, где η — функция Хевисайда. Тогда последовательные

производные этой функции, если понимать их как обобщенные функции, можно записать в виде

$$\frac{d \log z}{dz} = \log^{(1)}(z) = \frac{1}{z} - \pi i \delta(z),$$

$$\frac{d^2 \log z}{dz^2} = \log^{(2)}(z) = -\frac{1}{z^2} - \pi i \delta'(z).$$

В этих обозначениях представления (8) и (9) можно объединить формулой

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \delta(x) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{|\alpha|=1} \log^{(n)}(x, \alpha)\, d\alpha, \qquad (11)$$

справедливой [1]) для произвольных n.

Это очень интересное и полезное разложение дельта-функции на плоские волны.

Доказательство состоит просто в надлежащей интерпретации полученных ранее результатов. Формула Пуассона выражает $\delta(x)$ через $\Delta|x|^{2-n}$. Следовательно, функцию $\delta(x)$ можно получить с помощью многократного применения оператора Лапласа к левым частям соотношений (7), (7'), а следовательно, и к левым частям формул (4а), (4б). Согласно правилам действий над обобщенными функциями, можно применять оператор Лапласа под знаком интеграла. Одновременно мы заметим, что для любой обобщенной функции f одной переменной (αx) мы имеем

$$\Delta f(\alpha x) = f''(\alpha x).$$

Это получается с помощью прямого дифференцирования с учетом того, что $\alpha^2 = 1$. Тогда формулы (8) и (9) непосредственно получаются, если соответствующим образом подобрать постоянные коэффициенты.

§ 12. Уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Задача Коши. В соответствии с гл. III, § 3, мы рассмотрим все гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если изучим дифференциальное уравнение частного вида

$$u_{tt} - \Delta u - cu = 0 \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \qquad (1')$$

[1]) В силу симметрии области интегрирования, мнимая часть обращается в нуль.

где $\psi(x)$ есть функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с непрерывными производными по крайней мере до порядка $(n+1)/2$ в случае нечетного n и $(n+2)/2$ в случае четного n. (Чтобы понять целесообразность этого предположения, см. § 8 и данные ниже явные выражения.)

Выше было указано, что, если u есть решение задачи Коши, то $v=u_t$ также есть решение соответствующей задачи Коши, для которой начальные условия имеют вид $v(x, 0)=\psi(x)$ и $v_t(x, 0)=0$. Поэтому для того, чтобы решить задачу Коши с произвольными начальными данными для u и u_t, в силу принципа суперпозиции, достаточно найти решение задачи Коши (1').

В этом параграфе мы будем применять интеграл Фурье, чтобы получить формальное построение решения задачи Коши. Проверка результата, полученного с помощью формальных операций над интегралом Фурье, здесь пропускается, так как в последующих параграфах тот же результат будет получен различными другими методами.

Сначала мы рассмотрим только волновое уравнение $u_{tt}-\Delta u=0$ с начальными значениями $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=\psi(x)$.

В этом пункте будет получено явное решение

$$u(x, t)=\frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t (t^2-r^2)^{(n-3)/2}\, rQ(x, r)\, dr, \tag{2}$$

где

$$Q(x, r)=\frac{1}{\omega_n}\int\int_{\beta^2=1}\psi(x+\beta r)\, d\beta. \tag{3}$$

Решение имеет одинаковый вид для четных и нечетных значений числа n пространственных переменных. Но следующее представление решения показывает, что оно различным образом ведет себя для четных и нечетных n:

$$u(x, t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{(n-3)/2}\left(t^{n-2}Q\right) \quad \text{для нечетных } n, \tag{4}$$

$$u(x, t)=\frac{t}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{(n-2)/2}\left(t^{n-3}H\right) \quad \text{для четных } n, \tag{5}$$

где

$$H(x, t)=\int_0^t \frac{rQ(x, r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^2}=\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Если мы хотим получить формулу, объединяющую выражения (4) и (5), справедливую и для четных и для нечетных n, то мы должны

воспользоваться понятием дифференцирования дробного порядка. Тогда формула (4) годится для обоих случаев (см. § 13, п. 2).

2. Построение решения для волнового уравнения. В соответствии с идеями гл. III, § 5, мы попробуем записать искомое решение в виде

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int A(a)\, e^{i(ax)} \sin \rho t\, da, \tag{7}$$

где a обозначает вектор $a_1, \dots, a_n$,

$$\rho = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = |a|,$$

(a, x) — скалярное произведение a и x, а $da = da_1 \dots da_n$.

Из начального условия, заданного при $t = 0$, мы получаем с помощью дифференцирования под знаком интеграла

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \rho A(a)\, e^{i(ax)}\, da.$$

Перестановка операций здесь и дальше оправдывается с помощью непосредственной проверки результата [1]).

Формула обращения интеграла Фурье немедленно дает

$$\rho A = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \psi(\xi)\, e^{-i(a\xi)}\, d\xi. \tag{8}$$

Подставляя вместо A в формулу (7) это выражение и меняя порядок интегрирования, получим формальный результат

$$u = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \psi(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{i(a(x-\xi))} \frac{\sin \rho t}{\rho}\, da.$$

Однако для $n > 2$ внутренний интеграл в этом выражении расходится, так как в полярных координатах мы имеем $da = da_1 \dots da_n = \rho^{n-1}\, d\omega_n\, d\rho$. Мы обойдем эту формальную трудность с помощью следующего приема [2]). Для нечетных $n \geqslant 3$ мы рассмотрим выражение

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \frac{A(a)}{\rho^{n-2}}\, e^{i(ax)} \cos \rho t\, da, \tag{9}$$

---

[1]) Мы могли бы также воспользоваться понятием обобщенных функций, которые применяются в других местах этой главы; но для нашей цели это не нужно.

[2]) Применение δ-функций и других символических функций в сущности возникло из аналогичных приемов.

а для четных $n \geqslant 2$ — выражение

$$w(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \frac{A(a)}{\rho^{n-2}} e^{i(ax)} \sin \rho t \, da. \tag{9'}$$

Для нечетных $n \geqslant 3$ формальное дифференцирование дает

$$u(x,\ t) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} v(x,\ t), \tag{9a}$$

а для четных $n \geqslant 2$

$$u(x,\ t) = (-1)^{(n-2)/2} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} w(x,\ t). \tag{9a'}$$

Подставив выражение (8) вместо $A(a)$ в формулы (9) и (9′), мы можем переменить порядок интегрирования по ξ и a. В результате мы получим

$$u = \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \psi(x+\xi) K_n(r,\ t)\, d\xi \quad (d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_n), \tag{10}$$

где $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}$, а

$$K_n = \begin{cases} \dfrac{\pi\omega_{n-1}}{(2\pi)^n} \dfrac{1}{r} \left(\dfrac{t^2}{r^2} - 1\right)^{(n-3)/2} & \text{для } r < t, \\ 0 & \text{для } r > t. \end{cases}$$

Чтобы доказать этот результат, мы вычислим внутренний интеграл только для нечетных n. (В случае четных n вычисления такие же; кроме того, результат для четных n легко можно вывести из соответствующей формулы для нечетных n.) Сначала вместо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ мы введем полярные координаты $\rho = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$ и n-мерный единичный вектор β с компонентами $\beta_i = \rho^{-1} a_i$, так что $da = \rho^{n-1} d\rho\, d\beta$. Подстановка этих координат в формулы (8) и (9) и перемена порядка интегрирования дает для внутреннего интеграла в формуле (9) выражение

$$S_n(r,\ t) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} M(\rho r) \cos \rho t \, d\rho, \tag{11}$$

где $M(r)$ — среднее значение,

$$M(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega_n} \ldots \int e^{i(\beta\xi)}\, d\omega_n. \tag{12}$$

С помощью формулы (4) из § 11 получим [1])

$$M(r) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^{1} \left(1 - \lambda_1^2\right)^{(n-3)/2} e^{i\lambda_1 r}\, d\lambda_1. \tag{13}$$

В формуле (11) мы теперь положим $\rho r = s$ и получим

$$S_n(r, t) = \frac{\omega_n}{r(2\pi)^n} \int_0^\infty M(s) \cos s \frac{t}{r}\, ds = \frac{\omega_n}{2r(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} M(s)\, e^{ist/r}\, ds,$$

или, после простых преобразований, согласно (13),

$$S_n(r, t) = \frac{\omega_{n-1}}{r(2\pi)^n} \lim_{N\to\infty} \int_{-1}^{1} \left(1 - \lambda_1^2\right)^{(n-3)/2} \frac{\sin N\left(\lambda_1 + \frac{t}{r}\right)}{\lambda_1 + \frac{t}{r}}\, d\lambda_1.$$

В силу хорошо известных свойств „интеграла Дирихле", стоящего в правой части (см. т. I, стр. 73), мы имеем

$$S_n(r, t) = \begin{cases} \dfrac{\pi\omega_{n-1}}{r(2\pi)^n}\left(1 - \dfrac{t^2}{r^2}\right)^{(n-3)/2} & \text{для } r > t, \\ 0 & \text{для } r < t. \end{cases} \tag{14}$$

Но для функции v мы имели представление

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \psi(x + \xi)\, S_n(r, t)\, d\xi.$$

Вводя полярные координаты

$$r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

и следующее обозначение для среднего значения функции ψ на сфере радиуса r с центром в точке x:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n; r) = \frac{1}{\omega_n} \int \cdots \int_{\Omega_n} \psi(x + \alpha r)\, d\alpha, \tag{15}$$

в силу (14) мы будем иметь

$$v = \omega_n \int_0^\infty Q(x, r)\, r^{n-1} S_n(r, t)\, dr =$$

$$= \frac{\pi\omega_{n-1}\omega_n}{(2\pi)^n} \int_t^\infty (r^2 - t^2)^{(n-3)/2}\, r Q(x, r)\, dr.$$

[1]) Согласно т. I, стр. 408, мы, между прочим, получаем

$$M(r) = 2^{(n-2)/2}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \frac{J_{(n-2)/2}(r)}{r^{(n-2)/2}}.$$

Для нечетных $n \geqslant 3$ мы воспользуемся тождеством

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^\infty (r^2 - t^2)^{(n-3)/2} rQ(x, r)\, dr = 0. \tag{15'}$$

Так как подинтегральная функция есть полином степени $(n-3)$ по t, то его производная $(n-2)$-го порядка по t равна нулю. Вычитая (15′) из $\partial^{n-2}v/\partial t^{n-2}$, мы получим для $u = (-1)^{(n-1)/2} \partial^{n-2}v/\partial t^{n-2}$ представление

$$u(x, t) = C_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{(n-3)/2} rQ(x, r)\, dr,$$

эквивалентное представлению (10). Постоянную C_n можно найти либо из приведенных выше формул, либо просто рассматривая частный случай $\psi = 1$, $u = t$, когда $Q = 1$. Мы найдем, что $C_n = 1/(n-2)!$. Таким образом, решение задачи Коши задается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{(n-3)/2} rQ(x, r)\, dr. \tag{16}$$

Та же самая формула справедлива для четных n; ее можно получить, исходя из (9′). Однако выкладки в этом случае более громоздки, поэтому мы предпочитаем распространить формулу (16) на случай четного числа измерений с помощью прямого метода, описанного в следующем пункте.

3. Метод спуска. Метод спуска [1]) основан на следующем замечании: из решения нашей задачи для n независимых переменных можно получить как частный случай решения для $n-1$ или меньшего числа переменных. При этом мы „спускаемся" от „высшей" задачи к „низшей".

В силу теоремы единственности, мы получим решение задачи в случае $n-1$ пространственных переменных из формулы для n пространственных переменных, предположив, что начальная функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ не зависит от переменной x_n. Тогда решение u также не зависит от x_n и, следовательно, является решением задачи Коши для $n-1$ пространственных переменных. Аналогично мы можем спуститься от n пространственных переменных к $n-2$ пространственным переменным, предполагая, что начальная функция ψ зависит только от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$, и т. д.

Теперь мы применим метод спуска для того, чтобы вывести формулу (16) для четного числа переменных в предположении, что она доказана для нечетного числа переменных.

---

[1]) См. Адамар [2]. См. также гл. III, § 4, п. 4.

Мы будем исходить из $(n+1)$-мерного пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. В этом пространстве мы рассмотрим функцию $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящую только от n переменных, и ее среднее значение по сфере Ω_{n+1} радиуса r:

$$Q_{n+1}(x;\ r) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int \ldots \int_{\Omega_{n+1}} \psi(x + \alpha r)\, d\omega_{n+1},$$

где α — единичный вектор. Так как ψ не зависит от $(n+1)$-й пространственной переменной, то, в силу § 11, этот поверхностный интеграл сводится к интегралу по n-мерному шару. Имеем

$$Q_{n+1}(x;\ r) = \frac{\omega_n}{\omega_{n+1} r^{n-1}} \int_0^r \rho^{n-1}\, d\rho \int \frac{\psi(x + \rho\alpha)}{\omega_n \sqrt{r^2 - \rho^2}}\, d\omega_n.$$

Поскольку $\omega_n = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^n / \Gamma(n/2)$, получаем

$$Q_{n+1}(x;\ r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r \frac{\rho^{n-1} Q_n(x,\ \rho)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}\, d\rho, \tag{17}$$

где

$$Q_n(x,\ \rho) = \frac{1}{\omega_n} \int \ldots \int \psi(x + \alpha\rho)\, d\omega_n$$

есть соответствующее среднее значение функции ψ в n-мерном пространстве.

Таким образом, спуск на один шаг приводит к нужному результату, если произвести следующие несложные выкладки. Заменим в формуле (16) n на $n+1$ и подставим вместо $Q_{n+1}(x;\ r)$ выражение (17); после перемены порядка интегрирования и дифференцирования получим

$$u = C \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \left[t \int_0^t \rho^{n-1} Q_n(x,\ \rho)\, d\rho \int_\rho^t \frac{(t^2 - r^2)^{(n-4)/2}}{r^{n-2} \sqrt{r^2 - \rho^2}}\, dr \right],$$

где C — постоянная. Введем новую переменную интегрирования z, полагая $1 - \rho^2/r^2 = (1 - \rho^2/t^2)\, z$; тогда легко видеть, что

$$\int_\rho^t \frac{(t^2 - r^2)^{(n-4)/2}}{r^{n-2} \sqrt{r^2 - \rho^2}}\, dr = \frac{(t^2 - \rho^2)^{(n-3)/2}}{2t\rho^{n-2}} \int_0^1 z^{-1/2} (1 - z)^{(n-4)/2}\, dz. \tag{18}$$

Следовательно,

$$u = C_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t (t^2 - \rho^2)^{(n-3)/2} \rho Q_n(x,\ \rho)\, d\rho.$$

Постоянную C_n снова можно найти, рассматривая частный случай:

$$C_n = 1/(n-2)\,!.$$

Таким образом, вид решения сохраняется, если мы перейдем к меньшим значениям n. Следовательно, достаточно вывести формулу (16) только для нечетных значений n, так как к четным значениям мы можем перейти от бо́льших нечетных значений.

4. Дальнейшее изучение решения. Принцип Гюйгенса. Решение, заданное формулой (16), легко можно привести к виду (4) или (5), откуда легко получить следующий замечательный факт, касающийся принципа Гюйгенса [1]).

Обозначим через $G(t)$ произвольную λ раз непрерывно дифференцируемую функцию t и рассмотрим функции

$$U_\lambda(t) = \frac{1}{(2\lambda+1)\,!}\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial t^{2\lambda+1}}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^\lambda rG(r)\,dr \quad (\lambda = 0,\quad 1,\ \ldots). \tag{19}$$

Для функций (19) легко доказывается следующая рекуррентная формула

$$U_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda+1}\left(tU'_{\lambda-1} + 2\lambda U_{\lambda-1}\right). \tag{20}$$

Из того, что $U_0 = tG(t)$, следует

$$U_\lambda = t\sum_{\nu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\nu} t^\nu G^{(\nu)}(t), \tag{21}$$

где $a_{\lambda,\nu}$ — постоянные числа. Если обозначить через $P_\lambda(t)$ полином

$$P_\lambda(t) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\nu} t^\nu,$$

то это соотношение можно записать в символической форме

$$U_\lambda(t) = tP_\lambda(tG), \tag{22}$$

где степени G заменяются соответствующими производными. Тогда решение задачи Коши (16) для нечетного $n = 2\lambda+3$ можно записать в виде

$$u = tP_{(n-3)/2}(tQ), \tag{23}$$

где $G(t) = Q(t) = Q(x,\ t)$ — функция, ранее определенная формулой (15).

[1]) См. гл. III, § 4, п. 6.

Из этой формулы мы получим представление решения также и для четного числа n пространственных переменных, спускаясь от нечетного числа измерений $n+1$ к n; мы сразу будем иметь

$$u = tP_{(n-2)/2}(tG), \tag{23a}$$

где $G = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int \ldots \int \psi(x+\beta t)\, d\omega_{n+1}$, т. е., согласно п. 3,

$$G(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^t \frac{r^{n-1}Q(x, r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr. \tag{23'}$$

Следовательно, решение представляется через производные функции $G(x, t)$ по t до порядка $(n-2)/2$.

По аналогии с тем, как было получено выражение для нечетного числа измерений, мы могли бы дать несколько иное представление через производные выражения

$$H(x, t) = \int_0^t \frac{rQ(x, r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr, \tag{24}$$

которое удовлетворяет волновому уравнению при $n = 2$. Положим

$$U_{\lambda-1/2} = Z_\lambda = \frac{1}{(2\lambda)!} \frac{\partial^{2\lambda}}{\partial t^{2\lambda}} \int_0^t (t^2-r^2)^{\lambda-1/2}\, r\, Q(r)\, dr \tag{25}$$

и получим для Z рекуррентные формулы

$$\begin{cases} Z_\lambda = \frac{1}{2\lambda}\left[(2\lambda-1) Z_{\lambda-1} + tZ'_{\lambda-1}\right] \quad (\lambda = 1, 2, \ldots), \\ Z_0 = U_{\lambda-1/2} = H. \end{cases} \tag{26}$$

Отсюда следует формула вида

$$Z_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} b_{\lambda,\nu} t^\nu H^{(\nu)}(t) \tag{27}$$

с постоянными $b_{\lambda,\nu}$. Мы можем символически записать ее через полиномы

$$\Pi_\lambda(t) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} b_{\lambda,\nu} t^\nu$$

в виде

$$Z_\lambda = \Pi_\lambda(tH). \tag{28}$$

Следовательно, решение задачи Коши для четного числа измерений есть

$$u = \Pi_{(n-2)/2}(tH), \tag{29}$$

где

$$H(x, t) = \int_0^t \frac{rQ(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dr.$$

Формулы (23) и (29) показывают, что функция u непрерывна, если начальная функция ψ имеет непрерывные производные до порядка $(n-2)/2$ для четных n и $(n-3)/2$ для нечетных n. Возможность двукратного дифференцирования u, необходимая для того, чтобы можно было написать дифференциальное уравнение (1), обеспечивается предположением, что ψ имеет непрерывные производные до порядка $(n+1)/2$, если n нечетное, и до порядка $(n+2)/2$, если n четное[1]).

Из полученных ранее представлений следуют некоторые факты, касающиеся принципа Гюйгенса. Принцип Гюйгенса есть утверждение о том, что *значение решения задачи Коши для волнового уравнения зависит только от границы области зависимости на плоскости $t=0$, т. е. что оно зависит только от начальных значений решения u и его производных на границе основания $r=t$ характеристического конуса, но не от начальных значений внутри этого основания.* Мы напомним, что принцип, Гюйгенса справедлив для волнового уравнения с тремя пространственными переменными, но не в случае двух переменных[2]). Наши формулы показывают, что этот факт является частным случаем следующего общего правила: *принцип Гюйгенса справедлив для волнового уравнения, если число n пространственных переменных нечетное, и несправедлив, когда n четно*[3]).

Наконец, рекуррентные формулы (20), (26) легко приводят к представлениям (4), (5). Если вместо U или Z взять функции $R_\lambda = (2/\sqrt{\pi})\Gamma(2\lambda + 3/2)U_\lambda$ или $S_\lambda = (1/t)\lambda!Z_\lambda$ соответственно, то мы получим более простые рекуррентные формулы

$$R_\lambda = \lambda R_{\lambda-1} + t^2 \frac{d}{dt^2} R_{\lambda-1}, \quad R_0 = tQ(x, t),$$

$$S_\lambda = \lambda S_{\lambda-1} + t^2 \frac{d}{dt^2} S_{\lambda-1}, \quad S_0 = \frac{1}{t} H(x, t),$$

---

[1]) Независимо от нашего представления в § 10 было показано, что такое предположение достаточно для решения задачи Коши.

[2]) См. гл. III, § 4 и гл. VI, § 2.

[3]) По-видимому, это впервые было четко указано Вольтерра [1] и Тедоне [1].

где $d/dt^2 = (1/2t)(d/dt)$. Решением этих рекуррентных уравнений являются функции

$$R_\lambda = \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda+1}Q)$$

и

$$S_\lambda = \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda-1}H),$$

откуда следуют представления (4) и (5).

5. Неоднородное уравнение. Интеграл Дюамеля. Для того чтобы получить решение неоднородного уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t) \tag{30}$$

с заданной правой частью $f(x, t)$ и с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \tag{30'}$$

мы снова обратимся к *методу вариации параметров*, или „интегралу Дюамеля“, который рассматривался, например, в гл. III, § 4, п. 3. Снова предполагается, что функция f имеет непрерывные производные вплоть до порядка $(n+1)/2$ или $(n+2)/2$ соответственно. Пусть функция $v(x, t; \tau)$, зависящая от параметра τ, есть решение однородного дифференциального уравнения

$$v_{tt} - \Delta v = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$v(x, 0; \tau) = 0, \quad v_t(x, 0; \tau) = f(x, \tau).$$

Тогда

$$u = \int_0^t v(x, t-\tau; \tau)\, d\tau. \tag{31}$$

Из этого „интеграла Дюамеля“ сразу получается решение для неоднородного уравнения (30) с начальными условиями (30′). Возьмем среднее значение

$$Q(x, r; \tau) = \frac{1}{\omega_n}\int \cdots \int f(x+\beta r, \tau)\, d\omega_n;$$

мы будем иметь

$$v(x, t; \tau) = \frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t (t^2 - r^2)^{(n-3)/2} rQ(x, r; \tau)\, dr$$

и, следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^t d\tau \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^{t-\tau} [(t-\tau)^2 - r^2]^{(n-3)/2} rQ(x, r; \tau)\, dr,$$

или, если переменить порядок интегрирования и дифференцирования (законность этого легко проверить), получим

$$u(x, t) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t d\tau \int_0^\tau (\tau^2 - r^2)^{(n-3)/2} rQ(x, r; t-\tau)\, dr. \quad (32)$$

Для $n=2$ и $n=3$ получаются выражения

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint_{\rho \leqslant \tau} \frac{f(\xi, \eta; t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}}\, d\xi\, d\eta \quad (\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2) \quad (33)$$

и

$$u = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\rho \leqslant t} \frac{1}{\rho} f(\xi, \eta, \zeta; t-\rho)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$(\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2); \quad (34)$$

это соответствует результатам, полученным в гл. III.

6. Задача Коши для общего линейного уравнения второго порядка. На основании п. 5 задача Коши для общего линейного гиперболического дифференциального уравнения второго порядка может быть легко решена с помощью метода спуска. Достаточно сначала рассмотреть дифференциальное уравнение

$$\Delta u + c^2 u = u_{tt} \quad (35)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (35')$$

В силу гл. III, § 3, общий случай можно свести к этому.

Явное решение снова получается с помощью метода спуска. Мы искусственно увеличим число „пространственных" переменных до $n+1$, полагая $x_{n+1} = z$, и рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\Delta v = v_{tt} \quad (36)$$

относительно функции $v(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, t)$ с начальными условиями

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = \psi(x_1, \ldots, x_n)\, e^{cx_{n+1}} = \psi(x)\, e^{cz}. \quad (36')$$

Положим

$$v = e^{cz} u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t); \quad (37)$$

тогда u будет решением задачи Коши (35). Действительно, полученное ранее представление (16) показывает, что решение v задачи Коши (36′) имеет вид $e^{cz} u(x_1\, x_2, \ldots, x_n, t)$. Но, если мы под-

ставим функцию v в уравнение (36), то мы сразу получим, что u есть решение задачи Коши (35), (35′). В силу теоремы единственности, доказанной в § 8, может существовать только одно решение u и, следовательно, $u = ve^{-cz}$. Теперь мы можем получить представление для v, а следовательно, также и для u, с помощью формул п. 4. Таким образом, для *четных* n, а следовательно, для нечетных $n+1$ мы имеем

$$v = tP_{(n-2)/2}(tG^*),$$

где

$$G^*(t) = \frac{e^{cz}}{\omega_{n+1}} \int \cdots \int_{\Omega_{n+1}} \psi(x+\beta t)\, e^{ct\beta_{n+1}}\, d\omega_{n+1}.$$

Тогда $u = tP_{(n-2)/2}(tG)$, причем

$$G(t) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int \cdots \int_{\Omega_{n+1}} \psi(x+\beta t)\, e^{ct\beta_{n+1}}\, d\omega_{n+1}.$$

Как и ранее, через $d\omega_{n+1}$ обозначен элемент поверхности $(n+1)$-мерной единичной сферы. Так как функция ψ не зависит от последней переменной $z = x_{n+1}$, в силу того, что

$$t^{n-1}\, d\omega_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n = \frac{1}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\, \rho^{n-1}\, d\omega_n\, d\rho,$$

мы получаем соотношение

$$G(x,\ t) = \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \frac{1}{t^{n-1}} \int_{-t}^{t} \frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\, e^{c\sqrt{t^2-\rho^2}}\, Q(x,\ \rho)\, d\rho,$$

или

$$G(x,\ t) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^t \frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\, \operatorname{ch} c\sqrt{t^2-\rho^2}\, Q(x,\ \rho)\, d\rho, \tag{38}$$

где

$$Q(x,\ \rho) = \frac{1}{\omega_n} \int \cdots \int_{\Omega_n} \psi(x+\beta\rho)\, d\omega_n.$$

Аналогично, для *нечетных* n мы получаем решение

$$u = \Pi_{(n-1)/2}(tH), \tag{39}$$

где

$$H(x,\ t) = \frac{n}{t^n} \int_0^t \rho^{n-1} J_0\left(ic\sqrt{t^2-\rho^2}\right) Q(x,\ \rho)\, d\rho; \tag{40}$$

здесь J_0 — функция Бесселя порядка нуль. Действительно, в этом случае

$$v = \Pi_{(n-1)/2}(tH^*),$$

где

$$H^*(x, t) = \frac{2e^{cz}}{\omega_{n+2} t^n} \int \underset{\rho^2+\xi_{n+1}^2 \leqslant t^2}{\cdots} \int \frac{\psi(x+\xi)}{\sqrt{t^2-\rho^2-\xi_{n+1}^2}} e^{c\xi_{n+1}} d\xi_1 \ldots d\xi_{n+1}.$$

Если в этом интеграле произвести интегрирование по ξ_{n+1} от $-\sqrt{t^2-\rho^2}$ до $+\sqrt{t^2-\rho^2}$, то получится выражение $\pi J_0\left(ic\sqrt{t^2-\rho^2}\right)$, так что в соответствии с формулой (40)

$$H(x, t) = H^*(x, t)\, e^{-cz} =$$
$$= \frac{2\pi}{\omega_{n+2}} \frac{1}{t^n} \int \underset{\rho \leqslant t}{\cdots} \int \psi(x+\xi)\, J_0\left(ic\sqrt{t^2-\rho^2}\right) d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Чтобы применить этот результат к решению *телеграфного уравнения*

$$\Delta u = u_{tt} + u_t \tag{41}$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

мы положим $u = ve^{-t/2}$ и получим для v дифференциальное уравнение

$$v_{tt} = \Delta v + \frac{v}{4}, \tag{42}$$

которое совпадает с (35) при $c = \frac{1}{2}$.

Например, при $n = 1, 2, 3$ решение телеграфного уравнения имеет вид

$$u = e^{-t/2} \int_0^t J_0\left(\frac{i}{2}\sqrt{t^2-\rho^2}\right) Q(x, \rho)\, d\rho,$$

$$Q(x, \rho) = \frac{1}{2}[\psi(x+\rho) + \psi(x-\rho)] \qquad \text{для } n = 1,$$

$$u = e^{-t/2} \int_0^t \rho \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2}\sqrt{t^2-\rho^2}}{\sqrt{t^2-\rho^2}} Q(x, \rho)\, d\rho, \tag{43}$$

$$Q(x, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_2} \psi(x_1 + \rho\beta_1, x_2 + \rho\beta_2)\, d\omega_2 \qquad \text{для } n = 2,$$

$$u = e^{-t/2} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \rho^2 J_0\left(\frac{i}{2}\sqrt{t^2-\rho^2}\right) Q(x, \rho)\, d\rho,$$

$$Q(x, \rho) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_3} \psi(x_1 + \rho\beta_1, x_2 + \rho\beta_2, x_3 + \rho\beta_3)\, d\omega_3 \qquad \text{для } n = 3.$$

7. Задача излучения [1]. Результат, полученный в п. 5, позволяет нам найти решение *задачи излучения* для общего волнового уравнения с n пространственными переменными; это делается посредством простого предельного перехода [2]. Мы сформулируем задачи излучения следующим образом.

Для $t > 0$ мы ищем такое решение однородного волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$, которое при $t = 0$ обращается в нуль вместе со своей производной u_t всюду, кроме начала координат в пространстве x, и которое при $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = 0$, т. е. на „оси времени", имеет такую особенность, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \ldots \int \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = -g(t). \tag{44}$$

Здесь в момент t интегрирование происходит по сфере K_ε с центром в начале координат в пространстве x. Через $\partial/\partial\nu$ обозначается дифференцирование по нормали к сфере, ds — элемент поверхности, а радиус сферы ε стремится к нулю. Здесь $g(t)$ есть заданная как функция времени *интенсивность излучения*.

Мы можем более кратко сформулировать задачу излучения как задачу о решении неоднородного „дифференциального уравнения" [3])

$$u_{tt} - \Delta u = g(t)\,\delta(x,\ y,\ z) \tag{44'}$$

с однородными начальными условиями (30'); $\delta(x, y, z)$ здесь трехмерная дельта-функция, которую мы ввели выше.

Мы попытаемся построить решение с помощью предельного перехода, используя решения неоднородных уравнений. В частности, пусть $u = u_h$ — решение уравнения (30) с $f(x, t) = \psi(x) g(t)$, где $\psi = 0$ для $r > h$, $\psi \geqslant 0$ для $r < h$ и $\int\limits_{r \leqslant h} \ldots \int \psi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 1$.

Здесь $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Искомое решение задачи излучения получается как предел решений u_h при $h \to 0$. В результате получим, что

$$u_h = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int\limits_0^t g(t-\tau)\, d\tau \int\limits_0^\tau (\tau^2 - s^2)^{(n-3)/2} s Q(x,\ s)\, ds,$$

где $Q(x, s) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\Omega_n} \ldots \int \psi(x + \beta s)\, d\omega_n$. Если мы запишем внутрен-

---

[1]) Изложение близких вопросов см. в работе Вайнштейна [2].

[2]) См. § 15, где дано более общее и подробное изложение.

[3]) Ниже (в § 14 и 15) мы будем систематически пользоваться δ-функцией; здесь мы воспользуемся более классическим методом.

ний интеграл в виде

$$\int_0^\tau (\tau^2 - s^2)^{(n-3)/2} sQ(x, s)\, ds = \frac{1}{\omega_n} \int \dots \int_{s \leqslant \tau} \frac{(\tau^2 - s^2)^{(n-3)/2}}{s^{n-2}} \psi(\xi)\, d\xi$$

$$(s^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2)$$

и перейдем к пределу при $h \to 0$, то получим

$$\lim_{h\to 0} \int_0^\tau (\tau^2 - s^2)^{(n-3)/2} sQ(x, s)\, ds = \begin{cases} 0 & \text{для } r \geqslant \tau, \\ \dfrac{(\tau^2 - r^2)^{(n-3)/2}}{\omega_n r^{n-2}} & \text{для } r < \tau. \end{cases}$$

Следовательно, искомое решение задачи излучения таково: для $r \geqslant t$

$$u = 0,$$

а для $r < t$

$$u = \frac{1}{\omega_n (n-2)!} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_r^t g(t - \tau)(\tau^2 - r^2)^{(n-3)/2}\, d\tau$$

или

$$u = \frac{1}{\omega_n (n-2)!} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^{t-r} g(\tau)\left[(t-\tau)^2 - r^2\right]^{(n-3)/2} d\tau. \qquad (45)$$

Для $n = 2$ и $n = 3$ (см. гл. III, § 4) мы снова получаем соответственно

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, d\tau \qquad (46)$$

и

$$u = \frac{1}{4\pi r} g(t - r). \qquad (47)$$

В случае $n = 5$ имеем

$$u = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r^3} [(g(t - r) + rg'(t - r)],$$

а в случае $n = 4$

$$u = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, d\tau.$$

С помощью вычислений, вполне аналогичных тем, которые были проведены в п. 4, решение задачи излучения можно записать[1]) в более компактном виде

$$u(x,\ t)=\frac{(-1)^{(n-3)/2}}{4\pi^{(n-1)/2}}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{(n-3)/2}\frac{g(t-r)}{r}\quad \text{для нечетных } n, \tag{48}$$

$$u(x,\ t)=\frac{(-1)^{(n-2)/2}}{2\pi^{n/2}}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{(n-2)/2}H(t-r)\quad \text{для четных } n, \tag{49}$$

причем $H(t-r)=\int\limits_r^t\left[g(t-\tau)/\sqrt{\tau^2-r^2}\right]d\tau$. Заметим, что результаты этого пункта останутся справедливыми, если $t-r$ заменить на $t+r$. Надо также отметить, что решения (48) и (49) задачи излучения можно прелставить в виде сумм

$$u=\frac{r^{2-n}}{4\pi^{(n-1)/2}}\sum_{\nu=1}^{(n-3)/2}a_{\nu,n}(2r)^{\nu}g^{\nu}(t-r)\quad \text{для нечетных } n \tag{50}$$

и

$$u=\frac{r^{2-n}}{2^{n-1}\pi^{n/2}}\sum_{\nu=1}^{(n-2)/2}b_{\nu,n}(2r)^{\nu}H^{\nu}(r,\ t)\quad \text{для четных } n \tag{51}$$

с постоянными $a_{\nu,n}$, $b_{\nu,n}$.

Выражения вида (50) называются бегущими волнами высшей степени $(n-3)/2$ (см. § 4 и далее § 18).

Снова с помощью исследования наших представлений мы получаем подтверждение следующего замечательного результата: *принцип Гюйгенса справедлив для задачи излучения с нечетным числом n пространственных переменных*[2]). В точке x в момент t влияние возмущения, исходящего из начала координат, зависит только от характера этого возмущения в один предыдущий момент времени, а именно в момент $t-r$. Возмущение, распространяющееся из начала координат с единичной скоростью, доходит до точки x как раз в момент t. Таким образом, импульсы, исходящие из начала координат и резко локализованные во времени, т. е. представляемые с помощью функций $g(t)$, отличных от нуля только на малом интервале времени, воспринимаются в любой точке

---

[1]) Подробное рассмотрение этой задачи см. в § 18, п. 3. Заметим также, что, применяя обобщенные функции и дробные производные, можно получить выражение, объединяющее формулы (48) и (49).

[2]) Безусловно, принцип Гюйгенса для задачи Коши и принцип Гюйгенса для задачи излучения эквивалентны.

на расстоянии r от начала координат только в течение короткого интервала времени, начинающегося на r единиц времени позже.

Однако принцип Гюйгенса несправедлив для задачи излучения в случае четного числа пространственных измерений.

Это непосредственно видно из формулы (49). В этом случае резко локализованное во времени возмущение в начале координат не может быть обнаружено в точке, отстоящей на расстояние r от начала координат, раньше, чем через r единиц времени. Однако после этого момента влияние в этой точке остается заметным. Другими словами, решение, вообще говоря, остается отличным от нуля при $t > r$. Таким образом, в пространстве четного числа измерений невозможен четкий прием передаваемых сигналов, удовлетворяющих волновому уравнению. В этом случае сигналы всегда будут расплываться. Этот факт и дальнейшие соображения (см. § 18) показывают, что трехмерное пространство, в котором мы существуем, замечательно тем, что в нем можно передавать резкие сигналы без искажения.

§ 13. Метод сферических средних. Волновое уравнение и уравнение Дарбу

Теперь мы проведем обоснование результатов § 12, применяя другой метод[1]) решения задачи Коши.

1. Дифференциальное уравнение Дарбу для средних значений. Мы будем рассматривать среднее значение произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x)$ от n переменных x_i

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) = v(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int \ldots \int \psi(x + \beta r)\, d\omega \tag{1}$$

по сфере Ω_r радиуса r с центром в точке x. В этом интеграле β обозначает единичный вектор с компонентами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$; кроме того, $d\omega = d\omega_n = d\beta$ — элемент поверхности на единичной сфере, а $d\Omega = r^{n-1}\, d\omega$ — элемент поверхности на сфере радиуса r с центром в точке x. Тогда среднее значение функции v удовлетворяет *дифференциальному уравнению Дарбу*[2]) (см. § 6, п. 2)

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r - \Delta v = 0 \tag{2}$$

с начальными условиями

$$v(x, 0) = \psi(x), \qquad v_r(x, 0) = 0. \tag{2'}$$

---

[1]) См. Джон [4].

[2]) См. работу Вайнштейна [2], где теория уравнения Дарбу обобщается на случай, когда $(n-1)$ заменяется произвольным параметром λ.

Следовательно, функцию v можно однозначно продолжить для отрицательных r как непрерывно дифференцируемое решение этого уравнения, полагая

$$v(-r) = v(r).$$

Мы сформулируем этот факт следующим образом: *функция v есть решение уравнения Дарбу, четное относительно переменной r.*

Для доказательства мы вычислим с помощью интегральной теоремы Гаусса[1]) функцию

$$v_r(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int \underset{\Omega_n}{\cdots} \int \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) d\omega = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int \cdots \int \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\Omega_r =$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int \int \underset{G_r}{\cdots} \int \Delta\psi \, dx,$$

где G_r — внутренность сферы Ω_r, dx — элемент объема, $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, а $\partial/\partial\nu = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\partial/\partial x_i)$ обозначает дифференцирование по внешней нормали к сфере Ω_r.

Дальнейшее дифференцирование по r дает

$$v_{rr} = -\frac{n-1}{\omega_n r^n} \int \underset{G_r}{\cdots} \int \Delta\psi \, dx + \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int \underset{\Omega}{\cdots} \int \Delta\psi \, d\Omega =$$

$$= -\frac{n-1}{r} v_r + \Delta v,$$

откуда следует наше утверждение.

Если мы предположим, в частности, что наша функция

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1)$$

зависит только от одной переменной $x = x_1$ и что она дважды непрерывно дифференцируема по x, то в силу § 11, п. 2 ее среднее значение может быть записано в виде

$$v(x, r) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^{1} \varphi(x + r\mu)(1 - \mu^2)^{(n-3)/2} \, d\mu \tag{3}$$

и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r - v_{xx} = 0. \tag{4}$$

Из § 6, п. 2 мы делаем вывод, что формулы (1) и (3) дают решение задачи Коши соответственно для уравнений Дарбу (2) и (4) с начальными условиями (2′).

---

[1]) См. примечание редактора на стр. 637. — *Прим. ред.*

2. Связь с волновым уравнением. Имеется взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения Дарбу и волнового уравнения. Дифференцируя формулу (3) дважды по x, мы будем иметь

$$v_{xx}=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\varphi''(x+r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\,d\mu.$$

Следовательно, из уравнения Дарбу получим

$$\frac{n-1}{r}v_r+v_{rr}=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\varphi''(x+r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\,d\mu.$$

В этой формуле параметр x, который добавляется к $r\mu$, несуществен. Поэтому мы получаем следующий результат.

Если функции $v(r)$ и $\varphi(r)$ связаны между собой интегральным преобразованием

$$v(r)=\int_{-1}^{1}\varphi(r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\,d\mu, \tag{5}$$

то

$$v''+\frac{n-1}{r}v'=\int_{-1}^{1}\varphi''(r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\,d\mu. \tag{6}$$

Таким образом, операции φ'' над функцией $\varphi(r)$ здесь соответствует операция $v''+(n-1)v'/r$, примененная к $v(r)$.

Мы можем применять формулу (6), если $\varphi(s)$ зависит не только от одного параметра x, а от n параметров $x_1, \ldots, x_n$; тогда мы будем рассматривать функции

$$v(r, x_1, \ldots, x_n)=\int_{-1}^{1}\varphi(x_1, \ldots, x_n, r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\,d\mu.$$

Теперь мы установим следующую связь между волновым уравнением и уравнением Дарбу. Пусть $u(x_1, \ldots, x_n, t)$—дважды непрерывно дифференцируемое решение волнового уравнения, такое, что $u_t(x, 0)=0$, т. е. решение „четное относительно t“. Тогда, заменяя t на r, мы будем иметь четное решение

$$v(x, r)=v(x_1, \ldots, x_n, r)=$$
$$=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}u(x_1, \ldots, x_n, r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\,d\mu,$$

такое, что

$$v(x, 0)=u(x, 0)=\psi(x), \quad v_r(x, 0)=0.$$

Если мы воспользуемся найденным выше результатом, то получим дифференциальное уравнение

$$\Delta v = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\Delta u(x,\ r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\,d\mu =$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1} u_{tt}(x,\ r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\,d\mu = v_{rr} + \frac{n-1}{r}\,v_r.$$

Начальные условия $v(x,\ 0)=\psi$, $v_r(x,\ 0)=0$ удовлетворяются в силу того, что v определяется как сферическое среднее.

В соответствии с п. 1, решение задачи Коши для уравнения Дарбу определяется формулой

$$v(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ r) = \frac{1}{\omega_n}\int\ldots\int_{\Omega_n}\psi(x+r\beta)\,d\omega.$$

Таким образом, решение u волнового уравнения, четное относительно $t=r$, должно удовлетворять соотношению

$$\frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{0}^{1} u(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int\ldots\int_{\Omega_n}\psi(x+r\beta)\,d\omega. \qquad (7)$$

Наоборот, из этого соотношения мы можем теперь единственным образом получить решение u волнового уравнения. Задача сводится к обращению функционального уравнения (5): подстановка в (5) $r=\sqrt{s}$, $r\mu=\sqrt{\sigma}$ дает

$$v\left(\sqrt{s}\right)\, s^{(n-2)/2} = \int_{0}^{s}\frac{\varphi\left(\sqrt{\sigma}\right)}{\sqrt{\sigma}}(s-\sigma)^{(n-3)/2}\,d\sigma.$$

Применяя сокращенные обозначения $w(s)=v\left(\sqrt{s}\right)s^{(n-2)/2}$, $\chi(\sigma)=$ $=\varphi\left(\sqrt{\sigma}\right)/\sqrt{\sigma}$, получаем

$$w(s) = \int_{0}^{s}\chi(\sigma)(s-\sigma)^{(n-3)/2}\,d\sigma. \qquad (8)$$

Если n — *нечетное*, то единственное решение определяется формулой

$$\left(\frac{n-3}{2}\right)!\,\chi(s) = \left(\frac{d}{ds}\right)^{(n-1)/2} w(s); \qquad (9)$$

следовательно,

$$\varphi(r)=\frac{1}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\,r\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{(n-1)/2}(r^{n-2}v(r)). \tag{10}$$

Если n *четное*, то обращение осуществляется с помощью „дробного" дифференцирования порядка $(n-1)/2$. Мы получим

$$\chi(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n/2}\int\limits_0^s\frac{w(\sigma)}{\sqrt{s-\sigma}}\,d\sigma; \tag{11}$$

поэтому

$$\varphi(r)=\frac{2r}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{n/2}\int\limits_0^r\frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}(\rho^{n-2}v(\rho))\,d\rho. \tag{12}$$

Таким образом, полагая $\varphi(r)=u(x,\ r)\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}$, мы получаем решение задачи Коши для волнового уравнения $\Delta u-u_{tt}=0$ в случае *четного* n в виде

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{d}{dt^2}\right)^{n/2}\int\limits_0^t\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}(r^{n-2}Q(x,\ r))\,dr, \tag{13}$$

где

$$Q(x,\ r)=\frac{1}{\omega_n}\int\ldots\int\psi(x+r\beta)\,d\omega, \tag{14}$$

а в случае *нечетного* n — в виде

$$u(x,\ t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,t\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{(n-1)/2}(t^{n-2}Q(x,\ t)). \tag{15}$$

Таким образом, мы нашли явные выражения для решения волнового уравнения. Легко установить их тождество с представлениями § 12, если принять во внимание видоизмененное начальное условие. Итак, мы теперь обосновали различные формулы § 12, п. 1, которые все свелись к уравнению (10) этого параграфа. Между прочим, было бы достаточно ограничиться доказательством формулы (15) только для нечетных n.

3. Задача излучения для волнового уравнения. Из результатов, установленных в п. 2, мы можем также получить интересный вывод формул для решений, соответствующих *процессам излучения*. Сначала мы будем искать решения волнового уравнения, зависящие только от $r^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ и от времени t. Такие решения $u(r,\ t)$ должны

быть четными по r и должны удовлетворять дифференциальному уравнению (см. гл. III, § 3)

$$u_{tt} - \frac{n-1}{r} u_r - u_{rr} = 0, \tag{16}$$

являющемуся уравнением Дарбу (2), в котором переменились роли пространственной переменной x и временно́й переменной t. В соответствии с п. 1, решение этого уравнения дается формулой

$$u(r, t) = \int_{-1}^{1} \varphi(t + r\mu)(1 - \mu^2)^{(n-3)/2} d\mu \tag{17}$$

с произвольной функцией φ. Для нечетных n разложение степенной функции в подинтегральном выражении в соответствии с биномиальной формулой дает

$$u(r, t) = \frac{1}{r^{n-2}} \sum_{\nu=0}^{(n-3)/2} c_\nu r^{n-3-2\nu} (-1)^\nu \int_{-r}^{r} \varphi(t + \rho) \rho^{2\nu} d\rho, \tag{18}$$

где c_ν — биномиальные коэффициенты. Если g — любая функция, такая, что $(d^{n-2}/dx^{n-2}) g(x) = \varphi(x)$, то мы можем интегрировать по частям. Получим

$$u(r, t) = \frac{1}{r^{n-2}} \sum_{\nu=0}^{(n-3)/2} A_\nu r^\nu ((-1)^\nu g^{(\nu)}(t + r) - g^\nu(t - r)), \tag{19}$$

где $g^{(\nu)}$ обозначает ν-ю производную функции g и где коэффициенты A_ν можно определить[1]), например, с помощью подстановки в формулу (16). Кроме того, члены

$$\frac{1}{r^{n-2}} \sum (-1)^\nu A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t + r) \quad \text{и} \quad \frac{1}{r^{n-2}} \sum A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t - r)$$

каждый в отдельности также удовлетворяют волновому уравнению, так как значение g в точке $t + r$ не зависит от значения g в точке $t - r$, за исключением случая $r = 0$.

4. Обобщенные бегущие сферические волны. Сферические бегущие волны, имеющие вид $u = \varphi(t - r)/r$ в пространстве трех измерений, обладают аналогом в пространстве любого нечетного числа измерений[2]). Обозначим волновой оператор $\partial^2/\partial t^2 - \Delta$ через $\Box$. Мы

---

[1]) Мы получим (ср. § 12, п. 7)

$$A_\nu = \binom{(n-3)/2}{\nu} \frac{2^\nu}{\nu!} \Big/ \binom{n-3}{\nu}.$$

[2]) Это интересное замечание принадлежит Фридрихсу.

утверждаем, что для нечетного n функции

$$u = \Box^{(n-1)/2}\varphi(t-r)$$

с произвольной формой волны φ являются решениями волнового уравнения

$$\Box u = 0.$$

Для $n=1, 3, 5$ мы находим следующие решения:

$$\varphi(t-r); \quad 2(\varphi'(t-r)/r) = f(t-r)/r, \quad \text{где} \quad f = 2\varphi';$$
$$(8/r^3)\varphi'(t-r) + (8/r^2)\varphi''(t-r).$$

Последнее решение является не просто относительно неискажающейся бегущей волной, а суперпозицией двух таких волн.

Это утверждение немедленно следует из тождества [1])

$$\Box^{(n+1)/2}\varphi(t-r) = 0,$$

которое можно проверить непосредственно, но лучше получить из более общего тождества, выполняющегося для оператора

$$L_n[u(r, t)] = u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r - u_{tt}. \tag{20}$$

Для нечетных n и произвольных g обе функции $g(t+r)$ и $g(t-r)$ удовлетворяют $(n+1)/2$ раз итерированному уравнению Дарбу

$$L_n^{(n+1)/2}[u] = 0. \tag{21}$$

Чтобы доказать это утверждение, мы сначала покажем, что для произвольной функции φ и целого числа $\nu \geqslant 0$ справедливо соотношение [2])

$$L_n \int_{-1}^{1} \varphi(t+r\mu)(1-\mu^2)^{\nu}\, d\mu = d_{n,\nu} \int_{-1}^{1} \varphi''(t+r\mu)(1-\mu^2)^{\nu+1}\, d\mu, \tag{22}$$

где $(\nu+1)d_{n,\nu} = (n-3)/2 - \nu$. Если обозначить интеграл в левой части через $w(r, x)$, то в силу п. 1

$$L_{2\nu+3}[w] = 0$$

и так как $L_n = L_{2\nu+3} + [(n-(2\nu+3))/r](d/dr)$, имеем

$$L_n[w] = \frac{n-(2\nu+3)}{r}w_r = \frac{n-(2\nu+3)}{r}\int_{-1}^{1} \varphi'(t+r\mu)(1-\mu^2)^{\nu}\mu\, d\mu.$$

---

[1]) По разным поводам А. Вайнштейн указывал обобщения этого тождества. См., например, его статью [3].

[2]) В п. 1 этот результат получен для частного случая $\nu = (n-3)/2$.

Нужный нам вид правой части получается интегрированием по частям.

Последовательно применяя формулу (22), мы получаем

$$L_n^{(n-1)/2} \int_{-1}^{1} \varphi(t + r\mu)\, du =$$
$$= d_{n,0} d_{n,1} \ldots d_{n,(n-3)/2} \int_{-1}^{1} \varphi^{n-1}(t + r\mu)(1-\mu^2)^{(n-1)/2}\, d\mu.$$

Здесь правая часть обращается в нуль, так как $d_{n,(n-3)/2} = 0$. Следовательно, для любой функции φ, обладающей непрерывными производными до порядка $n-1$ включительно,

$$L_n^{(n-1)/2} \int_{-1}^{1} \varphi(t + r\mu)\, d\mu = 0. \tag{23}$$

Для $\varphi = g''$ мы имеем

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t + r\mu)\, d\mu = \frac{g'(t+r) - g'(t-r)}{r} =$$
$$= \frac{1}{n-1} L_n [g(t+r) + g(t-r)],$$

откуда в силу (23) получается утверждение (21).

Следовательно, наше исходное утверждение доказано, так как в случае сферической симметрии оператор Дарбу совпадает с оператором $\square$.

§ 13а. Решение задачи Коши для уравнения упругих волн с помощью сферических средних

Метод сферических средних в трехмерном пространстве (см. § 13) приводит к изящному решению задачи Коши для уравнения четвертого порядка, описывающего распространение волн в изотропной упругой среде [1]).

Малая упругая деформация, переводящая точку x бесконечной среды в точку ξ, может быть записана в виде

$$\xi_i = x_i + u^i(x_1, x_2, x_3, t),$$

или, в векторных обозначениях,

$$\xi = x + u(t).$$

---

[1]) В этом параграфе мы позволим себе пользоваться обозначениями, применяемыми в теории упругости, что облегчит сопоставление полученных результатов с соответствующей литературой.

Связь между напряжениями и деформациями (см. т. I, гл. IV) для тензора напряжений t^{ij} записывается в виде

$$t^{ij} = \lambda\delta^{ij}\theta + \mu\left(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}\right),$$

где λ, μ — постоянные упругой среды, δ^{ij} — символ Кронекера, а

$$\theta = \operatorname{div} u = \sum_i u^i_{x_i}.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\sum_j t^{ij}_{x_j} = \mu\,\Delta u^i + (\lambda + \mu)\,\theta_{x_i} = \rho u^i_{tt}, \tag{1}$$

или

$$\mu\,\Delta u + (\nu + \mu)\operatorname{grad}\theta = \rho u_{tt}, \tag{2}$$

где ρ — плотность. Вводя скорости c_1, c_2 с помощью формул

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \qquad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

и операторы второго порядка

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\,\Delta, \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2\,\Delta,$$

мы легко можем получить для θ уравнение

$$L_1[\theta] = 0.$$

Для вектора u мы получим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$L_1 L_2 [u] = 0. \tag{3}$$

Таким образом, для тензора напряжений мы имеем уравнение

$$L_1 L_2 [t^{ij}] = 0 \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3).$$

Попутно мы заметим, что можно найти частные решения уравнения (3) при следующем предположении:

$$t^{ij} = 0 \qquad \text{для} \qquad i \neq j.$$

Тогда для

$$\sum_i t^{ii} = p = (3\lambda + 2\mu)\,\theta$$

мы получим

$$L_1[\theta] = L_1[p] = 0.$$

Эти решения соответствуют волнам сжатия только с нормальным давлением p и без напряжений сдвига.

С другой стороны, волны сдвига без сжатия представляются решениями, для которых

$$\theta = 0, \quad L_2[u] = 0$$

или

$$L_2[t^{ik}] = 0.$$

Так как L_1 и L_2 являются волновыми операторами, характеристический конус лучей для уравнения (3) состоит из двух концентрических круговых конусов. Замечательно, что задачу Коши для уравнения (3) с начальными векторами

$$u(x, 0) = F_0(x), \quad u_t(x, 0) = F_1(x) \tag{4}$$

можно решить и проанализировать с помощью сферических средних, как это было сделано для трехмерного волнового уравнения.

Сначала из (2) и (4) мы получаем начальные значения при $t = 0$ для функций u_{tt}, u_{ttt}, просто подставляя значение $t = 0$ в уравнение

$$u_{tt} = c_2^2 \Delta u + (c_1^2 - c_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} u$$

и в дифференциальные уравнения, полученные из него дифференцированием:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, 0) &= c_2^2 \Delta F_0 + (c_1^2 - c_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} F_0 = F_2(x), \\ u_{ttt}(x, 0) &= c_2^2 \Delta F_1 + (c_1^2 - c_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} F_1 = F_3(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь введем сферические средние по сферам радиуса r с центром в точке x следующим образом:

$$I(x, r, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t)\, d\omega_\xi, \tag{6}$$

$$\varphi_i(x, r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi|=1} F_i(x + r\xi)\, d\omega_\xi \qquad (i = 0, 1, 2, 3); \tag{7}$$

I и φ рассматриваются как четные функции r. Мы имеем

$$I(x, 0, t) = u(x, t), \quad \varphi_i(x, 0) = F_i(x).$$

В силу наших прежних вычислений (§ 13, п. 1) мы имеем

$$\Delta(rI) = (rI)_{rr}, \quad \Delta(r\varphi_i) = (r\varphi_i)_{rr};$$

кроме того, при $t = 0$ мы имеем начальные значения

$$\frac{d^i}{dt^i} I = \varphi_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Взяв среднее значение в уравнении (3), мы сразу получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)(rI) = 0 \tag{3a}$$

Теперь можно получить явное решение уравнения (3а) с начальными условиями (7). Действительно, для любой фиксированной точки x функция $rI(r, t)$, которая в силу развитой выше теории определяется однозначно, может быть представлена в виде

$$rI(r, t) = G_1(r + c_1 t) + G_2(r - c_1 t) + G_3(r + c_2 t) + G_4(r - c_2 t).$$

Четыре сферические волны G определяются начальными условиями при $t = 0$:

$$\begin{aligned} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 &= r\varphi_0, \\ c_1 G_1' - c_1 G_2' + c_2 G_3' - c_2 G_4' &= r\varphi_1, \\ c_1^2 G_1'' + c_1^2 G_2'' + c_2^2 G_3'' + c_2^2 G_4'' &= r\varphi_2, \\ c_1^3 G_1''' - c_1^3 G_2''' + c_2^3 G_3''' - c_2^3 G_4''' &= r\varphi_3. \end{aligned}$$

Сначала мы рассмотрим случай, когда

$$F_0 = F_1 = F_2 = 0, \qquad F_3 = F,$$

так что

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = \varphi.$$

Мы найдем, что G_1 — четная функция

$$G_1(r) = \frac{1}{4c_1\left(c_1^2 - c_2^2\right)} \int_0^r (r - s)^2 s\varphi(s)\, ds$$

и что

$$G_2(r) = -G_1(r), \qquad G_3(r) = -\frac{c_1}{c_2} G_1(r), \qquad G_4(r) = \frac{c_1}{c_2} G_1(r).$$

Обозначим решение, соответствующее начальным значениям 0, 0, 0, F, через $U(F)$; тогда мы получим

$$U(F) = U(x, t) = I(x, 0, t) = 2G_1'(c_1 t) - \frac{2c_1}{c_2} G_1'(c_2 t);$$

следовательно,

$$U(F) = V(F) - W(F),$$

где

$$V(F) = \frac{1}{c_1\left(c_1^2 - c_2^2\right)} \int_0^{c_1 t} (c_1 t - s)\, s\varphi(s)\, ds,$$

$$W(F) = \frac{1}{c_2\left(c_1^2 - c_2^2\right)} \int_0^{c_2 t} (c_2 t - s)\, s\varphi(s)\, ds.$$

Здесь функции V и W удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} V(F) = c_1^2 \Delta V(F) = V\left(c_1^2 \Delta F\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} W(F) = c_2^2 \Delta W(F) = W\left(c_2^2 \Delta F\right).$$

Это соответствует разложению волны на безвихревую, или дилатационную часть ($\operatorname{rot} U = 0$), и соленоидальную часть ($\operatorname{div} U = 0$), распространяющиеся соответственно со скоростями c_1 и c_2.

Кроме того, мы можем написать, что

$$U(F) = \frac{1}{c_1\left(c_1^2 - c_2^2\right)} \left[\int_0^{c_2 t} \varphi(s) \frac{c_1 - c_2}{c_2} s^2\, ds + \int_{c_2 t}^{c_1 t} \varphi(s)\left(c_1 st - s^2\right) ds \right];$$

следовательно,

$$4\pi c_1\left(c_1^2 - c_2^2\right) U(F) = \iiint\limits_{|\xi| < c_2 t} \frac{c_1 - c_2}{c_2} F(x + \xi)\, d\xi + \\ + \iiint\limits_{c_2 t < |\xi| < c_1 t} \frac{c_1 t - |\xi|}{|\xi|} F(x + \xi)\, d\xi.$$

Решение u, соответствующее общим начальным условиям F_0, F_1, F_2, F_3 определяется формулой

$$U\left(F_3 - \left(c_1^2 + c_2^2\right)\Delta F_1\right) + \frac{d}{dt} U\left(F_2 - \left(c_1^2 + c_2^2\right)\Delta F_0\right) + \\ + \frac{d^2}{dt^2} U(F_1) + \frac{d^3}{dt^3} U(F_0).$$

Тогда, согласно (5),

$$u = U\left(-c_1^2 \Delta F_1 + \left(c_1^2 - c_2^2\right)\operatorname{grad}\operatorname{div} F_1\right) + \\ + \frac{d}{dt} U\left(-c_1^2 \Delta F_0 + \left(c_1^2 - c_2^2\right)\operatorname{grad}\operatorname{div} F_0\right) + \frac{d^2}{dt^2} U\left(F_1\right) + \frac{d^3}{dt^3} U\left(F_0\right).$$

Отсюда сразу можно получить следующий замечательный факт: решение не зависит от начальных значений внутри сферы радиуса $c_2 t$, так как выражение $-c_1^2 \Delta F_1 + \left(c_1^2 - c_2^2\right)\operatorname{grad}\operatorname{div} F_1$ является дивергенцией. Следовательно, *область зависимости в строгом смысле не содержит внутренности меньшей сферы радиуса $c_2 t$ вокруг точки x.*

В самом деле, область зависимости представляет собой сферический слой между этой сферой и внешней сферой радиуса $c_1 t$ (см. § 15, п. 4).

§ 14. Метод плоских средних значений. Применение к общим гиперболическим уравнениям с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы обращаемся к общему методу, позволяющему исследовать произвольное гиперболическое уравнение или систему с постоянными коэффициентами. В соответствии с вводными замечаниями, сделанными в § 11, п. 1, будет получено представление

для решения задачи Коши в виде суперпозиции плоских волн [1]), что позволяет обойти трудности, связанные с переменой порядка операций. Кроме того, более тонкий анализ в следующем параграфе позволит снять предположение о постоянстве коэффициентов [2]).

1. Общий метод. Пусть $L[u]$ — произвольный линейный гиперболический дифференциальный оператор порядка k относительно функции $u = u(x_1, \ldots, x_n, t) = u(x, t)$. Мы рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$L[u] = g(x_1, \ldots, x_n, t), \tag{1}$$

где функция g по крайней мере $k/2$ раз дифференцируема. Начальные значения задаются для функции u и ее первых $k-1$ производных:

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i} = u_{t^i}(x_1, \ldots, x_n, 0) = h_{(i)}(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$
$$i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

причем $h_{(i)}$ — функции, гладкие в пространстве x. Так как оператор $L[u]$ гиперболический, область зависимости для любой фиксированной точки $(x_1, \ldots, x_n, t)$ ограничена; следовательно, мы можем без ограничения общности считать, что функции g, $h_{(i)}$ и u равны нулю вне некоторой большой сферы в пространстве x.

Задачу для уравнения (1) можно свести к задачам для гиперболических уравнений только с двумя независимыми переменными. Такое сведéние производится с помощью интегрирования уравнения (1) по $n-1$ переменным x, например по $x_2, \ldots, x_n$; тогда при наших предположениях все члены, содержащие производные по любой из этих переменных, пропадут. Следовательно, останется дифференциальное уравнение относительно функции двух переменных

$$U(x_1, t) = \int \ldots \int u \, dx_2 \ldots dx_n.$$

Можно проделать это в более общем виде: выберем произвольный единичный вектор

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

и вместо $x_1, \ldots, x_n$ введем новую ортогональную систему координат $y_1, \ldots, y_n$, где

$$y_1 = (\alpha x) = \alpha x = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu = p, \tag{3}$$

[1]) См. Курант и А. Лакс [1], стр. 501.

[2]) Хотя рассуждения § 15 более общие, чем те, которые приводятся здесь, данный вариант метода кажется оправданным, так как он является более прямым.

а $y_2, \ldots, y_n$ — другие линейные комбинации переменных x_ν, согласованные с этим выбором y_1. Затем мы рассмотрим интегралы от функции u (или других функций) по плоскостям $p = \text{const}$ с нормалью α. Эти интегралы мы будем обозначать следующим образом:

$$I(p, t, \alpha) = I(p, t, \alpha, u) = \int\limits_{(x\alpha) = p} \int u(x, t)\, dS_\alpha, \tag{4}$$

где dS_α — элемент поверхности на такой плоскости. Можно также написать

$$I(p, t, \alpha) = \frac{\partial}{\partial p} \int\int\limits_{(x\alpha) \geqslant p}\int u(x, t)\, dx, \tag{4а}$$

где интеграл берется по полупространству $(x\alpha) \geqslant p$. Или, применяя δ-функцию Дирака, мы можем получить

$$I(p, t, \alpha) = \int\int\int u(x, t)\, \delta((x\alpha) - p)\, dx, \tag{4б}$$

где интеграл формально распространен на все пространство x. Если гиперплоскость содержит фиксированную точку z, то мы имеем $p = (z, \alpha)$ и

$$I(p, t, \alpha) = \int\limits_{(x - z,\, \alpha) = 0} \int u\, dS_\alpha = \int\int\int u(x, t)\, \delta((x - z), \alpha)\, dx. \tag{4в}$$

Теперь, если уравнение (1) проинтегрировать по $y_2, \ldots, y_n$, то все производные по пространственным переменным, кроме производных по переменной p, обращаются в нуль в силу того, что на бесконечности функция u и все ее производные равны нулю. Таким образом мы получим дифференциальное уравнение для новой неизвестной функции $I(p, t, \alpha)$, зависящей только от двух переменных p, t (α здесь параметр):

$$L^\alpha(I(p, t, \alpha)) = g(p, t, \alpha). \tag{5}$$

Правая часть уравнения (5) определяется формулой

$$g(p, t, \alpha) = I(p, t, \alpha, g(x, t)), \tag{6}$$

а начальные значения при $t = 0$ имеют вид

$$I(p, \alpha) = I(p, 0, \alpha, h(x)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} I(p, t, \alpha) = I(p, 0, \alpha, h_{k-1}(x)). \tag{7}$$

В силу определения гиперболичности, данного в гл. III, V, VI, легко видеть, что полученное уравнение (5) будет гиперболическим при любом выборе α. Следовательно, для любого α уравнение (5)

и условия (7) составляют разрешимую задачу Коши для неизвестной функции $I(p, t, \alpha)$ от двух независимых переменных. Тогда эту функцию можно построить с помощью методов гл. V. Мы предположим, что это уже сделано для каждого единичного вектора α и, кроме того, что полученное решение $I(p, t, \alpha)$ непрерывно зависит от α [1]).

После этого остается задача о восстановлении функции $u(x, t)$, если известны ее интегралы по плоскостям I^{α} [2]). Мы поступим следующим образом: для $p=(z\alpha)$ построим интегралы $I((z\alpha), t)$ для всех плоскостей $(x\alpha)=(z\alpha)=p$, проходящих через фиксированную точку O с координатами $z_1, \ldots, z_n$; затем мы проинтегрируем по единичной сфере $\alpha^2=1$. Таким образом мы получим функцию

$$V(z, t)=V(z_1, \ldots, z_n, t)=\int\limits_{\alpha^2=1}\!\!\int I^{\alpha}((z\alpha), t)\, d\alpha, \tag{8}$$

где интеграл I^{α} относится к плоскости $(x\alpha)=(z\alpha)=p$. Поэтому, очевидно, функцию V можно выразить как среднее значение от функции u с некоторым весом, причем вес w зависит только от расстояния между x и z: $|x-z|=[(x_1-z_1)^2+\ldots+(x_n-z_n)^2]^{1/2}=r$, т. е.

$$V(z, t)=\int\int\mathop{\ldots}\limits_{-\infty}^{\infty}\int u(x_1, \ldots, x_n, t)\, w(|x-z|)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{9}$$

где $w=w(r)$ — положительная функция; точнее,

$$V(z, t)=\omega_{n-1}\int\ldots\int \frac{u(x, t)}{|x-z|}\, dx, \tag{10}$$

причем интеграл берется по всему пространству.

Чтобы доказать формулу (10) (см. также § 15, п. 2), мы в формуле (4) заменим u на произвольную функцию $f(z)$. Тогда получим

$$I^{\alpha}=\omega_{n-1}\int\limits_0^{\infty} r^{n-2} f(r)\, dr,$$

где ω_{n-1} — элемент поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы. Интегрируя по α, мы в силу (8) получим

$$V=\omega_n\omega_{n-1}\int\limits_0^{\infty} r^{n-2} f(r)\, dr.$$

---

[1]) Последнее предположение нетривиально; существуют случаи, когда оно не выполняется. Однако надо подчеркнуть, что это предположение выполняется тривиальным образом, если мы постулируем существование и непрерывность решения u и имеем в виду только получение представления.

[2]) См. Джон [4], стр. 7—13.

С другой стороны, имеем

$$V = \omega_n \int_0^\infty f(r)\, r^{n-1} w(r)\, dr.$$

Поскольку функция $f(r)$ произвольна, мы делаем вывод, что $w(r) = \omega_{n-1}(1/r)$.

Теперь предположим, что число пространственных переменных n нечетно. Тогда решение u можно легко найти, применяя итерированный оператор Лапласа к обеим частям равенства (10). Заметив, что оператор Лапласа (по z или по x) от любой степени $|z-x|^k$ есть просто постоянная (зависящая от n и k), умноженная на $|z-x|^{k-2}$, мы получим

$$\Delta^{(n-3)/2} V(x, t) = b_n \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \frac{u(z_1, \ldots, z_n, t)}{|z-x|^{n-2}}\, dz_1 \ldots dz_n, \quad (11)$$

где b_n зависит только от n. Интеграл Пуассона, введенный в гл. IV, § 2, показывает, что оператор Лапласа от правой части равен

$$\Delta_x \int \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \frac{u(z_1, \ldots, z_n, t)}{|z-x|^{n-2}}\, dz_1 \ldots dz_n = a_n u(x_1, \ldots, x_n, t), \quad (12)$$

где a_n — еще одна постоянная, зависящая от n, а Δ_x — оператор Лапласа по x. Подставив в (12) значение интеграла из (11) и объединив константы, мы найдем для нечетных n следующее явное решение нашей исходной задачи Коши:

$$u(x, t) = C_n \Delta_x^{(n-1)/2} V(x, t). \quad (13)$$

Множитель C_n легко определить:

$$C_n = \frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}} = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} (-1)^{(n-1)/2}. \quad (13a)$$

Вид решения (13) наводит на мысль, что он может быть сохранен и для четных n, если соответствующим образом определить дробные степени оператора Лапласа. Мы не будем останавливаться на деталях, так как всегда можем спуститься от нечетного числа переменных x к четному; более подробное исследование случаев четного и нечетного числа переменных x будет проведено в § 15.

Наконец, подчеркнем, что результаты и методы этого параграфа можно применять также к гиперболическим системам дифференциальных уравнений. Если $L[u]$ — векторный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий на вектор u, а g — также некоторый вектор, то результат остается буквально тем же

самым. В частности, $L[u]=g$ может быть системой уравнений первого или второго порядка. Конечно, начальные данные должны задаваться в соответствии с порядком $L[u]$.

2. Применение к решению волнового уравнения. Метод п. 1 здесь будет использован для того, чтобы еще раз получить решение волнового уравнения

$$L[u] \equiv \Delta u - u_{tt} = 0 \tag{14}$$

с начальными значениями

$$u(x,\ t) = 0, \quad u_t(x,\ t) = \psi(x), \tag{15}$$

которое уже рассматривалось в § 12. Как указывалось в п. 1, без ограничения общности можно предполагать, что $\psi(x)$ обращается в нуль вне некоторой большой сферы S в пространстве x.

Во всех ранее описанных преобразованных системах координат (см. п. 1) функция $I(p,\ t) = \int\int \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(p,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ t)\,dy_2 \ldots dy_n$ удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению

$$L^\alpha[I_\alpha] \equiv I_{pp} - I_{tt} = 0 \tag{16}$$

и начальным условиям

$$I^\alpha(p,\ 0) = 0, \quad I_t^\alpha(p,\ 0) = \chi^\alpha(p), \tag{17}$$

где

$$\chi^\alpha(p) = \int \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(p,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dy_2 \ldots dy_n. \tag{18}$$

Решение уравнения (16) (см. гл. I, § 17) есть

$$I^\alpha(p,\ t) = \frac{1}{2}\int\limits_{p-t}^{p+t} \chi(\eta)\,d\eta = \frac{1}{2}\int\limits_{(p-t \leqslant \eta \leqslant p+t)} \ldots \int \psi\,d\eta\,dy_2 \ldots dy_n. \tag{19}$$

Так как ψ обращается в нуль вне S, это решение должно непрерывно зависеть от α для кусочно-гладких ψ. Тогда мы можем рассмотреть поверхностный интеграл

$$V(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t) = \int\limits_{|\alpha|=1}\int I^\alpha((\alpha x),\ t)\,d\alpha \tag{20}$$

и получить решения $u(x,\ t)$, применяя к этой формуле итерированный оператор Лапласа:

$$u(x,\ t) = C_n \cdot \Delta^{(n-1)/2} V(x,\ t), \tag{21}$$

где $C_n = 1/2\,(2\pi i)^{n-1}$.

Мы подробно произведем эти вычисления только для нечетных n; решения для случая четных n [1]) можно тогда получить с помощью метода спуска Адамара. Из формул (19) — (21) мы получаем

$$u(x,\ t) = C_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int\limits_{|\alpha|=1}\int I^{\alpha}((\alpha x),\ t)\, d\alpha =$$

$$= \frac{C_n}{2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int\limits_{|\alpha|=1}\int d\alpha \int\limits_{|\alpha\xi|\leqslant t}\int \psi(x+\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{C_n}{2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int\int \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\ldots}} \int \psi(x+\xi) K(x,\ \xi)\, d\xi, \tag{22}$$

где $K(x,\ \xi)$ определяется поверхностным интегралом

$$K(x,\ \xi) = \int\limits_{\substack{|\alpha|=1\\ |\alpha\xi|\leqslant t}} \ldots \int d\alpha \tag{23}$$

и с геометрической точки зрения представляет собой площадь пояса с высотой $2t/|\xi|$ на n-мерной единичной сфере.

Этот интеграл легко вычислить; он равен

$$K(x,\ \xi) = \chi\left(\frac{t}{|\xi|}\right), \tag{24}$$

где функция $\chi(s)$ задается формулами

$$\chi(s) = \begin{cases} 2\omega_{n-1} \int\limits_0^1 (1-\lambda^2)^{(n-3)/2}\, d\lambda = \text{const} & \text{для} \quad |s| > 1, \\ 2\omega_{n-1} \int\limits_0^{|s|} (1-\lambda^2)^{(n-3)/2}\, d\lambda & \text{для} \quad |s| < 1. \end{cases} \tag{25}$$

Подставляя (24) в (22) и вводя для среднего значения ψ на поверхности сферы радиуса r с центром в точке x обозначение

$$Q(x,\ r) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1}\int \psi(x+r\xi)\, d\xi, \tag{26}$$

мы получаем решение $u(x,\ t)$ в виде

$$u(x,\ t) = \omega_n \frac{C_n}{2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int\limits_0^{\infty} Q(x,\ r)\, \chi\left(\frac{t}{r}\right) r^{n-1}\, dr.$$

---

[1]) См. также соответствующие рассуждения в § 15, который связан с настоящим параграфом.

Если явно произвести одно дифференцирование, то получим

$$u(x,\ t)=\omega_n \frac{C_n}{2} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^\infty Q(x,\ r)\chi'\left(\frac{t}{r}\right) r^{n-2}\,dr$$

или, в силу (25),

$$u(x,\ t)=A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_t^\infty Q(x,\ r)(r^2-t^2)^{(n-3)/2}\,r\,dr, \tag{27}$$

где $A_n=\omega_{n-1}\omega_n C_n$ — снова постоянная, зависящая только от n.

Как и в § 12, п. 2, формулу (27) можно переписать в виде

$$u(x,\ t)=(-1)^{(n-1)/2} A_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t Q(x,\ r)(t^2-r^2)^{(n-3)/2}\,r\,dr. \tag{28}$$

В соответствии с принципом Гюйгенса, в оба эти выражения значения начальной функции ψ входят только через значение Q и ее первых $(n-3)/2$ производных по r при $r=t$.

Как и в § 12, п. 2, постоянный множитель можно вычислить, положив $\psi=1$, $Q=1$, $u=t$. Таким образом, для нечетных n мы получаем решение

$$u(x,\,t)=\frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t Q(x,\ r)(t^2-r^2)^{(n-3)/2}\,r\,dr, \tag{29}$$

как и в § 12, п. 2, (16). В § 12, п. 3 было показано, что эта формула справедлива и для четных значений n.

§ 14а. Применение к уравнениям кристаллооптики и к другим уравнениям четвертого порядка [1]

1. Решение задачи Коши. В соответствии с идеями § 3а задача Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающих явления кристаллооптики [2] (см. § 3, п. 3), легко сводится к задаче Коши для одного дифференциального уравнения четвертого порядка, которому удовлетворяет каждая координата векторов электрической и магнитной напряженности. Уравнение имеет вид

$$\tau^2 P(\xi,\ \tau)\,w(x,\ t)=0, \tag{1}$$

[1] См. Джон [4]; там содержится упрощенное изложение фундаментальной работы Герглотца.

[2] Мы снова будем применять специальные обозначения, принятые в этой области.

где P — однородный многочлен четвертой степени относительно $\partial/\partial x_i = \xi_i$ и $\partial/\partial t = \tau$, такой, что $P(0, \tau) = \tau^4$. Мы имеем $\tau^2 P = Q$, где Q — характеристический полином исходной системы. Решения уравнения (1) всегда порождают решения уравнения

$$P(\xi, \tau) u = 0, \tag{1a}$$

где $u = \tau^2 w$.

В этом пункте мы дадим решение задачи Коши [1]) для произвольного гиперболического уравнения (1а), если это уравнение четвертого порядка (не обязательно уравнение кристаллооптики) с начальными условиями

$$\tau^{\varkappa} u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \varkappa = 0, 1, 2, \\ f(x) & \text{для} \quad \varkappa = 3. \end{cases} \tag{2}$$

Как легко видеть, решение задачи Коши для уравнения (1а) с произвольными начальными данными, а также задачи Коши для исходной системы строится с помощью комбинации таких решений и их производных (см. § 3а, п. 5).

Пусть ξ — некоторый вектор, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а λ — скаляр; характеристическое уравнение для уравнения (1а) имеет вид

$$P(\xi, \lambda) = 0. \tag{3}$$

Для любого действительного вектора ξ уравнение (3) должно иметь четыре действительных корня, так как уравнение (1) — гиперболическое. Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая, когда корни различны для всех ξ, кроме, может быть, конечного числа единичных векторов ξ, причем для этих особых ξ не могут встречаться корни кратности выше двух [2]). Тогда мы сможем получить явное решение задачи Коши. Частный случай

$$P(\xi, \tau) = F(\xi, \tau) = \tau^4 - \Psi(\xi)\tau^2 + \rho^2\Phi(\xi), \tag{4}$$

где $\rho^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, соответствующий кристаллооптике, удовлетворяет этим условиям (см. § 3а, п. 3).

Как и ранее, предположим, что функция $f(x)$ обращается в нуль для точек x вне некоторого шара. Переходя к переменным y_1, y_2,

---

[1]) Для читателя может быть полезным произвести вычисления с применением δ-функции, как в § 15. Можно также решить эту задачу с помощью прямого применения интеграла Фурье (см. гл. III, § 5, и эту главу, § 12).

[2]) Что такое ограничение не обязательно, показано Джоном [4], гл. II. Однако надо еще раз повторить, что трудности, связанные со случаем кратных характеристических элементов, еще не полностью преодолены, так что надо удовлетворяться анализом частных классов задач.

y_3 с $y_1=(\alpha x)$, мы установим, что интеграл по плоскости

$$I^\alpha(y, t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int u(y, y_2, y_3, t)\,dy_2\,dy_3 \tag{5}$$

удовлетворяет уравнению

$$P(\alpha\eta, \tau)I^\alpha(y, t)=0, \tag{6}$$

где

$$\eta=\frac{\partial}{\partial y}.$$

Кроме того, I^α удовлетворяет начальным условиям

$$\tau^\varkappa I^\alpha(y, 0)=\begin{cases}0 & \text{для } \varkappa=0,\ 1,\ 2,\\ f^\alpha(y) & \text{для } \varkappa=3,\end{cases} \tag{7}$$

где

$$f^\alpha(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int f(y, y_2, y_3)\,dy_2\,dy_3. \tag{8}$$

Мы обозначим четыре корня λ уравнения $P(\alpha, \lambda)=0$ через $\lambda_j=$ $=\lambda_j(\alpha)$, где $j=1, 2, 3, 4$. В силу однородности P легко видеть, что любая линейная комбинация вида

$$I^\alpha(y, t)=\sum_{j=1}^{4} w_j(y+\lambda_j t) \tag{9}$$

с произвольными функциями w_j удовлетворяет уравнению (6). Чтобы удовлетворить начальным условиям (7), мы рассмотрим сначала такие α, для которых все четыре корня λ_j различны.

Для любого многочлена четвертой степени относительно λ со старшим коэффициентом, равным единице, и с различными корнями справедливы тождества Ньютона

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{(\lambda_j)^\varkappa}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j)}=\begin{cases}0 & \text{для } \varkappa=0,\ 1,\ 2,\\ 1 & \text{для } \varkappa=3,\end{cases} \tag{10}$$

откуда следует, что надо выбрать

$$w_j(y)=\frac{g^\alpha(y)}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j)}, \tag{11}$$

где $g^\alpha(y)$ — любая функция, такая, что

$$\eta^3 g^\alpha(y)=f^\alpha(y). \tag{12}$$

Итак, в случае различных λ решение задачи (6), (7) дается формулой

$$I^{\alpha}(y, t)=\sum_{j=1}^{4} \frac{g^{\alpha}(y+\lambda_j t)}{P_{\lambda}(\alpha, \lambda_j)}. \tag{13}$$

Из формулы (13) могло бы показаться, что решение I^{α} зависит от выбора g^{α}. Однако это не так, поскольку условие (12) позволяет изменять g^{α} только на некоторую квадратичную функцию от y, а из (10) следует, что добавление к g^{α} квадратичного слагаемого не влияет на величину решения I^{α}, определяемого формулой (13).

Кроме того, из (8) следует, что $f^{\alpha}(y)=0$ равномерно по α для достаточно больших $|y|$. Поэтому существуют такие решения $g^{\alpha}(y)$ уравнения (12), которые обращаются в нуль при достаточно больших положительных y, а также другие решения, равные нулю для больших отрицательных y. Поскольку I^{α} не зависит от конкретного выбора g^{α}, отсюда следует, что для любого фиксированного t и для всех α решение $I^{\alpha}(y, t)$ тождественно равно нулю для достаточно больших $|y|$. С помощью аналогичных рассуждений можно заключить, что I^{α} есть непрерывная функция α там, где λ_j различны.

Пользуясь этой непрерывностью, мы теперь найдем I^{α} для тех изолированных значений α, которые соответствуют кратным корням λ_j. Предположим, например, что для некоторого частного значения $\alpha=\alpha^*$ корни λ_1 и λ_2 совпадают. Тогда для α, близких к α^*, существует корень λ' уравнения $P_{\lambda}(\alpha, \lambda)=0$, лежащий между λ_1 и λ_2. Поэтому первые два члена формулы (13) можно переписать в виде

$$\frac{g^{\alpha}(y+\lambda_1 t)-g^{\alpha}(y+\lambda' t)}{P_{\lambda}(\alpha, \lambda_1)}+\frac{g^{\alpha}(y+\lambda_2 t)-g^{\alpha}(y+\lambda' t)}{P_{\lambda}(\alpha, \lambda_2)}+ \\ +g^{\alpha}(y+\lambda' t)\left[\frac{1}{P_{\lambda}(\alpha, \lambda_1)}+\frac{1}{P_{\lambda}(\alpha, \lambda_2)}\right].$$

Если мы это сделаем для каждого α, близкого к α^*, и перейдем к пределу при $\alpha \to \alpha^*$, то для особого значения $\alpha=\alpha^*$ мы получим следующую функцию I^{α}:

$$I^{\alpha}(y, t)=\frac{2\,\mathrm{th}^{\alpha}(y+\lambda_1 t)}{P_{\lambda\lambda}(\alpha, \lambda_1)}-\frac{2g^{\alpha}(y+\lambda_1 t)\,P_{\lambda\lambda\lambda}(\alpha, \lambda_1)}{3\,[P_{\lambda\lambda}(\alpha, \lambda_1)]^2}+\sum_{j=3}^{4} \frac{g^{\alpha}(y+\lambda_j t)}{P_{\lambda}(\alpha, \lambda_j)}, \tag{14}$$

где $h^{\alpha}(y)=\eta g^{\alpha}(y)$.

Мы должны еще проверить, что функция I^{α} удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и начальным условиям (7). Непосредственная подстановка в уравнение (6) показывает, что оно удовлетворяется. Функция I^{α} удовлетворяет также условиям (7) и не

зависит от выбора g^{α}, что следует из предельной формы тождеств Ньютона в случае $\lambda_2 = \lambda_1$:

$$\frac{2\varkappa(\lambda_1)^{\varkappa-1}}{P_{\lambda\lambda}(\alpha, \lambda_1)} - \frac{2(\lambda_1)^{\varkappa} P_{\lambda\lambda\lambda}(\alpha, \lambda_1)}{3P^2_{\lambda\lambda}(\alpha, \lambda_1)} + \sum_{j=3}^{4} \frac{(\lambda_j)^{\varkappa}}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j)} = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \varkappa = 0,\ 1,\ 2, \\ 1 & \text{для} \quad \varkappa = 3. \end{cases} \qquad (15)$$

Так как, по построению, (14) является непрерывным продолжением выражения (13), то все условия, необходимые для применения метода § 14, п. 1, выполняются[1]).

Применяя к равенствам (9) общий метод § 14, п. 1 и учитывая, что $n = 3$, получаем

$$u(x, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta \iint\limits_{|\alpha|=1} I^{\alpha}(\alpha x, t)\, d\alpha = -\frac{1}{8\pi^2} \iint\limits_{|\alpha|=1} \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta g^{\alpha}(\alpha x + \lambda_j t)}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j)} \right) d\alpha. \qquad (16)$$

Если в соответствии с формулой (12) мы положим

$$g^{\alpha}(y) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{y} (y - q)^2 f^{\alpha}(q)\, dq, \qquad (17)$$

то для $|\alpha| = 1$ и любого p мы будем иметь

$$\Delta g^{\alpha}(\alpha x + p) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha x + p} f^{\alpha}(q)\, dq, \qquad (18)$$

или в силу (8)

$$\Delta g^{\alpha}(\alpha x + p) = \iint\limits_{\alpha z < p} f(x + z)\, dz_1\, dz_2\, dz_3. \qquad (19)$$

Подставив это выражение в (16), найдем, что

$$u(x, t) = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x + z) K(z, t)\, dz_1\, dz_2\, dz_3, \qquad (20)$$

с ядром

$$K(z, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{j=1}^{4} \iint\limits_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha z \leqslant \lambda_j(\alpha) t}} \frac{d\alpha}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))}. \qquad (21)$$

[1]) Ясно, как надо изменить (14) для случая, когда корни λ_3 и λ_4 совпадают. Такой случай, когда кратные корни встречаются парами, возникает в уравнениях кристаллооптики.

В случае уравнения кристаллооптики и, вообще, в случае, когда $P(\xi, 0) \neq 0$ для всех действительных $\xi \neq 0$, корни λ_1 и λ_2 положительны для всех α, а λ_3 и λ_4 отрицательны. В любом таком случае каждый луч, проходящий через начало координат, пересекает поверхность нормалей N, соответствующую дифференциальному уравнению (1а), т. е. поверхность

$$P(\xi, 1) = 0 \tag{22}$$

в двух (возможно, совпадающих) точках. Таким образом, N состоит из двух кусков, N_1 и N_2. Эти куски параметрически задаются уравнениями $\xi = \alpha/\lambda_1(\alpha)$ и $\xi = \alpha/\lambda_2(\alpha)$ соответственно, причем параметр α пробегает поверхность единичной сферы. Согласно нашим предположениям, внутренний кусок N_1 и внешний кусок N_2 различны и могут иметь только конечное число общих точек.

Мы продолжим исследование некоторых ствойств ядра. Во-первых, из (10) непосредственно вытекает, что

$$K(z, 0) = 0. \tag{23}$$

Во-вторых, если мы перенумеруем корни $\lambda_j(\alpha)$ в порядке убывания

$$\lambda_1(\alpha) \geqslant \lambda_2(\alpha) \geqslant \lambda_3(\alpha) \geqslant \lambda_4(\alpha)$$

и заметим, что

$$\lambda_3(\alpha) = -\lambda_2(-\alpha), \quad \lambda_4(\alpha) = -\lambda_1(-\alpha), \tag{24}$$

то мы легко сможем привести K к виду, содержащему только λ_1 и λ_2, а именно

$$K(z, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{j=1}^{2} \left[\iint\limits_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha z \leqslant \lambda_j(\alpha)t}} \frac{d\alpha}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))} - \iint\limits_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha z \geqslant \lambda_j(\alpha)t}} \frac{d\alpha}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))} \right]. \tag{25}$$

2. Дальнейшее исследование решения. Область зависимости. Лакуны[1]. Теперь мы преобразуем „фундаментальное решение" K, заданное с помощью формулы (25) как интеграл по части единичной сферы, в интеграл по поверхности N. Пусть dN — элемент площади поверхности на N; через $\operatorname{grad} P$ обозначим вектор, i-я компонента которого равна $P_{\xi_i}(\xi, 1)$. С помощью проекции из начала координат легко получить, что

$$dN = |\xi|^2 \frac{|\operatorname{grad} P|}{|\alpha \operatorname{grad} P|} d\alpha. \tag{26}$$

---

[1]) Общие условия существования лакун в области зависимости даны в работе Петровского [3].

Но из однородности P следует, что

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i P_{\xi_i}(\xi, 1) + P_\lambda(\xi, 1) = 4P(\xi, 1) = 0 \tag{27}$$

для ξ, лежащих на N. Поэтому для ξ на N,

$$|\alpha \operatorname{grad} P| = \left|\sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_{\xi_i}(\xi, 1)\right| = |\xi|^{-1} \left|\sum_{i=1}^{3} \xi_i P_{\xi_i}(\xi, 1)\right| =$$
$$= |\xi|^{-1} |P_\lambda(\xi, 1)| = |\xi|^2 \left|P_\lambda\left(\alpha, \frac{1}{|\xi|}\right)\right| =$$
$$= |\xi|^2 |P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))| = \varepsilon |\xi|^2 P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha)), \tag{28}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \xi \text{ на } N_1, \\ -1, & \xi \text{ на } N_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{d\alpha}{P_\lambda(\alpha, \lambda_j(\alpha))} = \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P|}. \tag{29}$$

Кроме того, для $j = 1, 2$ величина $(\lambda_j t - \alpha z)$ имеет тот же знак, что $(t - \xi z)$. Тогда формула (25) принимает вид[1])

$$K(z, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_N \frac{\varepsilon \operatorname{sign}(t - \xi z)\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|}. \tag{30}$$

Если $\xi z \leqslant t$ для всех ξ, лежащих на N, то $K(z, t)$ тождественно равно постоянной

$$-\frac{1}{8\pi^2} \iint_N \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|}. \tag{30a}$$

Этот результат имеет место при условии, что плоскость $z\xi = t$ не пересекает внешнего куска N_2, или при эквивалентном условии, что z/t лежит внутри поверхности S_2 (S_2 — поверхность, в которую переходит выпуклая оболочка N_2 при двойственном (полярном) преобразовании относительно единичной сферы).

Обратно, если плоскость $z\xi = t$ пересекает внутренний кусок N_1, то ядро $K(z, t)$ равно нулю. Чтобы доказать это, возьмем произвольный вектор ξ_0 на этой плоскости, лежащий внутри N_1. В формуле (30) положим $\xi = \xi' + \xi_0$. Тогда интеграл, определяющий K, берется по поверхности N' с уравнением

$$P(\xi' + \xi_0, 1) = 0. \tag{31}$$

[1]) Согласно нашим предположениям, знаменатель подинтегрального выражения имеет только нули первого порядка в особых точках. Поэтому интеграл сходится.

Эта поверхность получается из N с помощью переноса, так, что градиент и элемент поверхности в соответствующих точках остаются неизменными. Следовательно,

$$K(z, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint\limits_N \frac{\varepsilon \operatorname{sign}(-\xi' z)\, dN'}{|\operatorname{grad} P(\xi' + \xi_0, 1)|}. \tag{32}$$

Но этот интеграл равен просто $\overline{K}(z, 0)$, где $\overline{K}$ — ядро, которое получилось бы из (21), если бы полином $P(\xi, \lambda)$, соответствующий исходному дифференциальному уравнению (1), мы заменили на полином

$$\overline{P}(\xi, \lambda) = P(\xi + \xi_0, \lambda). \tag{33}$$

Так как ξ_0 находится внутри N_1, то любая прямая, проходящая через ξ_0, пересекает N в четырех точках. Следовательно, $\overline{P}$ имеет четыре действительных корня λ_j для всех ξ. Поэтому к $\overline{K}$ применимо соотношение (23) и наше утверждение доказано.

Так как N — поверхность четвертого порядка и любая прямая, пересекающая N_1, должна по крайней мере два раза пересекать N_2, то ни одна прямая не может пересекать N_1 в трех точках. Поэтому поверхность N_1 выпукла [1]). Следовательно, мы можем сформулировать полученный результат следующим образом: $K(z, t) = 0$, если z/t лежит вне поверхности S_1, полученной из N_1 при двойственном преобразовании относительно единичной сферы.

Возвращаясь к решению исходного уравнения $u(x, t)$, мы возьмем точку (x, t) в качестве вершины и построим две конические поверхности C_1 и C_2 с осями, направленными в сторону убывания t. Конус C_j определяется тем свойством, что его сечение на расстоянии от вершины, равном единице, конгруэнтно S_j. Ясно, что C_2 содержится внутри C_1. Из формулы (20) мы теперь можем заключить, что область зависимости для точки (x, t) есть в точности пересечение C_1 с начальной плоскостью $t = 0$. Кроме того, подмножество этой области, которое является внутренним также и для C_2, обладает тем замечательным свойством, что каждая его точка оказывает на решение одинаковое влияние, определяемое формулой (30а).

Дело существенно упрощается, если поверхность нормалей N симметрична относительно начала координат (это будет так для уравнений кристаллооптики). В этом случае

$$\iint\limits_{\substack{N \\ \xi z \geqslant t}} \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|} = \iint\limits_{\substack{N \\ -\xi z \geqslant t}} \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|} = \iint\limits_{\substack{N \\ \xi z \leqslant -t}} \frac{\varepsilon\, dN}{|\operatorname{grad} P(\xi, 1)|},$$

[1]) Это рассуждение повторяет рассуждение, приведенное в § 3.

так что из формулы (30) имеем

$$K(z,\ t) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint\limits_{\substack{N \\ |\xi z| \leq t}} d^*N_\xi, \tag{34}$$

где величина $d^*N_\xi = \varepsilon\, dN / |\operatorname{grad} P(\xi,\ 1)|$ называется элементом „псевдоплощади" [1]) поверхности нормалей N. Таким образом, „фундаментальное решение" K с геометрической точки зрения можно истолковать как „псевдоплощадь" части поверхности N, лежащей между двумя параллельными плоскостями $z\xi = \pm t$ (см. рис. 58).

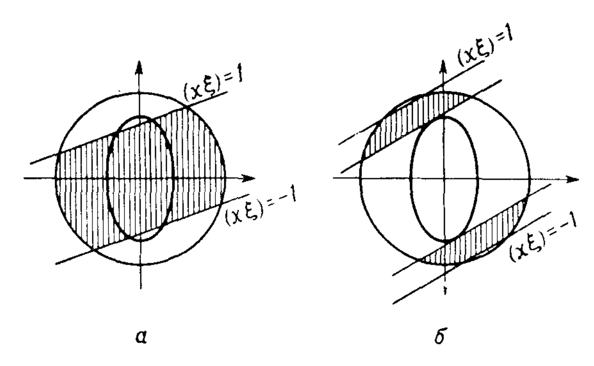


Рис. 58.

Наконец, мы обращаем внимание на тот факт, что в случае кристаллооптики наше дифференциальное уравнение четвертого порядка надо еще дважды продифференцировать по t, чтобы получить то уравнение шестого порядка, которое получается после исключения из исходной системы (7), § 3а всех неизвестных, кроме одной компоненты электромагнитного вектора. Предполагая, что выполнены соотношения (7а), § 3а, нетрудно выразить решение задачи Коши для этого вектора через дифференциальные операторы, примененные к решениям уравнения четвертого порядка (1); отсюда мы видим следующее.

Внутренняя полость конуса лучей, соответствующая внешней полости конуса нормалей, вносит в решение задачи Коши для нашего уравнения четвертого порядка значение, постоянное по времени во всех точках пространства.

Вектор, который является решением задачи Коши для уравнений кристаллооптики, в любой точке x пространства не зависит от начальных значений внутри внутренней по-

---

[1]) Этот термин был введен Герглотцем, см. Джон [4], стр. 23.

лости конуса зависимости; эта внутренность есть *лакуна*[1]). Этот результат является естественным; он выражает тот факт, что локальное возмущение в точке O в пространстве x доходит до точки x за время, соответствующее большей скорости распространения, и прекращается во время, соответствующее меньшей скорости; после прохождения более медленного фронта волны не остается никаких следов возмущения. С другой стороны, предыдущие выкладки позволяют легко прийти к следующему заключению: любая точка на начальной плоскости, находящаяся внутри выпуклой оболочки конуса лучей, но не внутри его "сердцевины", вносит в решение значение, не постоянное по времени. Это значит, что вся область между выпуклой оболочкой Γ и внутренней полостью конуса лучей действительно составляет *точную область зависимости* для решений и их производных по времени.

§ 15. Решение задачи Коши как линейный функционал от начальных данных. Фундаментальные решения

1. Описание. Обозначения. В предыдущих параграфах и раньше, в гл. V, § 5, решение задачи Коши — которое является линейным функционалом от начальных данных — было представлено в виде интеграла от некоторого произведения; один множитель задается начальными данными в области зависимости, а другой множитель, „ядро", зависит только от дифференциального оператора. В этом параграфе мы дадим широкое обобщение этих явных „римановых представлений" решений задачи Коши для линейных гиперболических уравнений произвольного порядка с произвольным числом независимых переменных, не предполагая, что коэффициенты постоянны[2]). Если порядок дифференциального уравнения достаточно высок по сравнению с числом независимых переменных (как в кристаллооптике или в магнитной гидродинамике), то ядро является обычной функцией. Если это не так, то оно может быть выражено с помощью обобщенной функции, т. е. может быть получено из непрерывной функции с помощью дифференцирования[3]).

Нашей целью является построение и исследование этого ядра Римана. Как и в гл. V, это представление позволяет выяснить более

---

[1]) См. также § 15, п. 4.

[2]) Такое представление для одного уравнения второго порядка является предметом знаменитой теории Адамара (см. п. 5). На общий случай впервые обратил внимание П. Лакс (см. Курант и П. Лакс [2]).

[3]) Роль обобщенных функций в случае более двух независимых переменных иллюстрировалась и раньше на примере решения $\delta(t-r)/r$ волнового уравнения с тремя пространственными переменными (см. § 12) с особенностью на конусе лучей. Надо отметить, что применение обобщенных функций, хотя оно удобно и изящно, не является обязательным; в § 12—14 и в работе Куранта и П. Лакса [2] показано, как можно без этого обойтись.

тонкие стороны структуры решения; в этом состоит его главное значение.

В этом параграфе предполагается[1]), что решение задачи Коши существует и единственно; при этом можно опираться на § 4 и 8—10, где были построены решения с особенностями на характеристических поверхностях.

Рассмотрим опять гиперболическую систему первого порядка относительно вектор-функции u: $u^1, \ldots, u^k$

$$L[u] = u_t + \sum_{i=1}^{n} A^i u_i + Bu = f(x, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

при $t \geqslant 0$, с начальными условиями $u(0, x) = \psi(x)$, где матрицы A^i, B и функции ψ, f достаточно гладкие. (Позже мы аналогичным образом рассмотрим системы более высокого порядка.) Мы можем считать, что векторы ψ и f обращаются в нуль при достаточно больших значениях своих аргументов. Тогда в силу теоремы единственности u также обращается в нуль при фиксированном t и при достаточно больших значениях пространственных переменных x.

Мы исходим из тождества

$$vL[u] - L^*[v]\,u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(vA^i u) + \frac{\partial}{\partial t}(vu). \tag{2}$$

Как и раньше, L^* есть оператор, сопряженный к L. Мы проинтегрируем тождество (2) по слою $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и получим

$$\int\limits_{0 \leqslant t \leqslant \tau}\!\!\int (vL[u] - L^*[v]\,u)\,dx\,dt = \int\limits_{t=\tau} vu\,dx - \int\limits_{t=0} vu\,dx. \tag{3}$$

Это соотношение справедливо, если обе функции u и v обращаются в нуль при больших значениях $|x|$. Если вместо v мы подставим решение уравнения $L^*[v] = 0$ и если $L[u] = f$, то (3) примет вид

$$\int\limits_{t=\tau} vu\,dx = \int\limits_{t=0} vu\,dx + \int\limits_{0 \leqslant t \leqslant \tau}\!\!\int vf\,dx\,dt. \tag{3a}$$

В эвристических рассуждениях мы будем применять соотношение (3) также и тогда, когда под знаком интеграла стоят обобщенные функции. Затем мы покажем, что все эти операции можно обосновать для обобщенных функций, рассматриваемых в этом параграфе[2]).

---

[1]) См., однако, замечание в конце п. 7.

[2]) Заметим, между прочим, что (3а) можно использовать для определения обобщенного решения.

В частности, мы рассмотрим в качестве v в слое, расположенном ниже τ, матрицу $R(x, t; \xi, \tau)$, удовлетворяющую уравнению

$$L^*[R]=0 \quad \text{для} \quad t<\tau, \tag{4}$$

которая при $t=\tau$ принимает „конечные значения"

$$R(x, \tau; \xi, \tau)=\delta(x-\xi)I. \tag{4a}$$

Здесь δ есть n-мерная дельта-функция, а I — единичная матрица. При таком выборе v формула (3a) принимает вид

$$u(\xi, \tau)=\int R(x, 0; \xi, \tau)\,\psi(x)\,dx+\\ +\int\int_{0\leqslant t\leqslant\tau} R(x, t; \xi, \tau) f(t, x)\,dx\,dt, \tag{5}$$

где $\psi(x)$ — начальные значения функции $u(x, t)$.

Для однородного уравнения, т. е. для случая $f=0$, мы имеем

$$u(\xi, \tau)=\int R(x, \tau_0; \xi, \tau)\,\psi(x)\,dx, \tag{5'}$$

где $u(x, \tau_0)=\psi(x)$; формулу (5) можно отсюда немедленно получить с помощью принципа Дюамеля.

Аналогично мы можем вместо $u(x, t)$ ввести матрицу $S(x, t; \xi_1, \tau_1)$, которая в слое выше $t=\tau_1$ удовлетворяет уравнению

$$L[S]=0, \quad t>\tau_1, \tag{6}$$

с начальным условием

$$S(x, \tau_1; \xi_1, \tau_1)=\delta(x-\xi_1)I \tag{6a}$$

при $t=\tau_1$.

Интегрирование тождества (2) по слою $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau$ тогда формально дает

$$\int R(x, \tau; \xi, \tau)\,S(x, \tau; \xi_1, \tau_1)\,dx-\\ -\int R(x, \tau_1; \xi, \tau)\,S(x, \tau_1; \xi_1, \tau_1)\,dx=0.$$

Пользуясь условиями (4a) и (6a), установим *закон симметрии*:

$$S(\xi, \tau; \xi_1, \tau_1)=R(\xi_1, \tau_1; \xi, \tau). \tag{7}$$

Из формулы представления (5) следует, что матрица R, если рассматривать ее как функцию ξ и τ, является фундаментальным решением для дифференциального оператора:

$$L_{\xi,\tau}[R(x, t; \xi, \tau)]=\delta(x-\xi, t-\tau)I. \tag{8}$$

Аналогично,

$$L^*_{\xi_1,\tau_1}[S(x, t; \xi_1, \tau_1)]=\delta(x-\xi_1, t-\tau_1)I. \tag{9}$$

Здесь в правой части мы имеем $(n+1)$-мерную дельта-функцию. Таким образом, функция $R(\xi_1, \tau_1; \xi, \tau)$ описывает влияние в точке (ξ_1, τ_1) обратного излучения, исходящего из источника, расположенного в точке (ξ, τ), а $S(\xi, \tau; \xi_1, \tau_1)$ описывает влияние в точке (ξ, τ) прямого излучения из источника в точке (ξ_1, τ_1). Закон симметрии утверждает, что эти влияния одинаковы, если прямое излучение описывается оператором L, а обратное — оператором L^*.

В следующем параграфе мы построим матрицу R и дадим обоснование нашего метода. Кроме того, мы докажем два важных свойства функции R. Во-первых, матрица $R(x, t; \xi, \tau)$ регулярна всюду, за исключением бихарактеристических лучей, исходящих из точки (ξ, τ), а во-вторых, $R(x, t; \xi, \tau)$ тождественно равна нулю вне коноида зависимости для точки (ξ, τ). Следовательно, в выражении (5) для решения уравнения $L[u]=f$ с условием $u(0, x)=\psi(x)$ интегрирование надо производить только по внутренности коноида зависимости Γ_P, исходящего из точки $P(\xi, \tau)$ в направлении убывания t.

Для дифференциальных операторов $L[u]$ более высокого порядка m положение совершенно аналогично. Снова римановы ядра излучения R и S можно охарактеризовать с помощью простых начальных условий, соответствующих условиям (4а) или (6а) и содержащих δ-функцию только от пространственных переменных [1]).

Например, для $m=2$ мы имеем

$$\begin{aligned} L^*[R]&=0 \quad \text{для} \quad t<\tau, \\ R=0, \quad R_t&=\delta(x-\xi) \quad \text{для} \quad t=\tau; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} L[S]&=0 \quad \text{для} \quad t>\tau, \\ S=0, \quad S_t&=\delta(x-\xi) \quad \text{для} \quad t=\tau. \end{aligned} \tag{10'}$$

Тогда формула (5) дает решение, соответствующее начальным значениям

$$u(0, x)=0, \quad u_t(0, x)=\psi(x).$$

В случае, когда данные Коши для $u, u_t, \ldots$ заданы произвольно, можно таким же образом получить представление, применяя формулу Грина. Для произвольного m не требуется дальнейших пояснений.

2. Построение функции излучения с помощью разложения δ-функции. Теперь эвристические соображения из п. 1 мы заменим прямым построением матрицы Римана R (или S, что эквивалентно). Основная идея состоит в том, что точечную особен-

[1]) Между прочим, начальные или конечные условия выделяют функции излучения из всех фундаментальных решений; это следует из единственности.

ность матрицы R мы сведем к более простым особенностям, сосредоточенным на характеристических поверхностях, и применим теорию задачи Коши, развитую в § 4 для таких особенностей. Этот метод тесно связан с методом § 14.

Пусть α — произвольный единичный вектор в n-мерном пространстве, а δ — одномерная дельта-функция. Мы будем решать задачу Коши в обратном направлении:

$$L^*[V(x, t; \xi, \tau, \alpha)] = 0$$

для $t < \tau$ с „конечным условием"

$$V(x, \tau; \xi, \tau, \alpha) = \delta((x-\xi)\alpha) I.$$

Если

$$L[u] = 0 \qquad (t > 0)$$

и $u(x, 0) = \psi(x)$, то из (3а) следует, что

$$I(\xi, \tau; \alpha; u) = \int u(x, \tau)\delta((x-\xi)\alpha)\,dx = \int V(x, 0; \xi, \tau, \alpha)\psi(x)\,dx.$$

Эта формула выражает интегралы $I(\xi, \tau; \alpha, u)$, определенные в § 14, через начальные значения функции u. В силу § 14 мы можем восстановить u по соответствующим интегралам $I(\xi, \tau; \alpha; u)$ и таким образом получить явное выражение для R.

Однако мы предпочтем несколько иной, более изящный метод, который одинаково применим к случаю четного и нечетного n. Он основан на разложении n-мерной δ-функции $\delta(x)$ на плоские волны; это разложение дано в § 11, п. 2 формулой (11). В соответствии с этим мы можем представить функцию $R(x, t; \xi, \tau)$ (которая характеризуется дифференциальным уравнением $\overset{*}{L}_{x,t}[R] = 0$ и „конечным условием" $R(x, \tau; \xi, \tau) = \delta(x-\xi)I$) в виде суперпозиции функций $U(x, t; \xi, \tau, \alpha)$, удовлетворяющих тому же самому дифференциальному уравнению $\overset{*}{L}_{x,t}U = 0$, но более простым конечным условиям

$$U(x, \tau; \xi, \tau, \alpha) = \log^{(n)}((x-\xi)\alpha)I$$

на n-мерной плоскости $t = \tau$; здесь α — произвольный единичный вектор.

Эти функции $U(x, t; \xi, \tau, \alpha) = U(\alpha)$ можно построить с помощью метода § 4. Если функции $U(\alpha)$ мы будем считать известными, то немедленно получим искомое представление для R:

$$R(x, t; \xi, \tau) = -\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\alpha^2=1} U(x, t; \xi, \tau; \alpha)\,d\alpha. \tag{11}$$

Конечно, аналогичную формулу можно написать для сопряженной матрицы Римана S. Построим с помощью метода § 4 функцию

$V(x, t; \xi, \tau; \beta)$ (где β — произвольный единичный вектор), при $t=\tau_0$ удовлетворяющую начальному условию

$$V(\beta)=V(x, t; \xi, \tau, \beta)=\log^{(n)}(x-\xi, \beta) I,$$

а при $t>\tau_0$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $L_{x, t}[V]=0$. Тогда

$$S(x, t; \xi, \tau)=-\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\beta^2=1} V(\beta)\, d\beta. \tag{11a}$$

Формулы (11) и (11a) выражают наш общий результат. Конечно, его можно записать менее формально, если в обратном порядке произвести те шаги, которые привели к формуле представления (11) из § 11, п. 2. Начальные значения $\log^{(n)}(\alpha(x-\xi))$ можно с помощью оператора Лапласа выразить в виде

$$\log^{(n)}((x-\xi)\alpha)=\Delta_\xi^{(n+2)/2}\log^{(-2)}((x-\xi)\alpha) \qquad (n \text{ четное}),$$

$$\log^{(n)}((x-\xi)\alpha)=\Delta_\xi^{(n+3)/2}\log^{(-3)}((x-\xi)\alpha) \qquad (n \text{ нечетное}),$$

где функции $\log^{(-2)}$ и $\log^{(-3)}$ непрерывны и дифференцируемы. Таким образом, мы можем представить U, а следовательно, и R, через итерированный оператор Лапласа по переменным ξ, примененный к интегралам от непрерывно дифференцируемых матриц.

Выражение обобщенных функций через производные обычных функций можно применить также к обоснованию соотношения взаимности (7), которое следует из (3) после подстановки $v=V(\beta)$ и $u=U(\alpha)$ и замены $t=0$ на $t=\tau_1$. Так как $U(\alpha)$ и $V(\beta)$ являются обобщенными функциями относительно двух различных переменных α и β, то такую подстановку делать можно. Тогда интегрирование по α и β немедленно дает закон симметрии (7).

Надо заметить, что если оператор L имеет высокий порядок, то начальные значения для U, а следовательно, и для самой римановой матрицы, получаются более высокой гладкости. По этой причине, например, матрица Римана для уравнения кристаллооптики, которое имеет четвертый порядок, является обычной функцией и ее не надо толковать как обобщенную функцию. Наконец, мы должны заметить, что из теорем единственности (§ 8, п. 9 или гл. III, приложение 3) следует, что *матрица Римана тождественно обращается в нуль вне коноида зависимости, исходящего из сингулярной конечной точки или начальной точки соответственно*. Действительно, из теоремы единственности следует, например, что функция S обращается в нуль во всех точках пространства x, t, область зависимости для которых не содержит особенности.

Предыдущую теорию почти буквально можно применить к системе L операторов высшего порядка. Рассмотрим, например, систему

второго порядка

$$L[u] \equiv u_{tt} + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} A^{\nu\mu} u_{\nu\mu} + \sum_{\mu=0}^{n} A^{\mu} u_{\mu} + Bu.$$

Тогда матрица излучения $R(x, t; \xi, \tau)$ определяется следующими соотношениями

$$L[R] = 0, \quad \text{если} \quad t > \tau, \tag{12}$$

$$R(x, \tau; \xi, \tau) = 0, \tag{13}$$

$$R_t(x, \tau; \xi, \tau) = \delta(x - \xi) I \tag{13'}$$

и может быть построена точно таким же методом как для системы первого порядка.

3. Регулярность матрицы излучения. Из символической записи предыдущих результатов легко вывести важные свойства [1]) решений и получить для решений конкретные выражения. В этом пункте мы покажем, что матрица R — а, следовательно, и S — является обобщенной функцией с особенностями, сосредоточенными на коноиде лучей с вершиной P; во всех других точках она является непрерывной функцией и имеет непрерывные производные до порядка, определяемого гладкостью коэффициентов оператора L [2]).

Для краткости мы рассмотрим систему первого порядка (1) и предположим, что коэффициенты A и B имеют непрерывные производные любых порядков. Тогда мы покажем, что *функции излучения R и S регулярны, т. е. имеют непрерывные производные любых порядков, во всех точках x, t, которые нельзя соединить с вершиной $P = (\xi, \tau)$ бихарактеристическим лучом.*

Мы будем иметь дело с интегралом вида

$$R(x, t; \xi, \tau) = -\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\alpha|=1} U(x, t; \xi, \tau, \alpha)\, d\alpha. \tag{14}$$

Сингулярная часть U состоит из суммы членов вида [3])

$$S_i(\varphi(x, t; \xi, \tau, \alpha))\, g_i(x, t; \xi, \tau, \alpha), \tag{15}$$

[1]) Надо обратить внимание на следующий факт. Если в конусе лучей встречаются изолированные или кратные лучи, то некоторые из утверждений этого пункта придется изменить. Для случая кратных характеристик общий анализ особенностей матрицы излучения на коноиде лучей и на его выпуклой оболочке до сих пор не доведен до конца; надо отдельно изучать частные классы примеров, как мы это делали раньше. Последние результаты по этому вопросу содержатся в работах Людвига [3] и Лере [3].

[2]) Некоторая модификация приведенного ниже рассуждения показывает, что R и S аналитичны всюду, за исключением коноида лучей, если коэффициенты аналитические. См. выходящую вскоре работу Людвига.

[3]) Буква S здесь применяется не в том значении, как в п. 1 и 2.

где $S = S_i$ — обобщенная функция переменной φ с особенностью в начале координат, а функции $g = g_i$ регулярны по всем своим аргументам. Достаточно исследовать гладкость отдельного члена вида

$$K = \int\limits_{|\alpha|=1} S(\varphi(x, t; \xi, \tau, \alpha))\, g(x, t; \xi, \tau, \alpha)\, d\alpha. \tag{16}$$

Зафиксируем $(x, t; \xi, \tau)$ и рассмотрим множество Ω, состоящее из всех точек сферы $|\alpha| = 1$, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi(x, t; \xi, \tau, \alpha) = 0.$$

Множество Ω компактно, и поэтому мы имеем следующую альтернативу: либо (а) градиент функции φ по координатам на сфере обращается в нуль в некоторой точке x, t из Ω, либо (б) градиент функции φ по координатам на сфере отличен от нуля в любой точке Ω.

Если выполняется условие (а), то (x, t) является точкой, принадлежащей огибающей характеристических поверхностей, проходящих через точку ξ, τ и определенных уравнениями

$$\varphi(x, t; \xi, \tau, \alpha) = 0.$$

Из теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка следует, что огибающая должна содержать луч, проходящий через точку (x, t). Этот луч пересекает плоскость $t = \tau$ в точке P, где

$$\varphi(x, \tau; \xi, \tau, \alpha) = (x - \xi)\alpha.$$

Огибающая плоскостей $(x - \xi)\alpha = 0$ состоит из одной точки $x = \xi$. Таким образом, $P = (\xi, \tau)$, и точки (x, t) и (ξ, τ) лежат на одном луче. Мы приходим к выводу, что условие (а) выполняется только в том случае, когда точки (x, t) и (ξ, τ) лежат на одном луче.

Если выполняется условие (б), то мы можем ввести φ в качестве локальной координаты на сфере в любой точке множества Ω. Тогда мы можем разбить область интегрирования в интеграле (3) так, чтобы в каждой подобласти либо (i) φ можно было ввести в качестве локальной координаты, либо (ii) φ было бы отграничено от нуля. В областях типа (ii) подинтегральная функция будет гладкой, и, следовательно, интеграл по таким подобластям также будет гладким. В подобластях типа (i) φ есть локальная координата и мы можем сколько угодно раз интегрировать по частям по переменной φ. С помощью многократного интегрирования по частям мы приходим к выражениям любой нужной гладкости. Следовательно, если выполнено условие (б), K есть гладкая функция x, t.

Таким образом, мы доказали, что имеет место следующая альтернатива: либо (а) точки (x, t) и (ξ, τ) лежат на одном луче, либо (б) $R(x, t; \xi, \tau)$ гладкая функция [1]) как переменных x, t, так и ξ, τ.

3а. Обобщенный принцип Гюйгенса. Результат п. 3 позволяет установить факт, который играет большую роль в теории гиперболических систем, описывающих передачу сигналов (см. также § 18). Классический „принцип Гюйгенса", который мы рассматривали в разных местах книги (например, см. § 12 и § 18 этой главы), утверждает, что первоначально резкие сигналы передаются как резкие сигналы, т. е. что решение дифференциального уравнения, описывающего распространение сигналов, возникающих в момент $t=0$, зависит только от начальных данных на границе коноида зависимости и не зависит от начальных данных внутри коноида. Этот принцип справедлив только при совершенно исключительных условиях, в частности для волнового уравнения с 3, 5, 7, ... пространственными переменными. Однако результат, полученный в предыдущем пункте, можно истолковать как *обобщенный принцип Гюйгенса* [2]), который утверждает, что в некотором приближенном (и в силу этого, как правило, вполне удовлетворительном) смысле гиперболическая система передает первоначально резкие сигналы как резкие сигналы, хотя и несколько размытые.

Сначала мы сформулируем такое утверждение: решение $u(P)$ системы (1) является гладким в некоторой окрестности точки P, если все лучи, проходящие через P, пересекают начальное многообразие $(t=0)$ в пределах замкнутой области G^*, в которой начальные данные гладки.

Более точно: предположим, что коэффициенты оператора $L[u]$ достаточно гладки и что начальные данные и их производные вплоть до порядка r ограничены в описанной выше области G^*; тогда решение u и его производные до порядка r будут ограничены в определенной выше точке P; оценки зависят от t и от максимумов модулей начальных данных и их производных.

Мы можем еще следующим образом описать обобщенный принцип Гюйгенса [3]): особенности решения u в точке P зависят только от особенностей начальных данных, причем лишь от тех особенностей, которые расположены на коноиде лучей, проходящих через P.

Принцип можно сформулировать более точно, если сделать некоторые предположения относительно начальных данных; например,

---

[1]) R имеет производные любого порядка, если коэффициенты оператора $L[u]$ бесконечно дифференцируемы.

[2]) Он был сформулирован П. Лаксом; см. Курант и П. Лакс [2], а также П. Лакс [4].

[3]) Как указывалось выше, в случае кратных характеристик формулировку необходимо несколько изменить.

если предположить, что начальные данные гладки всюду, кроме некоторой гладкой кривой C, на которой они имеют скачок. Тогда решение $u(P)$ будет гладким всюду, за исключением таких точек P, для которых коноид лучей, проходящий через P, касается кривой C. Если коноид имеет с C касание высокого порядка, то имеет место „фокусирование" и решение, вообще говоря, будет иметь меньше производных, чем начальные данные [1]). С качественной точки зрения обобщенный принцип Гюйгенса утверждает, что решение особенно чувствительно к передаче начальных разрывов (или других особенностей, например, резких изменений значений) по характеристическим лучам [2]).

4. Пример. Системы с постоянными коэффициентами частного вида. Теорема о лакунах. Мы будем рассматривать систему вида (1) с постоянными коэффициентами, где $B=0$ и $f \doteq 0$. Тогда решение $U(x, t;\ \xi, \tau, \alpha)$, согласно § 4, п. 6, можно построить просто как суперпозицию k плоских волн, которые сводятся к одному первому члену разложения для бегущей волны

$$U(\alpha)=\sum_{\varkappa=1}^{k} \sigma^{\varkappa} r^{\varkappa} \log^{(n)}(\lambda^{\varkappa} t+\alpha x)$$

(предполагается, что $\xi=0$), причем $\lambda^{\varkappa}=\lambda^{\varkappa}(\alpha)$ — собственные значения матрицы $\sum_{\nu=1}^{n} A^{\nu}\alpha_{\nu}$ (см. § 3), т. е. нормальные скорости, $r^{\varkappa}$ — правые нуль-векторы характеристической матрицы $\lambda^{\varkappa} I-\sum_{\nu=1}^{n} A^{\nu}\alpha_{\nu}$, а числа $\sigma^{\varkappa}$ определяются в соответствии с § 4, п. 6. Если число n нечетное, то $U(\alpha)$ с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$\sum_{\varkappa} \sigma^{\varkappa} r^{\varkappa} \delta^{(n-1)}(\lambda^{\varkappa} t+\alpha x);$$

фундаментальное решение Римана получается интегрированием по α. Далее предположим, что ни одна из скоростей $\lambda^{\varkappa}$ не равна нулю и что x/t принадлежит „сердцевине" конуса лучей; тогда очевидно, что фундаментальное решение обращается в нуль в этой сердцевине, так как для каждого α в ней равны нулю функции $\delta^{(n-1)}(\lambda^{\varkappa} t+\alpha x)$.

Таким образом мы получаем следующую замечательную общую теорему.

---

[1]) См. Людвиг [1].

[2]) Зависимость решения u от начальных данных легко исследовать, если выразить ядро R через производные от гладких функций по переменной φ ($\varphi=0$ есть уравнение полости характеристического коноида). Тогда повторное интегрирование по частям снимает особенности ядра за счет введения соответствующих производных от начальных данных.

В нечетномерном пространстве для системы вида (1) *с постоянными коэффициентами и с* $B=0$, *для которой скорость распространения нигде не равна нулю, внутренняя сердцевина конуса лучей представляет собой лакуну, т. е. не принадлежит области зависимости для вершины в строгом смысле.*

Эта теорема остается справедливой даже тогда, когда некоторые скорости $\lambda^{\varkappa}$ обращаются в нуль, если только соответствующие множители $\sigma^{\varkappa}$ также равны нулю. Как легко установить, это имеет место для уравнения кристаллооптики (см. § 14, п. 2), если выполняются условия относительно дивергенции [см. § 3а].

5. Пример. Волновое уравнение. Общая теория п. 2 содержит как частные случаи те решения задачи Коши, которые были найдены в явном виде в предыдущих параграфах. Например, представления § 14, 14а мы легко можем отождествить с только что полученным представлением. Здесь мы ограничимся несколькими простыми примерами. Сначала мы рассмотрим волновое уравнение.

Конечно, формулы (48) и (49) из § 12 немедленно дают явное выражение для R или S — эти функции совпадают в силу самосопряженности волнового оператора — если $g(\lambda)$ в этих формулах заменить на функцию Дирака $\delta(\lambda)$.

Однако мы хотим получить эти или эквивалентные им выражения из общего представления (11) в п. 2.

Пусть $S^{(n)}$ — функция Римана для волнового уравнения с $n+1$ независимыми переменными $x^1, \ldots, x^n, t$. Обобщенная функция $S^{(n)}(x, t; \xi, \tau)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$S_{tt}^{(n)} - \sum_{\nu=1}^{n} S_{\nu\nu}^{(n)} = 0 \qquad (t > \tau), \tag{17}$$

$$S^{(n)}(x, \tau; \xi, \tau) = 0, \tag{18}$$

$$S_t^{(n)}(x, \tau; \xi, \tau) = \delta(x - \xi). \tag{19}$$

Так как волновой оператор имеет постоянные коэффициенты, мы без ограничения общности можем положить $\tau = 0$ и $\xi = 0$. Функцию $S^{(n)}$ можно представить как

$$S^{(n)}(x, t) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\alpha|=1} V^{(n)}(x, t; \alpha)\, d\alpha, \tag{20}$$

где $V^{(n)}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$V_{tt}^{(n)} - \sum_{\nu=1}^{n} V_{\nu\nu}^{(n)} = 0 \qquad (t > 0), \tag{21}$$

$$V^{(n)}(x, 0; \alpha) = 0, \tag{22}$$

$$V_t^{(n)}(x, 0; \alpha) = \log^{(n)}(x\alpha). \tag{23}$$

Здесь $\log^{(n)}$ есть n-я производная логарифма в смысле обобщенных функций.

Очевидно, что

$$V^{(n)}(x,\ t;\ \alpha)=\frac{1}{2}\left[\log^{(n-1)}(t+x\alpha)-\log^{(n-1)}(-t+x\alpha)\right]; \qquad (24)$$

следовательно,

$$S^{(n)}(x,\ t)=\frac{-1}{2(2\pi i)^n}\int\limits_{|\alpha|=1}\left[\log^{(n-1)}(t+x\alpha)-\right.$$
$$\left.-\log^{(n-1)}(-t+x\alpha)\right]d\alpha. \qquad (25)$$

Из формулы (4), § 11 следует, что при $n\geqslant 2$

$$S^{(n)}(x,\ t)=\frac{-\omega_{n-1}}{2(2\pi i)^n}\int\limits_{-1}^{1}\left[\log^{(n-1)}(t+rp)-\right.$$
$$\left.-\log^{(n-1)}(-t+rp)\right](1-p^2)^{(n-3)/2}\,dp, \qquad (26)$$

где $\omega_{n-1}=(2\pi)^{(n-1)/2}/\Gamma((n-1)/2)$, а $r=|x|$. Слегка изменяя обозначения, мы будем рассматривать $S^{(n)}$ как функцию r и t.

Продифференцировав формулу (26), получим

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial r}=\frac{-\omega_{n-1}}{2(2\pi i)^n}\int\limits_{-1}^{1}\left[\log^{(n)}(t+rp)-\right.$$
$$\left.-\log^{(n)}(-t+rp)\right]p\,(1-p^2)^{(n-3)/2}\,dp. \qquad (27)$$

Теперь мы можем проинтегрировать по частям; так как внеинтегральные члены равны нулю, имеем

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial r}=\frac{-r\omega_{n-1}}{(n-1)\cdot 2\cdot(2\pi i)^n}\int\limits_{-1}^{1}\left[\log^{(n+1)}(t+rp)-\right.$$
$$\left.-\log^{(n+1)}(-t+rp)\right](1-p^2)^{(n-1)/2}\,dp. \qquad (28)$$

Простые вычисления показывают, что [1])

$$S^{(n+2)}=-\frac{1}{\pi}\,\frac{\partial S^{(n)}}{\partial(r^2)}. \qquad (29)$$

Таким образом, функция $S^{(n)}$ может быть получена с помощью рекуррентных соотношений, если известны функции $S^{(2)}$ и $S^{(3)}$.

Из (25) следует, что

$$S^{(2)}=-\frac{1}{2(2\pi i)^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\omega|=1}\left[\log(x\omega+t)+\log(x\omega-t)\right]d\omega. \qquad (30)$$

---

[1]) См. также § 12.

Вводя угловую координату θ на единичном круге, получим

$$S^{(2)}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi}[\log|r\cos\theta+t|+\log|r\cos\theta-t|]\,d\theta. \tag{31}$$

Хорошо известная формула интегрирования дает

$$S^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}\qquad (t^2>r^2). \tag{32}$$

Мы можем выразить $S^{(2)}$ как интеграл дробного порядка от δ-функции. Из определения непосредственно следует, что

$$S^{(2)}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\delta^{(-1/2)}(t^2-r^2). \tag{33}$$

Формула для $S^{(3)}$ почти сразу получается из (26). Мы имеем

$$S^{(3)}=\frac{-2\pi}{2(2\pi i)^3}\int_{-1}^{1}[\log^{(2)}(rp+t)-\log^{(2)}(rp-t)]\,dp. \tag{34}$$

Но, по определению, на действительной оси

$$\operatorname{Im}\log z=\pi(1-\eta(z)), \tag{35}$$

где η — функция Хевисайда. Тогда

$$\operatorname{Im}\log^{(2)} z=-\pi\delta'(z) \tag{36}$$

и

$$S^{(3)}=\frac{1}{2(2\pi)^2}\int_{-1}^{1}-\pi[\delta'(rp+t)-\delta'(rp-t)]\,dp, \tag{37}$$

или

$$S^{(3)}=\frac{1}{4\pi r}(\delta(t-r)-\delta(t+r)). \tag{38}$$

Из определения δ-функции следует, что

$$\delta(t^2-r^2)=\frac{1}{2r}[\delta(t-r)-\delta(t+r)], \tag{39}$$

поэтому

$$S^{(3)}=\frac{1}{2\pi}\delta(t^2-r^2). \tag{40}$$

Применяя (29), (33) и (40), получаем

$$S^{(n)}=\frac{1}{2\pi^{(n-1)/2}}\,\delta^{((n-3)/2)}(t^2-r^2). \tag{41}$$

Формула (41) дает представление решения для всех n[1]). В частности, если n больше или равно 3 и нечетно, то $S^{(n)}$ обращается в нуль всюду, кроме поверхности $t^2 - r^2 = 0$. Это и есть строгая форма принципа Гюйгенса.

6. Пример. Теория Адамара для одного уравнения второго порядка. Современная теория задачи Коши во многом опиралась на основополагающую работу Адамара [2] о гиперболических уравнениях второго порядка. Применение обобщенных функций и другие методы этой главы допускают более широкий и простой подход к вопросу, но в основе многих рассуждений этого параграфа лежат идеи Адамара, которые мы сейчас кратко изложим, несмотря на то, что применение результатов п. 2 и 3 к случаю одного уравнения второго порядка перекрывает теорию Адамара.

Достижение Адамара состояло, во-первых, в том, что было построено фундаментальное решение; это построение можно осуществить прямо, не пользуясь теми упрощениями, которые были получены в п. 2 благодаря предварительному разложению n-мерной δ-функции на плоские волны с последующим интегрированием по единичной сфере. Во-вторых, Адамар, не имея в своем распоряжении аппарата обобщенных функций, применял „конечные части“ расходящихся интегралов для вычисления выражений типа $\int_a^b \left[A(x)/(b-x)^{3/2}\right] dx$, где подинтегральные выражения понимаются не как обобщенные, а как обычные функции. Мы не будем здесь останавливаться на понятии „конечной части интеграла“ (см., однако, приложение), так как его можно обойти с помощью применения обобщенных функций. Вместо этого мы в несколько измененном виде изложим способ Адамара построения фундаментального решения.

Исходя из результатов, полученных для волнового уравнения (см. п. 4), мы рассмотрим общее аналитическое уравнение второго порядка

$$L[u] = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=0}^{n} b_i u_i + cu = 0. \tag{42}$$

Мы будем искать решения с особенностями на коноиде лучей

$$\Gamma(x, \xi) = 0,$$

где $\Gamma(x, \xi)$ — квадрат расстояния между точками x и ξ, если это расстояние измеряется в римановой метрике, связанной с уравнением.

---

[1]) Эта формула выводится и обсуждается в книге Гельфанда и Шилова [1]. Естественно, она эквивалентна результатам § 12, в частности выражениям (14) и (5), § 12.

Функция Γ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,\,k=0}^{n} a_{ik}\Gamma_i\Gamma_k = 4\Gamma, \tag{43}$$

и, следовательно, удовлетворяет характеристическому уравнению только на коноиде лучей[1]).

По аналогии с методом § 4 мы будем искать решение уравнения $L[u]=0$ в виде

$$u(x,\ \xi) \approx \sum_{\nu=0} S_\nu(\Gamma)\, g^\nu(x,\ \xi), \tag{44}$$

где

$$\frac{d}{d\Gamma} S_\nu(\Gamma) = S_{\nu-1}(\Gamma) \qquad \text{для всех } \nu; \tag{45}$$

обобщенная функция $S_0(\Gamma)$ и функции $g^\nu(x,\ \xi)$ будут определены ниже. Мы укажем несколько различий между методом Адамара и методом § 4. Во-первых, поскольку Γ не удовлетворяет характеристическому уравнению тождественно, коэффициенты $g^\nu(x,\ \xi)$ будут зависеть от выбора S_0. Во-вторых, поверхность $\Gamma=0$ имеет особенность в вершине коноида лучей ($x=\xi$). Такие особенности в § 4 исключались из рассмотрения.

Здесь наличие особенности в вершине после некоторых вычислений приводит к условию

$$\Gamma S_{-2}(\Gamma) + \left(\frac{n+1}{2}\right) S_{-1}(\Gamma) = 0 \tag{46}$$

при $\Gamma=0$; без ограничения общности мы можем потребовать, чтобы это условие выполнялось при всех значениях Γ. Тогда коэффициенты $g^\nu(x,\ \xi)$ можно определить с помощью метода, вполне аналогичного методу § 4; они будут решениями некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль геодезических, исходящих из вершины $x=\xi$. Условие, что функции g^ν должны быть регулярными в вершине $x=\xi$, позволяет определить u с точностью до постоянного множителя.

Определив все коэффициенты в выражении (44), мы можем объединить некоторые члены. Применяя соотношения (45) и (46), получаем

$$\frac{d^\nu}{(d\Gamma)^\nu}\left(\Gamma S_{\nu-2}(\Gamma)\right) = \Gamma S_{-2} + \nu S_{-1} = \left(\nu - \frac{n+1}{2}\right) S_{-1}. \tag{47}$$

Подбирая соответствующим образом постоянные интегрирования, будем иметь

$$\Gamma S_{\nu-2} = \left(\nu - \frac{(n+1)}{2}\right) S_{\nu-1} \qquad (\nu = 1,\ \ldots). \tag{48}$$

---

[1]) См. § 1 и гл. II, § 9.

Полагая $\mu=(n-1)/2$, получаем

$$S_\nu(\Gamma)=\frac{\Gamma^\nu}{(1-\mu)\dots(\nu-\mu)}S_0(\Gamma), \tag{49}$$

если знаменатель не обращается в нуль. Но при нечетном n знаменатель будет равен нулю при некотором $\nu=\mu$; ниже мы введем некоторую обобщенную функцию

$$T(\Gamma)=S_\mu(\Gamma). \tag{50}$$

Тогда для $\nu>\mu$, снова подбирая соответствующим образом постоянные интегрирования, мы будем иметь

$$S_\nu(\Gamma)=\frac{\Gamma^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}T(\Gamma). \tag{51}$$

Теперь мы можем воспользоваться формулами (49) и (51) для объединения членов в нашем разложении. Если n четно, то

$$u(x,\ \xi)=S_0(\Gamma)\,U(x,\ \xi), \tag{52}$$

где

$$U(x,\ \xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma^\nu}{(1-\mu)\dots(\nu-\mu)}g^\nu(x,\ \xi). \tag{53}$$

Если n нечетно, то

$$u(x,\ \xi)=S_0(\Gamma)\,U(x,\ \xi)+T(\Gamma)\,V(x,\ \xi), \tag{54}$$

где

$$U(x,\ \xi)=\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\frac{\Gamma^\nu}{(1-\mu)\dots(\nu-\mu)}g^\nu(x,\ \xi), \tag{55}$$

$$V(x,\ \xi)=\sum_{\nu=\mu}^{\infty}\frac{\Gamma^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}g^\nu(x,\ \xi). \tag{56}$$

Только теперь мы уточним, каковы должны быть $S_0(\Gamma)$ и $T(\Gamma)$. Из соотношения (46) Адамар сделал вывод, что с точностью до постоянного множителя

$$S_0(\Gamma)=\Gamma^{(1-n)/2}. \tag{57а}$$

Однако, вспоминая пример волнового уравнения в п. 5 и учитывая, что должно удовлетворяться условие (10) из п. 1, мы предпочтем взять в качестве исходной функции особенностей

$$S_0(\Gamma)=\delta^{((n-3)/2)}(\Gamma). \tag{57б}$$

Функция $\delta(\Gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma\delta(\Gamma) = 0, \tag{58}$$

а $\delta^{(-1/2)}(\Gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma \frac{d\delta^{(-1/2)}}{d\Gamma}(\Gamma) + \frac{1}{2}\delta^{(-1/2)}(\Gamma) = 0; \tag{59}$$

с помощью дифференцирования можно убедиться, что не только функция (57а), но и наша функция $S_0(\Gamma)$, определенная формулой (57б), удовлетворяет условию (46). (Эта неоднозначность в определении S_0 связана с тем, что уравнение (46) имеет особенность при $\Gamma = 0$.)

Которую из формул (57а) и (57б) следует выбрать? Рассмотрим сначала случай, когда n четное. В этом случае формулы (а) и (б) совпадают, но только в формуле (б) S_0 надо понимать как обобщенную функцию. Разница сказывается только тогда, когда вычисляются интегралы от этих функций по областям, содержащим коноид лучей $\Gamma = 0$. В случае (а) такие интегралы, вообще говоря, расходятся. Эта трудность была существенным препятствием[1]) и привела Адамара к рассмотрению „конечных частей" расходящихся интегралов. Однако эти „конечные части" являются просто выражениями, которые получаются при интегрировании обобщенной функции (б). В действительности введение Адамаром понятия конечной части оказалось одним из существенных поводов для возникновения современной теории обобщенных функций.

Аналогичная ситуация имеет место при нечетном n. В этом случае Адамар вводил „логарифмическую часть" интегралов, входящих в его решение. Эти выражения совпадают с теми, которые получаются при применении дельта-функции.

Поэтому для четных и нечетных n мы одинаково можем записать наше решение в виде

$$u(x, \xi) = \delta^{((n-3)/2)}(\Gamma)\, U(x, \xi) + \eta(\Gamma)\, V(x, \xi), \tag{60}$$

где $\eta(\Gamma)$ — функция Хевисайда, а V обращается в нуль при четных n. Из свойств δ-функции и ее производных следует, что $u(x, \xi)$ обращается в нуль всюду, за исключением коноида $\Gamma = 0$, тогда и только тогда, когда n нечетно и $V(x, \xi) = 0$. Это и есть строгая форма *принципа Гюйгенса*.

Формулу (60) легко можно сравнить с выражением, полученным Адамаром; в этом выражении содержится $\log \Gamma$, а не $\eta(\Gamma)$. Чтобы убедиться в том, что фундаментальное решение действительно имеет вид (60), можно воспользоваться определениями п. 2; это мы предоставляем читателю.

[1]) Интересное изложение этого вопроса см. в работе Адамара [3].

7. Дальнейшие примеры. Случай двух независимых переменных. Замечания. Надо обратить внимание на тот факт, что обобщение представления Римана, данного в гл. V, на случай одного уравнения высшего порядка или на систему k уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными получается как почти тривиальный случай общего представления этого параграфа.

Что касается вырожденных уравнений, то стоит отметить типичный пример оператора $u_{x_1x_2x_3}$. Здесь функция Римана, как видно из п. 2, имеет вид

$$\eta(x_1-\xi_1)\,\eta(x_2-\xi_2)\,\eta(x_3-\xi_3),$$

где η — функция Хевисайда.

Вообще говоря, оказывается, что на кратных характеристических элементах, на изолированных лучах и каустиках матрица Римана имеет особенности более высокого порядка, чем в остальных точках конуса лучей или его выпуклой оболочки. Тщательное исследование этих особенностей позволило бы лучше уяснить обобщенный принцип Гюйгенса [1]).

Наконец, мы повторим сделанное выше замечание относительно теорем существования и единственности. Хотя доказательство теорем существования в § 10 опиралось на интегралы энергии, теорема о сходимости разложения для бегущей волны вместе с проведенным в этом параграфе построением в случае аналитических операторов L позволяет получить матрицу Римана независимо от интегралов энергии и независимо от того, является ли оператор симметрическим. Матрица Римана позволяет непосредственно получить решение задачи Коши и, кроме того, позволяет изучить дифференциальные свойства решения.

Теорема Хольмгрена из гл. III, приложение 2, обеспечивает единственность решения. Таким образом, мы получили подход к решению задачи Коши, отличный от использованного в § 8—10.

§ 16. Ультрагиперболические дифференциальные уравнения и общие дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Общая теорема Асгейрссона о среднем значении. Метод сферических средних позволяет получить для произвольных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами простую, но сильную теорему о среднем значении, принадлежащую Асгейрссону [2, 3]. Согласно гл. III, § 3, п. 1, однородные диф-

---

1) Некоторые шаги в этом направлении предприняты в работе Людвига [3].

ференциальные уравнения такого вида, не вырождающиеся в параболические, всегда можно привести к виду

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = u_{y_1y_1} + \ldots + u_{y_my_m} - cu,$$

если произвести соответствующее линейное преобразование переменных и, в случае необходимости, сократить на некоторый экспоненциальный множитель. Мы можем также формально уничтожить коэффициент c (в случае, когда он положителен), если введем новую фиктивную независимую переменную x_{n+1} и положим $u = ve^{\sqrt{c}\,x_{n+1}}$. Дифференциальное уравнение тогда примет вид

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n+1}x_{n+1}} = u_{y_1y_1} + \ldots + u_{y_my_m},$$

причем вместо v мы снова пишем u. В том частном случае, когда u не зависит ни от одной из переменных y, мы получаем уравнение Лапласа. Если u зависит только от одной из переменных y, то мы получаем волновое уравнение. Кроме того, предполагая, что u не зависит от некоторых из переменных x или y, мы можем без ограничения общности записать дифференциальное уравнение в виде

$$\Delta_x u = \Delta_y u, \tag{1}$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i} = \sum_{i=1}^{m} u_{y_iy_i}, \tag{1'}$$

с одинаковым числом m переменных x и y; некоторые из них будут фиктивными. Дифференциальные уравнения такого типа мы будем называть *ультрагиперболическими*.

Теперь мы предположим, что в рассматриваемой области пространства x, y функция u дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1). С помощью этого решения мы построим следующие интегралы по единичной сфере $\beta_1^2 + \ldots + \beta_m^2 = 1$, имеющей площадь поверхности ω_m и элемент площади поверхности $d\omega_m = d\beta$:

$$\mu(x, y, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int u(x + \beta r;\ y)\, d\beta \tag{2}$$

и

$$\nu(x, y, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int u(x;\ y + \beta r)\, d\beta. \tag{3}$$

Таким образом, $\nu(x, y, r)$ есть среднее значение функции u по поверхности сферы радиуса r с центром в точке y пространства y при фиксированном значении x, и аналогично $\mu(x, y, r)$ есть среднее значение в пространстве x при фиксированном y. Мы будем предполагать, что функции ν и μ четным образом продолжены для отрицательных r.

Мы составим также среднее значение

$$w(x, y; r, s) = \frac{1}{\omega_m^2} \int \ldots \int_{\alpha^2=1} \int \ldots \int_{\beta^2=1} u(x+\beta r; y+\alpha s)\, d\beta\, d\alpha, \qquad (4)$$

т. е. среднее по сфере радиуса r в пространстве x и по сфере радиуса s в пространстве y. Ясно, что

$$\mu(x, y, r) = w(x, y; r, 0),$$
$$\nu(x, y, r) = w(x, y; 0, r).$$

Теорема Асгейрссона о среднем значении может быть выражена просто соотношением

$$\mu(x, y, r) = \nu(x, y, r) \qquad (5)$$

или, подробнее, следующей формулировкой.

Среднее значение по сфере радиуса r в пространстве y при фиксированном x совпадает со средним значением при фиксированном y по сфере радиуса r в пространстве x, т. е. $\mu(x, y; r) = \nu(x, y; r)$. Вообще,

$$w(x, y; r, s) = w(x, y; s, r), \qquad (6)$$

т. е. двойное среднее значение симметрично относительно радиусов r и s.

Сначала мы докажем частный случай теоремы. В силу § 13 оба средних значения ν и μ удовлетворяют уравнениям Дарбу

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x\mu - \frac{m-1}{r}\mu_r - \mu_{rr} = 0,\\ \Delta_y\nu - \frac{m-1}{r}\nu_r - \nu_{rr} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где в первое уравнение входит в качестве параметра y, а во второе x. Из уравнения (1) мы имеем $\Delta_x\mu = \Delta_y\mu$ и $\Delta_y\nu = \Delta_x\nu$. Следовательно,

$$\Delta_x\nu - \frac{m-1}{r}\nu_r - \nu_{rr} = 0.$$

Кроме того, в силу определения мы имеем

$$\mu(x, y, 0) = u(x, y), \quad \mu_r(x, y, 0) = 0,$$
$$\nu(x, y, 0) = u(x, y), \quad \nu_r(x, y, 0) = 0.$$

Таким образом, функции μ и ν как функции x и r, зависящие от параметра y, являются решениями одной и той же задачи Коши для уравнения Дарбу. Следовательно, в силу теоремы единственности § 6, п. 2 они тождественно равны друг другу.

Общее соотношение (6) получается аналогичным образом. Для двойного среднего значения мы имеем $\Delta_x w = \Delta_y w$; оно также удовлетворяет уравнениям Дарбу

$$\Delta_x w = \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr},$$

$$\Delta_y w = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss},$$

так что

$$\frac{m-1}{r} w_r + w_{rr} = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss}. \tag{8}$$

При $s = 0$ мы будем считать функцию $w(x, y; r, 0)$ известной; мы знаем также, что $w_s(x, y; r, 0) = 0$. Эти начальные значения однозначно определяют функцию $w(x, y; r, s)$ в силу утверждений § 6, п. 2.

Если $w(x, y; r, s) = u(r, s)$ и $w(x, y; s, r) = v(r, s)$, то функции u и v удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению (8) с начальными условиями $u(r, 0) = w(r, 0)$; $u_s(r, 0) = 0$ и $v(r, 0) = w(0, r)$; $v_s(r, 0) = 0$. В силу частного случая теоремы о средних значениях имеем $w(0, r) = w(r, 0)$. Тогда из теоремы единственности следует, что решения тождественно совпадают

$$v(r, s) = w(r, s) = w(x, y; r, s).$$

Поскольку уравнение (5) для средних значений справедливо для любой сферы радиуса r, мы сразу с помощью интегрирования по r получим соответствующую *теорему о среднем значении для шаров*

$$\int_{\rho \leqslant r} \ldots \int u(x+\xi; y)\, d\xi = \int_{\rho \leqslant r} \ldots \int u(x, y+\xi)\, d\xi; \tag{5'}$$

в обеих частях равенства интегрирование производится по шару $\rho^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \leqslant r^2$. Этот результат позволяет получить соответствующую теорему для $n > m$, т. е. для дифференциального уравнения

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = u_{y_1y_1} + \ldots + u_{y_my_m}.$$

Предположим, что в равенстве (5′) решение u не зависит от переменных $y_{m+1}, \ldots, y_n$, $m < n$. Тогда мы можем высказать более общее утверждение

$$\int_{\rho \leqslant r} \ldots \int u(x_1+\xi_1, \ldots, x_n+\xi_n; y_1, \ldots, y_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n =$$
$$= \frac{\omega_{n-m}}{n-m} \int_{\rho_1 \leqslant r} \ldots \int (r^2 - \rho_1^2)^{(n-m)/2} u(x; y+\xi)\, d\xi, \tag{5''}$$

где

$$\rho_1^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \quad \text{и} \quad \rho^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2.$$

2. Другое доказательство теоремы о среднем значении. При более сильных предположениях о дифференцируемости можно дать другое доказательство теоремы о среднем значении. Положим

$$w(r, s)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v(\alpha r, \beta s)(1-\alpha^2)^{(m-3)/2}(1-\beta^2)^{(m-3)/2}\,d\alpha\,d\beta \qquad (9)$$

с некоторой функцией $v(a, b)$ и будем считать, что функция w достаточно гладкая, так что четную функцию v, соответствующую w, можно однозначно определить в соответствии с § 13. Из § 13, п. 2 мы имеем

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(v_{aa}(\alpha r, \beta s)-v_{bb}(\alpha r, \beta s))(1-\alpha^2)^{(m-3)/2}(1-\beta^2)^{(m-3)/2}\,d\alpha\,d\beta =$$

$$=\frac{m-1}{r}w_r+w_{rr}-\frac{m-1}{s}w_s-w_{ss}.$$

Применяя (8), получим

$$v_{aa}=v_{bb};$$

тогда

$$v(a, b)=g(a+b)+h(a-b).$$

Если мы подставим это выражение в (9) вместо $v(a, b)$, то получим выражение, симметричное относительно r и s, и, следовательно, установим требуемое соотношение

$$w(r, s)=w(s, r).$$

3. Применение к волновому уравнению. Мы снова получим решение задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt}-\Delta u=0$ с начальными условиями $u(x, 0)=\psi(x)$, $u_t(x, 0)=0$. В соответствии с только что полученными результатами мы будем рассматривать волновое уравнение как частный случай ультрагиперболического дифференциального уравнения (1) с $y_1=t$ при дополнительном условии, что решение u не зависит от переменных $y_2, \ldots, y_n$. Теперь мы применим теорему о среднем значении к произвольной точке x пространства x и началу координат $y=0$ в пространстве y.

Это дает

$$\frac{1}{\omega_m}\int\limits_{\beta^2=1}\!\!\ldots\!\int u(x+\beta t;\ 0)\,d\beta=\frac{1}{\omega_m}\int\limits_{\alpha^2=1}\!\!\ldots\!\int u(x;\ \alpha_1 t)\,d\alpha, \qquad (10)$$

причем в правой части u зависит только от компоненты α_1 единичного вектора α. Выражение в левой части равенства равно среднему значению $Q(x, t)$ начальной функции ψ, которая известна из начальных условий. Так как подинтегральная функция в среднем значении, стоящем справа, зависит только от одной переменной $\alpha_1 t$, кроме

параметров x, то в силу § 11 это среднее значение можно записать в виде

$$\frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}} \int\limits_0^t u(x_1, \ldots, x_m, \rho)(t^2-\rho^2)^{(m-3)/2}\, d\rho.$$

Таким образом, из теоремы о среднем значении получается интегральное соотношение

$$Q(x, t) = \frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}} \int\limits_0^t u(x, \rho)(t^2-\rho^2)^{(m-3)/2}\, d\rho, \tag{11}$$

которое совпадает с формулой, полученной в § 13; оно разрешается относительно u с помощью дробного или обычного дифференцирования.

Наш метод, по существу, сводится к тому, что пространственные переменные и время можно рассматривать симметричным образом за счет введения фиктивных „временны́х параметров", которые не влияют на описание физических явлений.

4. Решение характеристической задачи Коши для волнового уравнения. Другим применением теоремы Асгейрссона является следующий метод решения характеристической задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0 \tag{12}$$

в трехмерном пространстве; она ставилась в § 6, п. 1. Мы предположим, что значения u заданы на конусе

$$K = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

т. е. функция

$$u\left(x, y, z, \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \psi(x, y, z)$$

известна. Мы попытаемся найти решение уравнения (12) (регулярное при $K \leqslant 0$), которое принимает заданные значения на поверхности $K = 0$.

Сначала мы построим решение этой задачи на оси конуса $x = y = z = 0$. Чтобы построить это решение, мы воспользуемся теоремой о среднем значении и получим

$$2\pi t \int\limits_0^{2t} u(0, 0, 0, r)\, dr = t^2 \int\limits_\Omega\int \psi(\alpha t, \beta t, \gamma t)\, d\omega$$

или

$$4\pi \int\limits_0^t u(0, 0, 0, r)\, dr = t \int\limits_\Omega\int \psi\left(\frac{\alpha}{2} t, \frac{\beta}{2} t, \frac{\gamma}{2} t\right) d\omega,$$

причем интеграл в правой части берется по поверхности единичной сферы в пространстве α, β, γ. С помощью дифференцирования мы получим

$$u(0,\ 0,\ 0,\ t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\int \psi\left(\frac{\alpha}{2}t,\ \frac{\beta}{2}t,\ \frac{\gamma}{2}t\right)d\omega + \\ + \frac{t}{8\pi}\int\limits_{\Omega}\int(\alpha\psi_x + \beta\psi_y + \gamma\psi_z)\,d\omega, \qquad (13)$$

где во втором интеграле в функции ψ_x, ψ_y, ψ_z надо также подставить значения аргументов $\frac{\alpha}{2}t, \ldots$. Если в некоторой точке P, не лежащей на оси t, значение K отрицательно, то решение $u(P)$ получается отсюда непосредственно. Мы только должны перевести точку P на ось t с помощью *преобразования Лоренца*, т. е. преобразования, оставляющего неизменным характеристический конус. Если, например, точка P имеет координаты $x = x_0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = t_0$, $x_0 < t_0$, то это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2 - x_0^2}}x' + \frac{x_0}{\sqrt{t_0^2 - x_0^2}}t', \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{x_0}{\sqrt{t_0^2 - x_0^2}}x' + \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2 - x_0^2}}t', \end{aligned} \qquad (14)$$

а образ P' точки P имеет координаты

$$x' = y' = z' = 0,$$
$$t' = \sqrt{t_0^2 - x_0^2}.$$

Так как наше дифференциальное уравнение инвариантно относительно преобразования Лоренца (14), формулу (13) можно будет применить к функции

$$v(x',\ y',\ z',\ t') = u(x,\ y,\ z,\ t)$$

с граничными значениями

$$\chi(x',\ y',\ z') = \psi(x,\ y,\ z);$$

соответственно мы будем иметь

$$u(x_0,\ 0,\ 0,\ t_0) = v\left(0,\ 0,\ 0,\ \sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right) = \\ = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\int\chi\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2},\ \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2},\ \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right)d\omega + \\ + \frac{t'}{8\pi}\int\limits_{\Omega}\int\left(\alpha\chi_{x'} + \beta\chi_{y'} + \gamma\chi_{z'}\right)d\omega.$$

Если χ выразить через ψ, то получим

$$u(x_0, 0, 0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_\Omega \psi\left(\frac{1}{2}(x_0+\alpha t_0), \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}, \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}\right)d\omega + \frac{1}{8\pi}\iint_\Omega (x_0+\alpha t_0)\psi_x\,d\omega + \frac{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}{8\pi}\iint_\Omega (\beta\psi_y+\gamma\psi_z)\,d\omega.$$

Здесь аргументы в функциях ψ_x, ψ_y, ψ_z должны принимать те же значения, что в ψ, т. е.

$$\frac{1}{2}(x_0+\alpha t_0), \quad \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}, \quad \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}.$$

Поэтому в каждой точке P, для которой $t>0$ и $K<0$, функция u однозначно определяется через ψ; мы просто считаем, что с помощью вращения координатных осей точка P переведена в плоскость $y=z=0$. Таким образом, *значение u в точке P зависит только от начальных значений v на эллипсе, высекаемом характеристическим конусом на некоторой плоскости. Этот эллипс совпадает с тем, который получается при пересечении исходного конуса с характеристическим конусом, проходящим через точку P.*

Читатель может попытаться проверить, что построенная таким образом функция действительно является решением задачи. Мы заметим также, что аналогично можно рассмотреть характеристическую задачу Коши для ультрагиперболических дифференциальных уравнений. Отметим, что этот метод дает только значения решения u *внутри* характеристического конуса. Если решение существует также вне конуса, то его значение в каждой точке зависит от данных на всем характеристическом конусе[1]).

5. Другие приложения. Теорема о среднем значении для софокусных эллипсоидов. Другие известные теоремы о среднем значении являются частными случаями теоремы Асгейрссона. Например, теорему о среднем значении для оператора Лапласа можно получить, если рассмотреть гармоническую функцию $u(x_1, \ldots, x_m)$ как частное решение дифференциального уравнения (1), не зависящее ни от одной из переменных y. Применение к функции u соотношения (5) для средних значений при произвольном x и $y=0$ сразу дает теорему о среднем значении для гармонических функций. Эта теорема следует также из более общего соотношения (5″) для $m=0$.

Менее тривиальная теорема о среднем значении для гармонических функций получается следующим образом. Пусть $u(x_1, \ldots, x_m)$ — ре-

[1]) См. Джон [4], стр. 114—120.

шение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Вместо m переменных x_i мы искусственно введем $2m$ новых переменных ξ_i и η_i с помощью системы уравнений

$$x_i = \xi_i \operatorname{ch} \alpha_i + \eta_i \operatorname{sh} \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ могут быть произвольными. Тогда функция $u(x)$ переходит в функцию $\widehat{u}(\xi, \eta)$ переменных

$$\xi_1, \ldots, \xi_m; \quad \eta_1, \ldots, \eta_m,$$

а дифференциальное уравнение $\Delta u = 0$ превращается в ультрагиперболическое дифференциальное уравнение

$$\Delta_\xi \widehat{u} = \Delta_\eta \widehat{u}.$$

Теперь мы воспользуемся теоремой Асгейрссона о среднем значении в форме (5′) для точки $\xi_i = \eta_i = 0$ и шара K_1: $\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \leqslant r^2$ в пространстве ξ и соответствующего шара K_2: $\eta_1^2 + \ldots + \eta_m^2 \leqslant r^2$ в пространстве η. Этим сферам соответствуют два софокусных эллипсоида

$$S_1\colon \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_i} \leqslant r^2$$

и

$$S_2\colon \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i} \leqslant r^2$$

в пространстве x. Средние значения по шарам переходят в средние значения функции $u(x)$ по внутренности соответствующих двух эллипсоидов. Так как в соответствии с нашими формулами мы можем представить таким образом любую пару софокусных эллипсоидов при соответствующем выборе величин α_i и r, то мы сразу получаем следующую теорему.

Среднее значение гармонической функции по внутренности некоторого эллипсоида сохраняется неизменным для целого семейства софокусных эллипсоидов.

Заметим также, что к этому последнему результату можно было бы подойти с более общей точки зрения. Существует группа линейных преобразований, переводящих ультрагиперболическое уравнение (1) в себя. Это линейные преобразования („ультралоренцевы“ преобразования), которые переводят характеристическую форму

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - y_i^2)$$

в себя (с точностью до постоянного множителя) и которые, следовательно, оставляют неизменным характеристический конус дифференциального уравнения. Естественно, эта группа преобразований (заслуживающая дальнейшего изучения[1])) имеет в качестве подгруппы не только преобразования подобия, но и преобразования Лоренца в пространствах с меньшим числом пространственных переменных.

Производя замену переменных с помощью „ультралоренцевой группы" и применяя затем теорему Асгейрссона, можно получить новые теоремы о средних значениях для решений частных видов ультрагиперболических уравнений[2]).

§ 17. *Задача Коши для многообразий непространственного типа*

Теорема о среднем значении § 16 позволяет выяснить положение с задачей Коши для ультрагиперболических уравнений и для гиперболических уравнений с начальными данными на многообразиях непространственного типа. В частности, мы увидим, почему задачи Коши такого типа „поставлены некорректно" в смысле гл. III, § 6.

1. Функции, определенные с помощью средних значений по сферам с центрами на некоторой плоскости. Интеграл от некоторой функции $f(x, t) = f(x_1, \ldots, x_n, t)$ по сфере радиуса r с центром в точке $(x, 0)$ пространства x, t определяется формулой

$$g(x, r) = \int\limits_{\xi^2+\tau^2=r^2} f(x+\xi, \tau)\, dS = Q[f]. \qquad (1)$$

Очевидно, что величина $Q[f]$ зависит только от четной части функции f, $f(x, t) + f(x, -t)$. Мы хотим определить $f(x, t) + f(x, -t)$ по заданной функции $g(x, r)$. Для этого мы построим интеграл

---

[1]) Для $m = 3$ эта группа эквивалентна группе преобразований совокупности всех прямых в трехмерном пространстве в себя; см., например, Клейн [1].

Эквивалентность этих групп становится более ясной в связи с одним приложением, указанным Джоном, теоремы Асгейрссона о среднем значении к ультрагиперболическому уравнению

$$u_{x_1 y_2} = u_{x_2 y_1}$$

с $m = 2$ (см. Джон [5]). Мы будем интерпретировать x_1, x_2, y_1, y_2 как координаты прямых в трехмерном пространстве ξ, ζ в смысле геометрии прямых. Тогда общее решение, определенное во всем пространстве и удовлетворяющее некоторым условиям регулярности на бесконечности, дается с помощью интеграла от произвольной функции ξ, ζ по прямым в пространстве. Для прямых, лежащих на произвольном однополостном гиперболоиде в пространстве ξ, ζ, теорему Асгейрссона о среднем значении можно сформулировать следующим образом: интеграл от любого решения u по прямым одного из семейств равен интегралу по прямым другого семейства.

[2]) См. Асгейрссон [2].

от функции f по шару радиуса r с центром в точке $(x, 0)$:

$$G(x, r) = \int_0^r g(x, \rho)\, d\rho = \int\limits_{\xi^2+\tau^2<r^2} f(x+\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{2}$$

Дифференцируя G по одной из переменных x, а именно x_i, получим

$$G_{x_i} = \int\limits_{\xi^2+\tau^2<r^2} f_{\xi_i}(x+\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = \frac{1}{r} \int\limits_{\xi^2+\tau^2=r^2} f(x+\xi, \tau)\, \xi_i\, dS. \tag{3}$$

Следовательно,

$$Q[f(x, t)\, x_i] = \int\limits_{\xi^2+x^2=r^2} f(x+\xi, \tau)(x_i+\xi_i)\, dS =$$

$$= x_i g(x, r) + rG_{x_i}(x, r) = x_i g(x, r) + r\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^r g(x, \rho)\, d\rho = D_i g,$$

где D_i — линейный оператор, действующий на функцию $g(x, r)$. Применяя такое же рассуждение к функциям $x_i f$ вместо f и повторяя этот процесс многократно, мы для любого полинома $P(x_1, \ldots, x_n)$ сможем найти интеграл от функции Pf по сфере радиуса r с центром в точке $(x, 0)$; он дается формулой

$$Q[Pf] = P(D_1, \ldots, D_n)\, g$$

и, следовательно, он известен, если известна функция g. Мы также имеем

$$Q[Pf] = \int\limits_{(\eta-x)^2<r^2} P(\eta)(f(\eta, \tau) + f(\eta, -\tau))\frac{r\, d\eta}{\tau}, \tag{4}$$

где

$$\tau = \sqrt{r^2 - (\eta - x)^2}.$$

В силу полноты полиномов P на сфере функция

$$\frac{f(\eta, \tau) + f(\eta, -\tau)}{\tau} \qquad \left(\tau = \sqrt{r^2-(\eta-x)^2}\right), \tag{5}$$

а, следовательно, и четная часть функции f однозначно определяются по известным величинам $P(D_1, \ldots, D_n)\, g$ [1]).

Теперь мы отметим следующий важный факт. Чтобы вычислить оператор $D_i g$ для любой системы значений $x_1^0, \ldots, x_n^0, r^0$, доста-

[1]) Тот факт, что функция (5) имеет особенность при $\tau = 0$, не влияет на справедливость этого вывода. Мы только должны сгладить функцию (5) в некоторой окрестности сферы $|\eta - x| = r$ и выбрать в качестве полиномов P последовательность, равномерно стремящуюся к этой сглаженной функции.

точно знать среднее значение $g(x, r)$ функции $f(x, t)$ для

$$0 \leqslant r \leqslant r^0, \qquad (6)$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

где число ε сколь угодно мало. То же самое справедливо относительно вычисления $P(D_1, \ldots, D_n)g$ для всех полиномов.

Отсюда следует, что значения g в области, определяемой неравенствами (6), однозначно определяют четную часть функции f во всем шаре

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leqslant r_0^2.$$

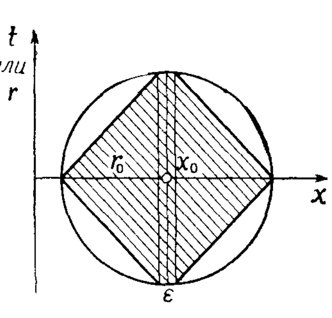


Рис. 59.

Это, в свою очередь, однозначно определяет интеграл от $g(x, t, r)$ по любой сфере с центром на плоскости $t=0$, лежащей внутри той сферы, где известна функция f, если

$$r + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2} \leqslant r_0. \qquad (7)$$

Таким образом, мы показали следующее.

Функция g однозначно определяется во всем двойном конусе (7) *своими значениями в цилиндрической области* (6) *произвольной толщины* ε (см. рис. 59).

2. Приложения к задаче Коши. Мы рассмотрим ультрагиперболическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{l} u_{y_i y_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + u_{tt}, \qquad (8)$$

в котором мы выделяем переменную $x_{n+1} = t$ и предполагаем, что $n \geqslant 2$, но не считаем обязательным, что $l = n+1$. Мы попытаемся найти решение, задавая его значения на плоскости $t=0$. Пусть при $t=0$ заданы

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad \text{и} \quad u_t(x, y, 0) = \varphi(x, y).$$

Мы рассмотрим начальные значения в некоторой области пространства x, y, причем предполагается, что y находится в некоторой области G пространства y, а x изменяется в пределах малого шара

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2 \qquad (9)$$

в пространстве x. Область, в которой заданы начальные значения, является, таким образом, „произведением“ малого шара в простран-

стве x и произвольной области G в пространстве y. Рассмотрим решение u как функцию x, t, зависящую от параметра y. Тогда наши заданные значения ψ позволяют определить интегралы от u по таким сферам в пространстве x, t, центры которых x_i, t удовлетворяют условиям

$$t=0, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

а радиусы не больше, чем радиус r^0 наибольшего шара с центром в точке y пространства y, который целиком лежит в области G. Для $n>l$ это непосредственно следует из теоремы о среднем значении § 16. Если $n<l$, то эта теорема о среднем значении позволяет сначала найти только интегралы

$$\int\limits_{V_r}\int u(x, t)\left(r^2-t^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{(l-n)/2} dx\,dt$$

по любому шару V_r в пространстве x, t с радиусом $r\leqslant r^0$ и центром $x_1, \ldots, x_n$, $t=0$; здесь $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2\leqslant\varepsilon^2$. Если мы обозначим интеграл от функции u по сфере радиуса r через $I(r)$, то написанный выше интеграл приобретет вид

$$\int\limits_0^r I(\rho)(r^2-\rho^2)^{(l-n)/2}\,d\rho.$$

Но это выражение известно для $r<r^0$; тогда $I(r)$ также однозначно определится для $r\leqslant r^0$. Это получается из приведенных ранее рассуждений (см. § 16) с помощью решения интегрального уравнения Абеля. Таким образом, наше утверждение доказано также для $l>n$.

В силу п. 1 четная функция $u(x, y, t)+u(x, y, -t)$ однозначно определится во всем шаре

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2+t^2\leqslant(r^0)^2$$

по заданным значениям ψ. Аналогично, четная функция

$$u_t(x, y, t)+u_t(x, y, -t)$$

определится через φ. Отсюда сразу следует, что $u(x, y, t)$ определяется однозначно. В частности, при $t=0$ начальные значения $u(x, y, 0)$ определяются в шаре

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2\leqslant(r^0)^2 \tag{10}$$

начального n-мерного пространства R_n, и мы, таким образом, получаем замечательный результат.

Если начальные значения решения и ультрагиперболического уравнения (8) *известны для y из области G и x из произвольно малого шара*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2$$

(см. п. 1), *то начальные значения однозначно определяются всюду в большем шаре*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 \leqslant (r^0)^2,$$

где r^0 определяется так же, как и ранее.

Вследствие этого *нельзя произвольно задавать начальные значения* $u(x, y, 0)$.

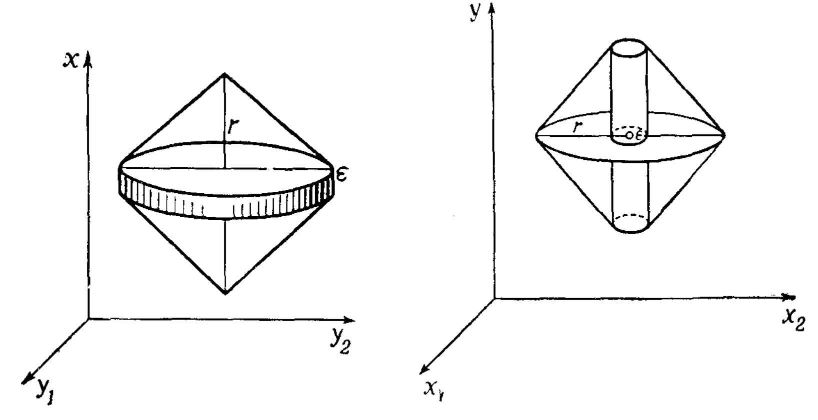


Рис. 60. Рис. 61.

Например, если при данном a для дифференциального уравнения

$$u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} - u_{xx} - u_{tt} = 0$$

задаются начальные значения $u(y_1, y_2, x, 0)$ в тонком цилиндрическом диске

$$t = 0, \quad (y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 \leqslant a^2, \quad |x - x^0| \leqslant \varepsilon,$$

то значения $u(y_1, y_2, x, 0)$ a priori однозначно определяются в области

$$t = 0, \quad \sqrt{(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2} + |x - x^0| \leqslant a,$$

ограниченной двумя конусами (см. рис. 60).

Аналогично, рассмотрим волновое уравнение

$$u_{yy} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{tt} = 0, \tag{12}$$

но переменим в нем роли пространственной переменной y и временной переменной t. Если функция $u(y, x_1, x_2, t)$ задана в тонком цилиндре

$$t = 0, \quad (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leqslant \varepsilon^2, \quad |y - y^0| \leqslant a,$$

образующие которого параллельны оси y, то начальное значение $u(y, x_1, x_2, 0)$ сразу однозначно определяется в ограниченной двумя конусами области

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} + |y - y^0| \leqslant a$$

(см. рис. 61).

Таким образом, *на плоскости непространственного типа невозможно произвольным образом задавать начальные значения для решения волнового уравнения.*

В случае общего уравнения (8), если начальные значения $u(y_1, y_2, \ldots, y_l; x_1, \ldots, x_n, 0)$ заданы для

$$\sum_{i=1}^{l} (y_i - y_i^0)^2 \leqslant a^2, \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

то они a priori известны в области

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} \leqslant a,$$

а решение $u(x, y, t)$ однозначно определяется для

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 + t^2} \leqslant a.$$

Для уравнения Лапласа

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} + u_{tt} = 0 \tag{13}$$

это означает следующее: *если решение u является четной функцией t, то значения $u(x, 0)$ в произвольно малом шаре*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \varepsilon^2$$

однозначно определяют значения решения в области

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + t^2 \leqslant a^2$$

при произвольном a.

В частности, при $t=0$ значения $u(x, 0)$ в любом малом шаре однозначно определяют начальные данные для u во всей плоскости. Это утверждение для начальных значений верно без требования четности решения.

Такого результата для решений уравнения Лапласа следовало ожидать в силу аналитического характера решений, что нам уже было известно. Но в случае гиперболических и ультрагиперболических дифференциальных уравнений полученные выше соотношения между значениями решения на начальной плоскости не являются столь очевидными. Действительно, эти начальные функции могут даже не быть аналитическими. Таким образом, при исследовании значений решений гиперболических и ультрагиперболических дифференциальных уравнений на плоскостях непространственного типа мы имеем дело с замечательным явлением, а именно с функциями, которые не обязаны быть аналитическими, но значения которых в произвольно малой области определяют функцию в существенно большей области[1]).

§ 18. Замечания о бегущих волнах, передаче сигналов и принципе Гюйгенса

1. Неискажающиеся бегущие волны. Термин „волна" в этой книге применялся в совершенно общем смысле для любого решения гиперболической задачи[2]), но существуют некоторые специальные классы волн, представляющие особый интерес, например „стоячие волны", представимые в виде произведения функции времени на функцию пространственных переменных. В этом параграфе мы хотим выяснить значение другого такого класса — бегущих волн, которые рассматривались для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в гл. III и для более общего случая в § 4 этой главы. Это понятие является основным в теории передачи сигналов и главным предметом изучения в теории гиперболических дифференциальных уравнений. Для краткости мы будем рассматривать одно уравнение $L[u]=0$.

В соответствии с гл. III, § 3 мы определим *семейство неискажающихся бегущих волн* как семейство решений уравнения $L[u]=0$, зависящее от *произвольной функции* $S(\varphi)$ и имеющее вид

$$u=S(\varphi(x, t)), \tag{1}$$

где S называется *формой волны*, а $\varphi(x, t)$ — фиксированная *фазовая функция* пространственных переменных x и времени $t=x_0$.

---

[1]) См. Джон [3], где другим методом получены даже более сильные результаты для общих линейных уравнений с аналитическими коэффициентами.

[2]) Чтобы не было недоразумений, термин „фронт волны" мы постоянно сохраняли для поверхностей разрыва, не удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению, но связанных с характеристическим уравнением первого порядка.

Такой фазовой функцией может быть

$$\varphi(x, t) = \chi(x) - t.$$

Решение u описывает движение неискажающейся волны формы S в пространстве. Пользуясь произвольностью формы $S(\varphi)$, мы делаем вывод, что функция φ должна удовлетворять уравнению

$$L[\varphi] = 0$$

и характеристическому уравнению

$$Q(D\varphi) = 0.$$

Первое уравнение получается, если взять $S(\varphi) = \varphi$; второе возникает, если положить $S = \delta(\varphi - c)$ с произвольной постоянной c (см. § 4). Таким образом, мы можем утверждать, что фазовая функция φ является характеристической функцией, т. е. фазовые поверхности $\varphi = \text{const}$ являются характеристическими фронтами волны.

Несмотря на переопределенность φ, существуют некоторые дифференциальные уравнения $L[u] = 0$, допускающие такие семейства неискажающихся бегущих волн. Например, это имеет место для линейных дифференциальных уравнений $L[u] = 0$ с постоянными коэффициентами, содержащих только члены старшего порядка, в частности для волнового уравнения (см. гл. III, § 3). Однако, вообще говоря, условия, наложенные на функцию φ, несовместны. Поэтому целесообразно ввести менее стеснительное понятие семейства *„относительно неискажающихся“ бегущих волн* вида

$$u = g(x, t) S(\varphi), \tag{2}$$

где снова функция $S(\varphi)$ произвольна и где не только фазовая функция $\varphi(x, t)$, но и коэффициент искажения g имеют специальный вид. Такие волны все еще могут служить для передачи сигналов, а множитель g характеризует затухание. Сферические волны в трехмерном пространстве, например $\frac{S(t-r)}{r}$ или $\frac{S(t+r)}{r}$, дают типичный пример такого семейства относительно неискажающихся волн. Концентрические сферы в пространстве являются перемещающимися характеристическими поверхностями постоянной фазы.

Условия, наложенные на решение (2), снова сводят его к характеристическим функциям; они дают переопределенную систему дифференциальных уравнений для искажения g. В этом легко убедиться, например, подставив решение (2) в дифференциальное уравнение и учитывая, что из произвольности функции S следует обращение в нуль всех коэффициентов при $S, S', S'', \ldots$.

Следовательно, уравнение $L[u] = 0$ имеет такие относительно неискажающиеся семейства решений только в исключительных случаях.

Конечно, если некоторое дифференциальное уравнение $L[u]=0$ обладает этим свойством, то им обладает целый класс эквивалентных дифференциальных уравнений. Два дифференциальных уравнения $L[u]=0$ и $L^*[u^*]=0$ для двух функций $u(x)$ и $u^*(x)$ называются эквивалентными, если их можно перевести друг в друга с помощью преобразования вида

$$x_i^* = \alpha_i(x_0, x_1, \ldots, x_n), \quad u^* = f(x)u.$$

Вопрос об отыскании всех операторов L, имеющих такие семейства решений, почти совершенно не изучен[1]).

Существует задача, связанная с этой, для которой известно решение. Рассмотрим волновое уравнение с четырьмя независимыми переменными. Какие фронты волны возможны для относительно неискажающихся бегущих волн? Ответ состоит в том, что фронты волны являются циклидами Дюпена[2]), которые включают плоскости и сферы как частные случаи.

Вообще говоря, чтобы уменьшить или ликвидировать переопределенность системы для искажения g, надо ввести несколько таких коэффициентов, как мы это действительно делали в § 4, определяя бегущие волны высших порядков, или даже полные бегущие волны. В соответствии с § 4 и 5 использование таких волн позволяет сделать важный шаг по пути построения решений, хотя они дают искажение начальной формы сигнала.

2. Сферические волны. Проблема передачи сигналов еще более проясняется с помощью понятия „сферических волн", которые служат обобщением сферически симметричных решений трехмерного волнового уравнения. Мы ограничимся случаем линейных дифференциальных уравнений второго порядка $L[u]=0$ и рассмотрим кривую

---

[1]) Легко доказать следующий частный результат: *в случае двух переменных $x_1=x$, $t=x_0=y$ единственными дифференциальными уравнениями второго порядка, допускающими семейства относительно неискажающихся бегущих волн в обоих пространственных направлениях, являются уравнение $u_{xy}=0$ и эквивалентные ему уравнения.*

Действительно, гиперболическое уравнение второго порядка эквивалентно некоторому уравнению вида $2u_{xy}+Bu_x+Cu=0$, где B и C — функции x и y, а $x+y$ и $x-y$ представляют собой соответственно временну́ю и пространственную координату; прямые $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ являются характеристиками. Существование семейства волн вида $u=g(x, y)S(y)$ возможно при одновременном выполнении условий $g_x=0$ и $2g_{xy}+Bg_x+Cg=0$ и, следовательно, при $C=0$. Если, кроме того, должно существовать семейство решений $u=h(x, y)S(x)$, распространяющихся в другом направлении, то должны выполняться условия $2h_y+Bh=0$ и $2h_{xy}+Bh_x=0$, так что $B_x=0$. Но уравнение $2u_{xy}+B(y)u_x=0$ эквивалентно уравнению $u_{xy}=0$.

[2]) См. Фридлендер [1] и М. Рисс [1].

Λ временно́го типа[1]), заданную в виде $x_i = \xi(\lambda)$ с некоторым параметром λ (здесь не выделена времення́я переменная). Мы рассмотрим характеристический коноид с вершиной в точке $\xi(\lambda)$ или сферический фронт волны $\Gamma(x;\ \xi) = 0$.

Для заданного x мы можем определить λ как функцию x из уравнения $\Gamma(x,\ \xi(\lambda)) = 0$; мы положим $\lambda = \varphi(x)$. Характеристический коноид с вершиной $\xi(\varphi(x))$ задается уравнением $\varphi(x) = \text{const}$. *Семейство относительно неискажающихся сферических волн, исходящих из кривой* Λ, можно тогда определить как решение u дифференциального уравнения второго порядка вида

$$u(x) = g(x)\, S(\varphi(x))$$

с произвольной функцией S и функцией g специального вида.

По поводу этого понятия известно мало; очевидно, оно связывает сферические волны с задачей о совершенно правильной передаче сигналов во всех направлениях. Все, что мы можем здесь сделать, это сформулировать одно предположение, которое получит некоторое подтверждение в п. 3: *семейства сферических волн для произвольных кривых Λ временно́го типа существуют только в случае двух или четырех переменных и только в случае, когда дифференциальное уравнение эквивалентно волновому уравнению.*

Доказательство этого предположения показало бы, что четырехмерное физическое пространство-время мира классической физики обладает весьма существенными отличительными свойствами.

Здесь мы только подчеркнем, что если для волнового уравнения в качестве кривой временно́го типа Λ мы возьмем ось t и положим $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то мы получим такие волны с $\varphi = t - r$ и $g = {}^1/_r$. Для других прямых временно́го типа сферические волны получаются с помощью преобразования Лоренца.

В случае четного числа независимых переменных $n + 1 = 2\nu + 4$ ($\nu = 1,\ 2,\ \ldots$) существуют решения в виде семейств бегущих волн[2]) высших порядков. Явные решения, построенные в § 12, п. 4 или § 15, п. 4, уже не свободны от искажений, но все же описывают процессы распространения.

Что касается уравнений высших порядков, то стоит в качестве примера заметить, что $[(n+1)/2]$-я итерация волнового уравнения для всех четных значений $n + 1$, т. е. уравнение порядка $n + 1$

$$L^{(n+1)/2}[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)^{(n+1)/2} u = 0$$

---

[1]) См. § 3, п. 7.

[2]) Обозначения несколько отличаются от применявшихся выше.

имеет неискажающиеся семейства сферических волн

$$u = S(t - r), \qquad u = S(t + r),$$

хотя само волновое уравнение

$$L[u] \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = 0$$

не имеет таких семейств решений. Этот факт является просто другой интерпретацией теоремы, доказанной в § 13, п. 4. Он указывает на то, что для уравнений высших порядков существуют различные возможности, которых нет для уравнений второго порядка.

Наконец, надо напомнить, что встречаются и играют важную роль *отдельные бегущие сферические волны* высших порядков с конкретной функцией S, а не обязательно с семейством произвольных функций S (§ 4). В частности, фундаментальное решение из § 15, например выражение Адамара для фундаментального решения одного уравнения второго порядка (§ 15, п. 6), представляется с помощью таких волн

$$R = S(\Gamma) g(x, t) + S_1(\Gamma) g^1(x, t) + \ldots,$$

где $S(\Gamma)$ — некоторая специальная обобщенная функция.

3. Излучение и принцип Гюйгенса. Принцип Гюйгенса несколько раз рассматривался в этой книге; он утверждает, что решение в некоторой точке ξ, τ зависит не от всех начальных данных в коноиде зависимости, а только от данных на характеристических лучах, проходящих через точку ξ, τ (мы снова выделяем переменные $x_0 = t$ и $\xi_0 = \tau$). Принцип Гюйгенса эквивалентен утверждению, что матрица излучения, построенная в § 15, тождественно обращается в нуль всюду, за исключением лучей, проходящих через точку ξ, τ. В соответствии с этим мы можем утверждать, что резкий сигнал, исходящий в момент τ из точки ξ, передается по лучам в виде резкого сигнала и не может быть обнаружен вне коноида лучей. Однако принцип не утверждает, что этот сигнал передается без искажений.

Для одного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами мы видели, что только для волновых уравнений с 3, 5, 7, ... пространственными переменными и для эквивалентных им уравнений справедлив принцип Гюйгенса. Для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами *гипотеза Адамара*[1]) состоит в том, что эта теорема остается справедливой также и тогда, когда коэффициенты не постоянны. Но примеры показывают, что эта гипотеза в таком виде не может быть полностью

1) Эта знаменитая гипотеза не была категорическим утверждением Адамара.

справедливой[1]), хотя в высшей степени правдоподобно, что она по существу правильна[2]).

Вообще, вопрос о принципе Гюйгенса для уравнений второго порядка надо было бы рассматривать в связи с гораздо более широкой задачей о точных областях зависимости и влияния для любой гиперболической задачи (см. § 7); эта проблема остается еще совершенно открытой.

Что касается передачи сигналов, которые не только остаются резкими, но и не искажаются, то в п. 2 было сформулировано предположение о том, что это возможно только в трехмерном пространстве. Для изотропной однородной среды, т. е. для случая постоянных коэффициентов (и для уравнений второго порядка) доказательство этого предположения содержится в предыдущих рассуждениях. Таким образом, представляется, что наш реальный физический мир, в котором основой связи являются звуковые и электромагнитные сигналы, выделяется среди других, с математической точки зрения возможных моделей особой простотой и гармонией.

Однако в любой гиперболической системе, по крайней мере приближенно, сохраняется резкость сигналов в смысле обобщенного принципа Гюйгенса (см. § 15, п. 3). Поэтому этот обобщенный принцип важен для понимания передачи сигналов с математической точки зрения. Это становится особенно ясным, если учесть, что справедливость принципа Гюйгенса в лучшем случае является весьма неустойчивым свойством дифференциального оператора; это свойство нарушается сколь угодно малым изменением коэффициентов оператора. Поэтому нам кажется, что обобщенный принцип Гюйгенса надо рассматривать как правильное отражение физической реальности.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ VI

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Основные определения и понятия

1. Введение. В этом приложении мы рассмотрим понятие „обобщенной функции“ [3]) или распределения. Применение этих обобщенных

---

[1]) Противоречащий пример для пространства семи измерений был недавно построен Штельмахером [1].

[2]) Адамар отождествлял справедливость принципа Гюйгенса с равенством нулю логарифмического члена в его выражении для фундаментального решения с нечетным числом n пространственных переменных. В нашей интерпретации принцип Гюйгенса означает, что ряд (44) в § 15 не содержит членов с функцией Хевисайда и ее интегралами.

[3]) Термин „распределения“ указывает, что обобщенные функции, такие, как дельта-функция Дирака и ее производные, могут быть истолкованы как

функций в предыдущих главах будет обосновано здесь с более общей точки зрения.

Необходимо понимать, что слово „функция“ может означать вектор-функцию с k компонентами. Рассматриваемые функции могут принимать комплексные значения, но независимая переменная x всегда есть действительный n-мерный вектор.

Многое из того, что составляет содержание этой теории, уже давно играло важную роль в физической литературе и некоторых других работах[1]). Но систематическое изучение этого вопроса началось только с момента выхода обширной книги Лорана Шварца [1]; этой теории посвящено множество работ[2]); некоторые из них далеко идут в направлении изучения тонких вопросов[3]). В этом приложении внимание сосредоточено на элементарных основах теории в той мере, в какой это необходимо для проведенного здесь исследования линейных дифференциальных уравнений. Мы опускаем подробное рассмотрение обычно излагаемых приложений к теории преобразования Фурье (см., однако, § 4, п. 4).

2. Идеальные элементы. „Распределения“ удобнее всего вводить как идеальные элементы в функциональных пространствах. Одним из основных математических построений является расширение данного множества или „пространства“ S некоторых математических объектов с помощью дополнительных новых „идеальных элементов“, которые не являются элементами исходного множества S и определяются не дескриптивно, а с помощью некоторых соотношений, таких, что в расширенном множестве $\bar{S}$ сохраняются прежние правила для основных операций. Целью этого расширения является снятие ограничений, налагаемых на элементы исходного множества S.

Так, например, в проективной геометрии идеальные элементы, а именно „бесконечно удаленные точки“, определяются пучками параллельных прямых. В других случаях идеальные элементы вводятся с помощью пополнения исходного множества S по некоторой *норме*;

распределения масс, диполей и т. д., сосредоточенных в точках, на кривых или на поверхностях. Однако термин „обобщенные функции“ кажется более соответствующим той роли, которую играет это понятие в связи с дифференциальными уравнениями и с математическим анализом вообще. Действительно, роль обобщенных функций аналогична роли обычных функций, почти так же, как роль действительных чисел аналогична роли рациональных чисел.

[1]) Например, стоит обратить внимание на статью Соболева [1], которая намного опередила теперешний поток литературы.

[2]) См., например, Гельфанд и Шилов [1]. Следует упомянуть еще вышедшую недавно небольшую книгу Лайтхилла, где особое внимание обращается на теорию преобразования Фурье. Книга Лайтхилла отчасти продолжает работу Темпла. См. Лайтхилл [2] и Темпл [1], а также литературу, цитируемую в этих работах.

[3]) См., например, серию работ Эренпрейса [1].

при этом используется „сильный" предельный переход. Например, действительные числа определяются как[1]) сходящиеся последовательности рациональных чисел r_n, такие, что норма $|r_n - r_m|$ стремится к нулю, если n и m стремятся к бесконечности. Функции, интегрируемые по Лебегу, или функции, интегрируемые с квадратом, также можно определить с помощью последовательностей непрерывных функций $f_n(x)$, для которых в соответствующих областях пространства x интегралы $\int |f_n - f_m| dx$ или $\int |f_n - f_m|^2 dx$ стремятся к нулю. Функции в гильбертовых пространствах — это идеальные элементы, заданные как последовательности достаточно гладких функций f_n, для которых основная положительно определенная квадратичная форма $Q(f_n - f_m)$ стремится к нулю.

В этих примерах расширенное пространство $\overline{S}$ — полное, т. е. его нельзя расширить, пополняя по той же самой норме. В противоположность этому данное ниже определение обобщенных функций не будет введено путем пополнения по некоторой норме[2]).

Обобщенные функции вводятся для того, чтобы расширить область применения элементарного анализа за счет снятия весьма стеснительных условий дифференцируемости. Выделение операций над обобщенными функциями как особого рода объектами вместо использования приемов, свойственных тем или иным разделам анализа (это впервые было проделано Лораном Шварцем [1]), оказалось весьма плодотворной идеей; более того, рассматривая эти обьекты как „функции", можно существенно упростить некоторые рассуждения[3]), которые в противном случае были бы очень сложными.

Для целей этой книги достаточно ввести обобщенные функции (как в гл. VI, § 4), применяя линейные дифференциальные операторы к непрерывным функциям и задавая некоторые правила действий над ними. Однако полезно привести два других определения и доказать

[1]) Часто желание дать дескриптивное определение идеальных элементов приводило к таким логическим вывертам, как утверждение: „Действительное число *есть* дедекиндово сечение в множестве рациональных чисел". По-видимому, мало что можно выиграть, пытаясь заменить определение идеальных объектов с помощью соотношений дескриптивными определениями.

[2]) Это „слабое определение". Надо, однако, заметить, что для обобщенных функций можно дать также „сильное" определение с помощью сходимости по некоторой норме (см. замечание ниже, в § 4, п. 4). Связь между слабым и сильным расширениями и их эквивалентность была указана Фридрихсом [4].

[3]) См., например, Гельфанд и Шилов [1]. Получаемые таким путем формальные упрощения не должны создавать иллюзию, что тем самым устраняется самое существо свойственных этому вопросу трудностей; трудности эти только изолируются и выясняются. Часто подлинная трудность переносится на последний этап задачи, когда надо понять, в каком смысле результат, полученный в терминах обобщенных функций, можно выразить с помощью обычных функций.

эквивалентность всех трех определений. Прежде чем сделать это (в § 2, п. 3), мы напомним и дополним некоторые обозначения из гл. VI.

3. Обозначения и определения. Пусть даны два вектора y, z; мы будем считать, что $y < z$, если одна из компонент вектора y меньше, а остальные не больше, чем соответствующие компоненты вектора z.

Как и в гл. VI, § 3, через r мы будем обозначать вектор с n целыми неотрицательными компонентами $r_1, \ldots, r_n$, а через $|r|$ — сумму $r_1 + \ldots + r_n$; иногда мы будем писать $(-1)^r$ вместо $(-1)^{|r|}$. Иногда мы будем через $r+1$ обозначать вектор с компонентами r_i+1, и т. д.

Кроме того, $r \to \infty$ означает, что все компоненты вектора r стремятся к бесконечности. Как и в § 3, мы положим $r! = r_1!\, r_2! \ldots r_n!$. Для любого вектора ξ в n-мерном пространстве ξ^r определяется как произведение $\xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \ldots \xi_n^{r_n}$.

Через $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$, $\mathcal{J}^*$ мы будем обозначать прямоугольные[1]) области в пространстве x, например область $-a < x_i < A$ или все пространство. Обычно через $\bar{\mathcal{J}}$, $\bar{\mathcal{J}}'$ и т. д. мы будем обозначать соответствующие замкнутые области.

Скалярное произведение (g, h) двух функций g и h, как обычно, определяется как интеграл от функции gh по *основной области* $\mathcal{J}$, которая может совпадать со всем пространством.

Через $D^r = D_1^{r_1} \ldots D_n^{r_n}$ мы обозначим оператор дифференцирования, причем D_i обозначает $\partial/\partial x_i$; через D_z мы обозначаем соответствующий оператор дифференцирования, если хотим подчеркнуть, что независимым переменным является вектор z.

Иногда полезно обозначать операторы интегрирования символами D_i^{-1}, D^{-s} и т. д.; при этом не всегда будут указываться нижние пределы соответствующих, интегралов.

Через C^r (или C^∞) мы будем обозначать пространство функций ψ, для которых производные $D^r\psi$ (или $D^\rho\psi$ при всех ρ) непрерывны, или по крайней мере кусочно-непрерывны.

Наконец, мы напомним определение *максимум-нормы* $\|\varphi\|$, соответственно *r-максимум-нормы* $\|\varphi\|_r$ для функции φ в области $\mathcal{J}$; она равна верхней грани в области $\mathcal{J}$ модуля $|\varphi|$, соответственно модулей всех производных $|D^{r'}\varphi|$ при $r' \leqslant r$.

4. Повторное интегрирование. Пусть z — точка-параметр в прямоугольнике $\mathcal{J}$, скажем $0 < x_i < 1$; в области $x < z$ пространства x,

[1]) То, что область $\mathcal{J}$ прямоугольная, удобно, но несущественно.

которую мы обозначим Σ, положим

$$q_r(x;\ z) = q(x;\ z) = \frac{1}{r!}(z-x)^r; \tag{1}$$

вне этой области положим

$$q_r(x;\ z) = 0.$$

Тогда для любой непрерывной функции $h(x)$, которая обращается в нуль на Σ при больших значениях $|x|$, мы положим

$$G(z) = \int \ldots \int q_r(x;\ z)\, h(x)\, dx; \tag{2}$$

согласно элементарным правилам анализа, мы имеем

$$D^{r+1} G(z) = h(z). \tag{3}$$

5. Линейные функционалы и операторы. Билинейная форма. Напомним общее понятие линейного функционала $\Lambda[\varphi]$, который определен для функций $\varphi(x)$, заданных в основной области $\mathcal{G}$ и, кроме того, принадлежащих некоторому линейному „пространству" $\mathfrak{D}$ *основных функций* φ; например, $\mathfrak{D}$ может быть множеством функций, каждая из которых непрерывна в некоторой подобласти $\mathcal{G}'$ области $\mathcal{G}$ и равна нулю вне $\mathcal{G}'$. Основное свойство линейного функционала выражается тождеством $\Lambda[c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2] = c_1\Lambda[\varphi_1] + c_2\Lambda[\varphi_2]$ для любых двух основных функций φ_1, φ_2 и произвольных постоянных c_1 и c_2. Отсюда в предположении непрерывности функционала (см. п. 6) следует тождество

$$\Lambda[\psi(x)] = \int \Lambda[\varphi(x;\ \xi)]\, d\xi, \tag{4}$$

если

$$\psi(x) = \int \varphi(x;\ \xi)\, d\xi \tag{4'}$$

и если основная функция $\varphi(x;\ \xi)$ непрерывно зависит от параметра ξ в пространстве ξ, в котором ведется интегрирование.

Если функционал $\Lambda[\varphi(x);\ y]$ зависит не только от основной функции $\varphi(x)$, но и от параметра y, то Λ представляет собой *линейный оператор*, или *линейное преобразование*,

$$\Lambda[\varphi(x);\ y] = \omega(y)$$

функции $\varphi(x)$ в $\omega(y)$ (иногда это кратко обозначается как $\Lambda[\varphi] = \omega$). Обычно мы рассматриваем случаи, когда переменная y изменяется в пределах той же области $\mathcal{G}$, что и переменная x.

Если можно образовать скалярное произведение функции $\omega(y) = \Lambda[\varphi]$ и основной функции $\psi(y)$ над областью $\mathcal{G}$, то это произведение

$$(\omega,\ \psi) = B[\varphi;\ \psi] = (\Lambda[\varphi],\ \psi) = \int_{\mathcal{G}} \Lambda[\varphi(x);\ y]\,\psi(y)\, dy$$

называется *билинейной формой*, или *билинейным функционалом*, связанным с оператором Λ. Очевидно, что для фиксированного φ это есть линейный функционал относительно ψ, а при фиксированном ψ — линейный функционал относительно φ. Если существует линейный оператор $\Lambda^*[\psi]$, такой, что B можно представить в виде

$$B[\varphi;\ \psi] = (\Lambda[\varphi],\ \psi) = (\varphi,\ \Lambda^*[\psi]), \tag{5}$$

то Λ^* называется оператором, *сопряженным* к Λ[1]).

Производные и вообще дифференциальные операторы являются линейными операторами специального типа, так как они резко *локализованы*, т. е. их значение в точке зависит от значений функции-аргумента $\varphi(x)$ не во всей области изменения x, а только в бесконечно малой окрестности точки $x = y$. (Здесь такие операторы, может быть, следовало бы записывать в более развернутом виде $\Lambda[\varphi(y);\ x]$, где роли x и y меняются. Однако мы позволим себе применять обычные обозначения и будем просто записывать дифференциальные операторы в виде $L[\varphi(x)]$, как мы это делали всюду в этой книге.)

Заметим, что, в противоположность этому, операторы дробного дифференцирования не локализованы; это сразу видно из формул для дробных производных.

6. Непрерывность функционалов. Носители основных функций[2]). Раз и навсегда мы предположим, что основные функции $\varphi(x)$ непрерывны и, кроме того, что каждая из них тождественно равна нулю вне некоторой конечной области $\mathcal{J}^*$, которая называется *носителем*; такие функции называют функциями с *ограниченным носителем*, или *финитными*. Мы будем иногда говорить, что функция φ *сосредоточена на* $\mathcal{J}^*$.

Если, кроме того, все производные $D^{r'}\varphi$ при $r' \leqslant r$ непрерывны (т. е. функция φ принадлежит классу C^r), то мы скажем, что функция φ принадлежит классу $\mathfrak{D}_r$; если *все* производные функции φ непрерывны (т. е. φ принадлежит C^∞), то функции φ образуют более узкий класс $\mathfrak{D}_\infty$ или, короче, $\mathfrak{D}$. Очевидно, что $\mathfrak{D}_{r'}$ включает $\mathfrak{D}_r$, если $r' < r$. Если не оговорено противное, то мы будем предполагать, что φ принадлежит C^∞ или $\mathfrak{D}$.

Мы рассмотрим основную область $\mathcal{J}$ в пространстве x. Линейный функционал $\Lambda[\varphi]$ (и аналогично линейный оператор) называется *непрерывным*, если

$$\Lambda[\varphi_\varepsilon] \to \Lambda[\varphi]$$

[1]) Относительно понятия сопряженного оператора см. гл. III, приложение 1, § 2.

[2]) В текст этого приложения редактором внесены небольшие изменения. — *Прим. ред.*

для любой последовательности основных функций φ_ε с носителем в произвольной подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ области $\mathcal{G}$, равномерно по x сходящейся к функции φ при $\varepsilon \to 0$. В силу линейности следующее определение эквивалентно только что приведенному. Для всех непрерывных основных функций с носителем в замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ области $\mathcal{G}$ существует фиксированное положительное число λ, такое, что $|\Lambda[\varphi]| \leqslant \lambda \|\varphi\|$.

Менее сильное определение непрерывности можно сформулировать следующим образом. Функционал $\Lambda[\varphi]$ называется *r-непрерывным* в области $\overline{\mathcal{G}}^*$, если при некоторой фиксированной положительной постоянной λ мы имеем

$$|\Lambda[\varphi]| < \lambda m$$

для всех основных функций φ с носителем в $\overline{\mathcal{G}}^*$, принадлежащих $\mathfrak{D}_r$ и таких, что *r-максимум-норма* $\|\varphi\|_r$ функции φ ограничена постоянной m.

Очевидно, что требование r'-непрерывности функционала $\Lambda[\varphi]$ менее сильно, чем требование r-непрерывности, если $r' > r$. Сформулированное выше определение непрерывности при условии, что ограничена только величина $\|\varphi\|$, является более сильным условием на функционал $\Lambda[\varphi]$, чем r-непрерывность при любом $r > 0$. Мы будем называть такую „обычную“ непрерывность *нуль-непрерывностью*.

Иногда бывает необходимо рассматривать в открытой основной области $\mathcal{G}$ функционал $\Lambda[\varphi]$, который r-непрерывен при каком-нибудь значении индекса r в каждой замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ (это значение r может зависеть от $\mathcal{G}^*$). Такой функционал мы будем называть *почти непрерывным* в $\mathcal{G}$. Это понятие охватывает все важнейшие случаи.

Для формальной общности иногда вводят кажущееся менее ограничительным условие, при котором основные функции φ в области $\mathcal{G}$ принадлежат самому узкому классу $\mathfrak{D}$, или $\mathfrak{D}_\infty$. Пусть m_ν — произвольная последовательность положительных чисел, а $\overline{\mathcal{G}}^*$ — любая замкнутая подобласть $\mathcal{G}$. На функционал налагают следующее условие: существует положительная постоянная λ (зависящая от $\mathcal{G}^*$ и от последовательности m_ν), такая, что $|\Lambda[\varphi]| \leqslant \lambda$ для любой основной функции φ из $\mathfrak{D}_\infty$ с носителем в $\overline{\mathcal{G}}^*$, для которой $\|D^\nu\varphi\| \leqslant m_\nu$.

Следует заметить, что в этом определении не требуется, чтобы бесконечное множество чисел m_ν было ограничено равномерно по ν. Поэтому это определение нельзя сформулировать в терминах максимум-норм, как это было сделано для r-непрерывности[1]).

[1]) Пространство $\mathfrak{D}_\infty$ не нормируемо с помощью максимум-нормы.

Иногда мы этот более слабый тип непрерывности будем называть ∞-*непрерывностью* или ω-*непрерывностью* функционала $\Lambda[\varphi]$.

Как мы увидим в следующем пункте, это понятие не является более общим по сравнению с почти непрерывностью.

7. Лемма об r-непрерывности. Мы приведем здесь одну довольно тривиальную лемму[1]), позволяющую произвести более тонкое сравнение r-непрерывности и почти непрерывности с ω-непрерывностью. Если функционал $\Lambda[\varphi]$ ω-непрерывен в открытой области $\mathcal{G}$, то для любой замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}^*}$ существует конечный индекс r, такой, что функционал Λ в $\overline{\mathcal{G}^*}$ r-непрерывен для всех основных функций с носителем в $\overline{\mathcal{G}^*}$. Этот индекс r, конечно, может зависеть от $\mathcal{G}^*$ и может увеличиваться при расширении $\mathcal{G}^*$ (как будет показано на примерах). Другими словами, ω-непрерывность и почти непрерывность функционала $\Lambda[\varphi]$ в $\mathcal{G}$ эквивалентны.

Доказательство леммы проводится от противного и вытекает из самого смысла определения. Предположим, что функционал $\Lambda[\varphi]$ не является r-непрерывным в некоторой замкнутой области $\overline{\mathcal{G}^*}$, каким бы большим мы ни выбирали r. Тогда для любого r существовала бы допустимая основная функция φ_r, такая, что $|\Lambda[\varphi_r]| > |r|$, а величина $\|\varphi_r\|_r$ при этом становилась бы сколь угодно малой, например $\|\varphi_r\|_r \leqslant 1/(|r|+1)$. (Как и раньше, $\|\varphi\|_r$ обозначает r-максимум-норму для замкнутой области $\overline{\mathcal{G}^*}$.) Тогда очевидно, что последовательность φ_r в $\overline{\mathcal{G}^*}$ равномерно сходится к нулю при $r \to \infty$ вместе со всеми производными $D^{r'}\varphi_r$ при фиксированном r'. В силу предположения об ω-непрерывности в пространстве $\mathfrak{D}$ с величиной $m_r = \max\limits_{r} \|\varphi_{r'}\|_r$ значения функционала $\Lambda[\varphi_r]$ должны быть ограниченными, что противоречит предположению $|\Lambda[\varphi_r]| > |r|$. Это завершает наше доказательство.

8. Некоторые вспомогательные функции. Мы построим некоторые частные финитные функции из C^∞, которые понадобятся нам в § 2. Сначала рассмотрим одну независимую переменную x и для положительных α положим

$$p(x;\ \alpha) = \begin{cases} e^{z(x;\ \alpha)} & \text{для } -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha, \\ 0 & \text{для } x < -\alpha, \\ 1 & \text{для } x > \alpha, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$z(x;\ \alpha) = -e^{x/(x^2-\alpha^2)}. \tag{6a}$$

[1]) Это только утверждение о существовании, совершенно несущественное в применении к математической физике.

Эта функция p равна нулю для $x < -\alpha$, тождественно равна единице для $x > \alpha$ и принадлежит C^∞. Для n переменных произведение

$$P(x;\ \alpha) = p(x_1;\ \alpha)\, p(x_2;\ \alpha) \ldots p(x_n;\ \alpha) \tag{6б}$$

принадлежит C^∞; эта функция равна нулю при $x \leqslant -\alpha$ (это значит, что $x_i \leqslant -\alpha$) и тождественно равна единице при $x \geqslant \alpha$.

Аналогично, функция одной переменной

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{d}{dx}\, p(x;\ \varepsilon) \tag{7}$$

принадлежит C^∞ и обращается в нуль вне интервала $-\varepsilon < x < \varepsilon$. При каждом значении ε мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\, dx = 1. \tag{8}$$

Положим $\varepsilon = 1/n$ и будем писать δ_n вместо δ_ε; тогда для любой функции $\varphi(x)$, непрерывной в $\mathcal{G}$, как известно, имеем

$$\varphi(x) = \lim \int_{\mathcal{G}} \delta_n(x - \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \lim\, (\varphi,\ \delta_n(x - \xi)). \tag{9}$$

Предел всегда рассматривается при $n \to \infty$ или при $\varepsilon \to 0$.

9. Примеры. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих введенное понятие непрерывности. Пусть x — одна переменная, $\mathcal{G}$ — открытый интервал $-1 < x < 1$; тогда $\varphi(0)$ есть непрерывный функционал для $\varphi(x)$ из $\mathfrak{D}_0$. Величина $D^r(\varphi(0)) = \varphi^r(0)$ есть r-непрерывный функционал от $\varphi(x)$ в области $\mathcal{G}$.

Однако, как читатель может убедиться, величина

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi^\nu(0)}{\nu!} \tag{10}$$

не является функционалом от φ, непрерывным в смысле определений из п. 6.

В противоположность этому, ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^\nu\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \sum_{\nu} D^\nu \varphi\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \tag{11}$$

сходится, если носитель функции φ находится на некотором замкнутом подинтервале $\overline{\mathcal{G}}^*$, например на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1 - 1/r$; на этом

отрезке функционал r-непрерывен. Индекс r возрастает, если отрезок $\overline{\mathcal{J}^*}$ расширяется до $\mathcal{J}$, а во всей области $\mathcal{J}$ выражение (11), очевидно, не является r-непрерывным; но этот функционал, например, ω-непрерывен над пространством $\mathfrak{D}_\infty$.

Выражение $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi'(1 - 1/\nu)$ представляет собой 1-непрерывный функционал в области $\mathcal{J}: -1 < x < 1$ над пространством $\mathfrak{D}_1$ функций с носителем в $\mathcal{J}$. Аналогично, $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu)$ есть непрерывный функционал, если основной областью $\mathcal{J}$ является вся числовая ось.

§ 2. Обобщенные функции

1. Введение. Возвращаясь к основным пунктам теории, мы дадим три варианта определения[1]) обобщенных функций и установим их эквивалентность. Эти расширения понятия обычных функций основаны на принципе *слабого определения*, или *слабой сходимости*. Вместо того чтобы охарактеризовать некоторую непрерывную функцию f в $\mathcal{J}$ с помощью значений, которые она принимает, мы могли бы с тем же успехом охарактеризовать ее с помощью *множества всех скалярных произведений* (f, φ) для всех основных функций φ класса $\mathfrak{D}$ с носителем в $\mathcal{J}$ [2]). Для непрерывных функций f это „слабое" определение эквивалентно обычному определению, если пространство $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$ состоит, например, из непрерывных функций. Однако именно это слабое определение открывает путь для обобщения. Мы не принимаем во внимание исходное определение „функции", представленной множеством значений, соответствующих различным точкам x, и вместо этого рассматриваем значения скалярных произведений (f, φ) для обычных основных функций φ как исчерпывающую характеристику символа функции f. Чтобы ввести „функцию" f как символический множитель в скалярном произведении, следует прежде всего дать соответствующее определение скалярного произведения (f, φ), т. е. определение, в котором не предполагается, что функция f известна из каких-нибудь других соображений. Наши три определения слегка отличаются одно от другого именно способом, каким определяется это скалярное произведение.

---

[1]) Как указывалось выше, эти определения не дескриптивные.

[2]) Мы напоминаем, что термин „основная функция, сосредоточенная в $\mathcal{J}$", означает, что носитель этой функции лежит в $\mathcal{J}$; „функционал $\Lambda[\varphi]$ определен в $\mathcal{J}$" означает, что основные функции φ, к которым он применяется, должны иметь носитель в $\mathcal{J}$. Скалярные произведения (f, g) всегда относятся к основной области $\mathcal{J}$. Можно также дать такое определение: некоторый функционал имеет носитель в $\mathcal{J}$, если он обращается в нуль для всех основных функций, равных нулю в $\mathcal{J}$.

Как было сказано выше, главная задача — установить неограниченную дифференцируемость в расширенном множестве $\bar{S}$ обобщенных функций и представить общий линейный функционал в виде скалярного произведения.

Три определения опираются на а) линейные дифференциальные операторы L; б) слабые пределы непрерывных функций, в) обшее понятие линейных функционалов. В каждом случае мы должны дать определение только для некоторой конечной замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ области $\mathcal{G}$, а затем его можно легко распространить на области $\hat{\mathcal{G}}$, содержащие $\overline{\mathcal{G}}^*$. Для краткости мы будем предполагать, что области $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ (и т. д.) прямоугольные[1]).

Как мы увидим в п. 6, *обобщенные функции образуют линейное пространство*, т. е. суммы и линейные комбинации обобщенных функций снова являются обобщенными функциями.

2. Определение с помощью линейных дифференциальных операторов. Для любой пары сопряженных линейных дифференциальных операторов L и L^* порядка r с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами в некоторой замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ области $\mathcal{G}$ и для любой непрерывной — или даже кусочно-непрерывной — функции W в $\overline{\mathcal{G}}^*$ мы обозначим символом

$$f = L[W]$$

некоторую обобщенную функцию в $\overline{\mathcal{G}}^*$ и придадим смысл этому символу с помощью такого *определения* скалярного произведения:

$$(f, \varphi) = (L[W], \varphi) = (W, L^*[\varphi]), \tag{1}$$

где основные функции φ принадлежат C_r и имеют носитель в $\overline{\mathcal{G}}^*$. Два таких линейных оператора L и M порядков соответственно r и s для обыкновенных функций W и V определяют одну и ту же обобщенную функцию f в $\overline{\mathcal{G}}^*$, если для всех φ с носителем в $\overline{\mathcal{G}}^*$ имеем $(W, L^*[\varphi]) = (V, M^*[\varphi])$.

Если, кроме того, операторы M и M^*, а также функция V, определены в некоторой области $\hat{\mathcal{G}}$, содержащей $\overline{\mathcal{G}}^*$, то с помощью символа $M[V]$ обобщенная функция f распространяется[2]) на $\hat{\mathcal{G}}$. Если такая обобщенная функция f определена для всякой замкнутой подобласти открытой основной области $\mathcal{G}$, то считают, что обобщенная функция f определена во всей основной области $\mathcal{G}$.

---

[1]) Так как другие замкнутые области можно покрыть кубами, то не возникает существенных трудностей, если допустить более общие области. Но для наших целей не стоит преодолевать даже мелких связанных с этим затруднений.

[2]) Для более широкой области может оказаться, что индекс s больше, чем r.

Это *определение* а), которое является перефразировкой определения, данного в гл. VI, § 4, основывается на тождестве Грина

$$(W, L^*[\varphi]) = (\varphi, L[W]),$$

справедливом для обычных функций W, принадлежащих C^r, ввиду того, что носитель функции φ лежит в $\overline{\mathcal{G}}^*$. Снова подчеркнем, что имеет смысл говорить об обобщенных функциях только после того, как дано независимое определение скалярного произведения.

Особое значение имеют сопряженные операторы

$$L[W] = D^r W; \quad L^*[\varphi] = (-1)^{|r|} D^r \varphi.$$

Ясно, что в случае одной переменной x последовательные производные $D^r W = f$ некоторой непрерывной функции W являются обобщенными функциями, которые в силу определения а) характеризуются скалярным произведением (1), где $L = D^r$ обозначает дифференцирование по x.

Для любого числа n переменных x и любого индекса s производная $D^s f = D^s L[W]$ определяется с помощью линейного дифференциального оператора $N = D^s L$. Предположим, что операторы L и L^* имеют бесконечно дифференцируемые коэффициенты; тогда легко видеть, что *обобщенные функции можно неограниченно дифференцировать*. Предположение о коэффициентах не является существенным, ибо, как мы увидим в п. 5, любая обобщенная функция f из $\overline{\mathcal{G}}^*$ может быть представлена в специальном виде $f = D^r W$ с непрерывной „порождающей функцией“ W и достаточно большим индексом r.

Мы добавим следующее важное замечание: очевидно, что *скалярное произведение* (f, φ) *является* r*-непрерывным линейным функционалом над основными функциями* φ *с носителем в* $\overline{\mathcal{G}}^*$.

Можно применить это определение к примерам, рассмотренным в § 1.

Для случая одной переменной x через $.g(x)$ мы обозначим функцию, равную $g(x)$ при $x > 0$ и нулю при $x < 0$; тогда для оператора $L = D^3$ и функции $W = .x^2/2$ мы имеем

$$D^3 W = \delta(x),$$

где δ обозначает дельта-функцию. Или, в очевидных обозначениях[1]), для $W(x) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} .(x - x_\nu)^2$ мы имеем

$$D^3 W = \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta(x - x_\nu),$$

[1]) Здесь используется обозначение:

$$\cdot(x - x_\nu)^2 = \begin{cases} (x - x_\nu)^2 & \text{при} \quad x > x_\nu, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant x_\nu. \end{cases}$$ — *Прим. ред.*

если только $x_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$. Здесь область $\mathcal{G}$ — вся бесконечная ось x. Если значения x_ν^2 сходятся к некоторому пределу, например к 1, то в качестве $\mathcal{G}$ мы возьмем открытый интервал $-1 < x < 1$.

Для

$$W(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (x-\nu)^\nu \frac{1}{\nu!}$$

мы не можем построить обобщенную функцию с помощью одного оператора D^r с фиксированным r во всей бесконечной области $\mathcal{G}$, $-\infty < x < +\infty$, но для интервала $\mathcal{G}^*$, $-\frac{1}{2} - r < x < \frac{1}{2} + r$, мы имеем соответствующее выражение

$$D^{r+2}W = \delta^r(x-1) + \delta^{r-1}(x-2) + \ldots + \delta(x-r).$$

Конечно, все эти обобщенные функции остаются неизменными в любом фиксированном подинтервале $\overline{\mathcal{G}}^*$, даже если r возрастает неограниченно.

Читатель легко может привести другие примеры, иллюстрирующие введенные выше понятия.

3. Определение с помощью слабых пределов. Мы рассмотрим последовательность функций f_n, непрерывных в основной области $\mathcal{G}$. Мы предположим, что для некоторой замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ и для основных функций φ, сосредоточенных в $\overline{\mathcal{G}}^*$, скалярные произведения

$$((f_n - f_l), \varphi)$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$ и $l \to \infty$ при условии, что r-максимум-норма функции φ ограничена. В таком случае мы будем называть последовательность f_n *слабо r-сходящейся в* $\mathcal{G}^*$. Теперь мы поставим в соответствие такой последовательности *слабый предел* при $n \to \infty$: $f = \lim f_n$ и зададим эту обобщенную функцию f в $\mathcal{G}^*$ с помощью следующего *определения* скалярного произведения:

$$(f, \varphi) = \lim (f_n, \varphi). \tag{2}$$

Часто это *определение* б) оказывается применимым с одним и тем же r для всей основной области $\mathcal{G}$. Но для общности надо допустить случай, когда при расширении области $\mathcal{G}^*$ индекс r можно заменить бо́льшим индексом, ослабляя таким образом требования на сходимость f_n. Таким образом, мы определим обобщенную функцию f во всей основной области $\mathcal{G}$ как *почти слабый предел* функций f_n, непрерывных в $\mathcal{G}$, предполагая, что для каждой замкнутой

подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ существует такой индекс r, для которого последовательность f_n является слабо r-сходящейся в $\overline{\mathcal{G}}^*$.

Надо снова подчеркнуть, что из слабой r-сходимости последовательности функций f_n в $\mathcal{G}^*$ следует слабая r'-сходимость для любого $r' > r$, так как требование слабой r-сходимости более сильное, чем требование слабой r'-сходимости при $r' > r$.

Наиболее сильным видом слабой сходимости является нуль-сходимость, т. е. слабая сходимость в том случае, когда предполагается только ограниченность $\|\varphi\|$. В противоположность этому почти слабая сходимость во всей основной области $\mathcal{G}$ определяется с помощью менее сильного требования, которому удовлетворяет гораздо более широкий класс последовательностей f_n [1]).

Очень важен следующий факт: слабый предел (f, φ) в $\overline{\mathcal{G}}^*$ является r-непрерывным линейным функционалом от φ [2]). Для всей основной области $\mathcal{G}$ предел $(f, \varphi) = \lim (f_n, \varphi)$ является почти непрерывным линейным функционалом от φ в указанном выше смысле.

Заметим, что при $n = 1$ дельта-функция $\delta(x)$ является слабым пределом (при $r = 0$) функций $\delta_n(x)$, определенных в § 1, п. 8, и, конечно, также слабым пределом любой последовательности функций f_n, которые стремятся к нулю вне отрезка $x^2 < 1/n$, неотрицательны, и для которых $\int\limits_{-1/n}^{1/n} f_n\, dx \to 1$.

4. Определение с помощью линейных функционалов. Третий вариант в) определения обобщенных функций возникает, если мы переменим роли выводов и предположений в определениях а) и б) и дадим следующее определение. Каждому линейному функционалу $\Lambda[\varphi]$, который является r-непрерывным или только почти непрерывным в основной области $\mathcal{G}$, мы поставим в соответствие обобщенную функцию f, просто определяя скалярное произведение как

$$(f, \varphi) = \Lambda[\varphi]. \tag{3}$$

Это значит, что для допустимых основных функций φ, сосредоточенных в некоторой замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ области $\mathcal{G}$, в которой функционал $\Lambda[\varphi]$ r-непрерывен, соотношение (3) является слабым определением функции f.

---

[1]) Между прочим, можно было бы ввести слабую r-сходимость также и для отрицательных индексов r; но для наших целей мы бы ничего не получили из такого определения.

[2]) См., например, Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М. — Л., 1951, § 24, стр. 193, 194, а также Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958, стр. 67, 68. — *Прим. ред.*

Между прочим, лемма из § 1, п. 7 показывает, что мы могли бы с тем же успехом исходить из предположения, что функционал $\Lambda[\varphi]$ ω-непрерывен в $\mathcal{G}$.

Но мы хотим обойтись без доказательства эквивалентности, данного в лемме, и будем исходить из предположения, что в каждой замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ области $\mathcal{G}$ функционал $\Lambda[\varphi]$ r-непрерывен при некотором значении r.

Мы напомним также следующее: если функционал $\Lambda[\varphi]$ r-непрерывен в области $\overline{\mathcal{G}}^*$, то вместо φ мы можем брать функции ψ в $\mathcal{G}^*$, обладающие непрерывными производными $D^{r'}\psi$ только для $r' \leqslant r$. Такие функции ψ, а также их производные вплоть до $D^r\psi$ можно равномерно аппроксимировать с помощью функций φ_n из C^∞; следовательно, в силу требования r-непрерывности, значение функционала $\Lambda[\psi]$ можно определить как соответствующий предел величин $\Lambda[\varphi_n]$ при $n \to \infty$.

Некоторая абстрактность определения в) немедленно устраняется с помощью следующих рассмотрений.

5. Эквивалентность. Представление функционалов. Все три определения, приведенные выше, эквивалентны.

Прежде всего, как уже указывалось, определения а) и б) позволяют определить функционалы (f, φ), обладающие свойством в). Кроме того, из определения в) легко выводится определение б). Это легко видеть, если, например, записать, что

$$\Lambda[\varphi] = \lim_{n\to\infty} \int \varphi(\xi)\, \Lambda[\delta_n(x-\xi)]\, d\xi,$$

в соответствии с формулой (9) из § 1, п. 8. Так как функции $\delta_n(x-\xi)$ принадлежат C^∞, то при $n \to \infty$ мы имеем

$$\Lambda[\varphi] = \lim (f_n, \varphi), \tag{4}$$

где

$$f_n(x) = \Lambda[\delta_n(x-\xi)], \tag{5}$$

в соответствии с определением б).

Следовательно, остается только установить эквивалентность определений в) и а).

Для этого мы предположим, что рассматриваемый функционал $(r-2)$-непрерывен[1]) в некоторой замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}}^{**}$ области $\mathcal{G}$. Для простоты[2]) мы будем считать, что $\overline{\mathcal{G}}^{**}$ — куб $-\alpha \leqslant$

[1]) Отсюда следует, что $r \geqslant 2$ (т. е. $r_i \geqslant 2$ для $i = 1, \ldots, n$), так как предполагается, что индекс непрерывности $\Lambda[\varphi]$ не отрицателен.

[2]) Как говорилось раньше, требование, чтобы области $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$, $\mathcal{G}^{**}$ были прямоугольными, удобно, но не необходимо.

$\leqslant x_i \leqslant 1+\alpha$, где α принимает малое положительное значение, и что $\overline{\mathcal{J}}^*$ — куб $\alpha \leqslant x_i \leqslant 1$, в то время как основная область $\mathcal{J}$ должна содержать больший куб $-2\alpha < x_i < 1+2\alpha$.

Тогда эквивалентность определений в) и а) следует из основной теоремы о представлении функционалов.

Если функционал $\Lambda[\varphi]$ является $(r-2)$-непрерывным (при $r-2 \geqslant 0$) в некоторой области $\overline{\mathcal{J}}^{**}$, содержащей область $\overline{\mathcal{J}}^*$, то для $\overline{\mathcal{J}}^*$ мы можем построить такую непрерывную функцию W, что для всех основных функций φ с носителем в $\overline{\mathcal{J}}^*$ будет выполняться равенство

$$\pm \Lambda[\varphi] = (W,\ D^r\varphi), \tag{6}$$

где $\pm$ стоит вместо выражения $(-1)^{|r|}$ и где функция

$$W = \Lambda[\psi] \tag{6а}$$

будет явно определена через указанную ниже функцию ψ.

Это является свойством, указанным в определении а), в случае, когда берется простая *нормальная форма D^r линейного дифференциального оператора L*[1]).

Чтобы доказать формулу (6) и построить функцию W, мы можем в $\Lambda[\varphi]$ подставлять основные функции, которые не обязательно принадлежат C^∞, но должны быть $(r-2)$ раза непрерывно дифференцируемыми в $\mathcal{J}^{**}$ (см. § 2, п. 3). В частности, с помощью функций $p(x;\ \alpha)$ и $q_r(x;\ z)$, определенных в § 1, п. 4 и § 1, п. 8, определим следующую основную функцию ψ в $\mathcal{J}^*$, зависящую от параметра z:

$$\psi(x,\ z) = p(x;\ \alpha)\, q_{r-1}(x;\ z). \tag{6б}$$

При фиксированном значении индекса аппроксимации n и для функции f_n, заданной формулой (5), выражение

$$(f_n,\ \psi) = W_n(z)$$

определяет непрерывную функцию $W_n(z)$ параметра z в $\overline{\mathcal{J}}^*$; кроме того, в силу (5), предельная функция

$$W(z) = \lim W_n(z) = \lim (f_n,\ \psi) = \lim (pf_n,\ q_{r-1}) = \Lambda[\psi] \tag{7}$$

непрерывна по z. Более того, в силу основного свойства функций q_r,

---

[1]) Как следствие имеем, что для любого дифференциального оператора L в $\mathcal{J}^*$ существует линейный оператор T (который, по существу, является интегральным оператором $(D^{-r}L)^{-1}$), такой, что для некоторого r имеем $LT = D^r$.

Конечно, этот факт легко проверить непосредственно; это упражнение из элементарного анализа.

указанного в § 1, п. 4, (3), функции W_n имеют непрерывные производные вплоть до порядка r, причем $D^r(W_n) = pf_n$; так как $p = 1$ в $\overline{\mathcal{G}}^*$, мы имеем

$$D^r W_n = f_n(z) \text{ в } \overline{\mathcal{G}}^*. \tag{8}$$

Наконец, мы возвращаемся к функционалу $\Lambda[\varphi] = \lim(f_n, \varphi)$, определенному для любой функции φ из C^∞, носитель которой лежит в $\overline{\mathcal{G}}^*$. С помощью интегрирования по частям мы получим[1])

$$\Lambda[\varphi] = \lim(D^r W_n, \varphi) = \pm \lim(W_n, D^r \varphi).$$

В этом последнем выражении мы перейдем к пределу под знаком интеграла и получим

$$\Lambda[\varphi] = \pm(W, D^r \varphi),$$

где $W = \Lambda[\psi]$, как и утверждает теорема.

Надо снова подчеркнуть, что соотношение между f и „порождающей функцией“ W сохраняется, если заменить W на $W + V$, где V — некоторая функция из C_r, или даже некоторая обобщенная функция, для которой $D^r V$ тождественно обращается в нуль.

Мы отметим также следующее. *Если в данных выше определениях обобщенных функций*

$$f_n(z) \equiv \Lambda(\delta_n(x - z)) \to f(z),$$

где f — непрерывная функция, то для порождающей функции W существует производная $D^r W$ в обычном смысле и $D^r W = f$.

Аналогично, если в случае определений а) *или* б) *в области $\mathcal{G}'$ существует $L[W] = f$ как регулярный непрерывный дифференциальный оператор, или если последовательность f_n равномерно сходится к некоторой непрерывной функции f, то в области $\mathcal{G}'$ обобщенную функцию можно отождествить с непрерывной функцией f* (см. п 8).

6. Некоторые выводы. Из наших эквивалентных определений вытекают следующие свойства.

Сумма двух обобщенных функций f и g также является обобщенной функцией. Если f и g $(r-2)$-непрерывны, то тем же свойством обладает их сумма $(r - 2 \geqslant 0)$.

Произведение обобщенной функции f на обычную функцию g из C^∞ снова есть обобщенная функция. Если в некоторой области $\overline{\mathcal{G}}^*$

[1]) Здесь и всюду знак $\pm$ обозначает $(-1)^{|r|}$.

предполагается лишь $(r-2)$-непрерывность f, то произведение также будет $(r-2)$-непрерывной обобщенной функцией, если g принадлежит только C_{r-1}.

Локализация и разложение. Хотя формально обобщенная функция $f(x)$ не определяется в отдельных точках, ее можно рассматривать в сколь угодно малой замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}^*$, если брать только такие основные функции φ, носитель которых лежит в $\overline{\mathcal{G}}^*$. Кроме того, как мы покажем ниже в п. 8, любая обобщенная функция f может быть разложена в сумму двух или большего числа обобщенных функций, каждая из которых равна нулю всюду, кроме некоторой замкнутой области, причем эти области покрывают основную область.

7. Пример. Дельта-функция. Можно в качестве иллюстрации данных выше общих понятий привести пример дельта-функции Дирака. Для случая одной переменной x она определяется с помощью соотношения $\delta(x) = D^2(.x)$, где точка перед функцией снова означает, что для отрицательных значений независимой переменной функция равна нулю. Связанный с этой обобщенной функцией линейный функционал $\Lambda[\varphi] = (\delta(x), \varphi) = \varphi(0)$ очевидно нуль-непрерывен.

Между прочим, этот пример показывает, что зазор между $(r-2)$ и r в теореме о представлении п. 5 связан с существом дела, так как, вообще говоря, $(r-2)$-непрерывные функционалы представляются как производные вида D^rW от непрерывной функции W.

В пространстве n измерений дельта-функцию $\delta(x)$ можно определить как

$$\delta(x) = D^2W, \quad \text{где} \quad W = (.x_1)(.x_2)\ \ldots\ (.x_n),$$

или просто как произведение

$$\delta(x) = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\ \ldots\ \delta(x_n).$$

Эта обобщенная функция снова соответствует функционалу $\Lambda[\varphi] = \varphi(0)$.

Дельта-функции и их производные (см. ниже) являются простейшими обобщенными функциями; их носитель сосредоточен в одной точке O, и вне этой точки их можно отождествить (см. п. 8) с обыкновенной функцией, тождественно равной нулю.

Конечно, производные $D^s\delta(x)$ определяются соответствующими производными $D^{s+2}W$ от порождающей функции W, или как пределы производных тех функций f_n, слабым пределом которых является δ.

В силу естественного обобщения свойств функций W или f_n мы называем δ-функцию *четной функцией*:

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

а ее производные — попеременно нечетными и четными.

Мы добавим еще несколько формул, представляющих одномерную δ-функцию как слабый предел:

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon}e^{-x^2/\varepsilon^2}, \tag{9}$$

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{x}. \tag{10}$$

Эти формулы выражают факты, хорошо известные из теории уравнения теплопроводности и рядов Фурье соответственно. Вторую формулу можно записать также в виде

$$2\pi\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{+n}e^{i\xi x}\,d\xi$$

или, короче (см. § 4, п. 3), в виде

$$2\pi\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}\,d\xi. \tag{11}$$

Это есть „преобразование Фурье функции, тождественно равной единице". (Между прочим, формула (9) дает пример нуль-сходимости, а формула (10) — пример 1-сходимости.) Другое интересное представление непосредственно следует из интегральной формулы Пуассона для функции Грина оператора Лапласа в верхней полуплоскости; очевидно, что δ-функция просто является символом для граничного значения функции Грина при $y=0$:

$$\pi\delta(x)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{12}$$

8. Отождествление обобщенных и обыкновенных функций. Не всегда при рассмотрении отдельных задач наиболее правильным путем является применение теории обобщенных функций в максимальной общности. В большинстве случаев целесообразно ограничиться более узкими, но более обозримыми классами обобщенных функций; особенно полезны бывают обобщенные функции, которые в некоторых подобластях области $\mathcal{G}$ можно отождествить с обычными функциями. Если в некоторой замкнутой подобласти $\overline{\mathcal{G}}^*$ области $\mathcal{G}$ порождающая функция [1]) W обладает непрерывными производными вплоть до порядка r, то в области $\overline{\mathcal{G}}^*$ обобщенную функцию D^rW можно отождествить с обыкновенной непрерывной функцией $f(x)$. Эквива-

[1]) Полезно заметить, что в наших определениях мы всегда можем заменить требование непрерывности функций W или f_n более слабым требованием кусочной непрерывности.

лентным образом это отождествление можно произвести, если в $\bar{\mathcal{G}}^*$ порождающая последовательность сходится не только слабо, но и равномерно, к некоторой непрерывной функции $f(x)$ (или, в случае применения определения в), если последовательность $f_n = \Lambda[\delta_n(x-\xi)]$ в $\mathcal{G}^*$ сходится к некоторой непрерывной функции f).

Здесь мы сделаем следующее замечание: если область $\mathcal{G}$ можно покрыть конечным числом областей $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$, то мы всегда можем разложить любую допустимую основную функцию φ в сумму $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$ допустимых основных функций φ_ν, носитель которых лежит в $\mathcal{G}_\nu$; поэтому любая обобщенная функция f в области $\mathcal{G}$ является суммой обобщенных функций $f_1 + f_2 + \ldots = f$, таких, что f_ν тождественно обращается в нуль вне $\mathcal{G}_\nu$.

В частности, в большинстве рассматриваемых случаев мы имеем дело с обобщенными функциями $f = D^r W$, которые являются обычными функциями всюду, за исключением *особенностей, сосредоточенных* в подобласти G^* некоторой большей области G, причем вне G^* порождающая функция W имеет непрерывные производные $D^r W$, или, что эквивалентно, порождающая последовательность f_n сходится не только слабо, но и равномерно, к некоторой непрерывной функции f. Часто это точечное множество G^* состоит из изолированных точек, кривых и т. д. Функции $D^r W$ в этих точках могут иметь особенности в обычном смысле слова, но если мы будем рассматривать f как обобщенную функцию, то эти особенности будут учтены только в операциях, установленных для обобщенных функций (определяемых через скалярное произведение); вне множества G^* нет необходимости подчеркивать обобщенный характер функции $D^r W$. Именно так в § 4, гл. VI мы действовали с сингулярной функцией $S(\varphi)$, особенности которой сосредоточены на многообразии[1]) $\varphi = 0$ и которая является обобщенной функцией одной переменной φ.

Мы снова приведем некоторые функции W одной переменной x, имеющие изолированную особенность при $x = 0$, и их производные:

$$W = x\log|x| - x, \quad DW = \log|x|, \quad D^2W = \frac{1}{x}, \quad D^3W = -\frac{1}{x^2};$$

$$W = .(x\log x - x), \quad DW = .\log x, \quad D^2W = .\frac{1}{x}, \quad D^3W = -.\frac{1}{x^2};$$

$$W = .x^\alpha, \qquad DW = .\alpha x^{\alpha-1}, \quad D^2W = .\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ldots$$

$$(0 < \alpha < 1).$$

В тех точках, где имеется особенность, интерпретация этих выражений как обобщенных функций существенно отличается от их интерпретации как обыкновенных функций. Обобщенным функциям при

[1]) Не надо путать с обозначением φ для основных функций.

$x=0$ не приписывается никакого бесконечного значения; наоборот, слабые определения сглаживают влияние особенностей (см. п. 9).

Согласованность этих определений становится ясной из рассуждений п. 5.

Как следствие мы легко можем получить такой результат. *Обобщенная функция f с носителем в одной точке, например в начале координат, является линейной комбинацией дельта-функции и ее производных до некоторого порядка.*

Действительно, как легко видеть, построение, проведенное в п. 5, дает для f в качестве порождающей функции W полином степени меньшей, чем r, в „положительной“ части пространства $x_i > 0$, $i=1, \ldots, n$, в то время как вне этой части пространства x функция W тождественно равна нулю. В самом деле, вне малого квадрата $Q_\varepsilon : |x_i| < \varepsilon$ функции f_n при этом построении обращаются в нуль; поэтому $W_n(z)=0$ для значений z вне полуоси $z_i \geqslant -\varepsilon$, так как для каждой точки z в скалярном произведении $W_n(z)=(f_n, \psi)$, определяющем $W_n(z)$, обращается в нуль один из сомножителей. Кроме того, для $z_i \geqslant 0$ множитель $\psi(x; z)$ является полиномом относительно z степени меньшей, чем r. Так как $W_n(z) \to W(z)$, мы получаем соответствующее утверждение относительно $W(z)$. Следовательно, $W(x)$ есть сумма одночленов вида $(.x_1^{r'_1}) \ldots (.x_n^{r'_n})$, где $r'_i \leqslant r_i - 1$, или $r' \leqslant r-1$, причем некоторые из показателей r'_i могут равняться нулю. Очевидно, что то слагаемое из $D^r W$, которое получается с помощью применения оператора D^r к этому одночлену, содержит произведение производных

$$D_i^{r_i}(.x_i)^{r'_i} = D_i^{s_i} D_i D^{r'_i}(.x_i)^{r'_i} = D^{s_i}\delta(x_i).$$

Это произведение с точностью до постоянного множителя можно записать в виде $D^s\delta(x)$, где $s=r-r'-1$ — неотрицательный индекс, т. е. система неотрицательных целых чисел. Складывая то, что получается в результате дифференцирования отдельных одночленов, мы получим нужный результат.

Мы дадим другой вариант доказательства этой последней теоремы, где не используются построения из п. 5. Мы предполагаем, что функционал (f, φ) обращается в нуль для всех основных функций φ, которые равны нулю в некоторой окрестности начала координат и имеют непрерывные производные $D^{r'}\varphi$ при $r' < r$. Тогда мы докажем, что значение (f, φ) для произвольной функции φ зависит только от значения φ и ее производных $D^{r'}\varphi$ в начале координат, или, что то же самое, (f, φ) обращается в нуль, если функция φ и указанные ее производные равны нулю в начале координат. Мы положим $\alpha=1$, $Q(x)=P(x-2; \alpha)+P(-x-2; \alpha)$ и $\varphi_n=Q(nx)\varphi$, где P — функция $P(x; \alpha)$ из § 1, п. 8. При $n\to\infty$ функции φ_n и их производные

порядка меньше r равномерно стремятся к φ и к соответствующим производным φ. Следовательно, так как (f, φ) есть $(r-1)$-непрерывный линейный функционал от φ и $(f, \varphi_n)=0$, мы имеем $(f, \varphi)=\lim_{n\to\infty}(f, \varphi_n)=0$, что и утверждалось. Поскольку (f, φ) зависит только от значений конечного числа производных φ в начале координат, этот функционал должен быть линейной комбинацией значений этих производных. Но это и есть утверждение нашей теоремы.

9. Определенные интегралы. Конечные части. Теперь мы перейдем к „определенным интегралам от обобщенных функций“. Представление $f=D^rW$ сразу позволяет придать некоторый смысл *первообразным функциям* или *неопределенным интегралам* $D^{-s}f$ от некоторой обобщенной функции $f=D^rW$. Их можно было бы просто определить как функции $D^rD^{-s}W$ при $s\leqslant r$. Из п. 8 мы видим, какова степень неопределенности первообразной функции.

Чтобы перейти к рассмотрению *определенного интеграла* от обобщенной функции $f=D^rW$ по области G, мы в этом пункте ограничимся функциями f, которые всюду, за исключением некоторой замкнутой подобласти $\overline{G^*}$ области G, являются обычными гладкими функциями, причем они непрерывны вплоть до (гладкой) границы Γ области G.

Мы получим следующий результат. *Для таких обобщенных функций сохраняется соотношение между первообразной функцией и определенным интегралом, т. е. основная теорема интегрального исчисления.*

Сначала мы рассмотрим функции f одной переменной x и возьмем в качестве G интервал $-1<x<1$; мы предположим, что функция $D^rW=f$ непрерывна в некоторой окрестности концов $x=1$ и $x=-1$. Какое значение Z мы должны приписать символу $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,dx$? Чтобы получить ответ на этот вопрос, мы рассмотрим основную функцию φ, тождественно равную 1 в G (следовательно, все ее производные равны нулю на границе G); далее она произвольным образом продолжается на область $\widehat{G}=\mathcal{J}-G$, дополнительную по отношению к G, так, чтобы она была финитной. Интегрируя по частям, мы получим

$$\pm(f, \varphi)=\pm\int(\varphi D^rW)\,dx=\int\limits_{G+\widehat{G}}W\cdot D^r\varphi\,dx=$$

$$=\int\limits_{\widehat{G}}WD^r\varphi\,dx=\pm\int\limits_{\widehat{G}}\varphi D^rW\,dx+D^{r-1}W\,\Big|_{x=-1}^{x=+1},$$

причем $\pm$ снова обозначает $(-1)^r$. С другой стороны, мы должны,

естественно, иметь $Z=(f, \varphi)-\int\limits_{\widehat{G}} f\varphi\,dx$. Таким образом, мы получаем следующий результат: интеграл по интервалу $G: x^2<1$ от обобщенной функции $f=D^rW$, регулярной в концах интервала, определяется равенством

$$Z=\int\limits_{-1}^{+1} f(x)\,dx=D^{r-1}W\big|_{-1}^{+1}. \tag{13}$$

Точно такая же формула связывала бы определенный и неопределенный интеграл в случае обыкновенной функции f. Между прочим, для случая $r=1$, т. е. для обобщенных функций вида $f=W'$, этот результат справедлив также тогда, когда функция W не дифференцируема на границе.

Эта формула (13) для значения Z была введена Адамаром в качестве *конечной части* интеграла от функции f и была основным орудием в его тонких исследованиях задачи Коши (см. гл. VI, § 15).

Конечно, аналогичная, но несколько более сложная формула получится, если мы будем рассматривать подинтегральное выражение вида $f=gD^rW$, где $g(x)$ — регулярный r-непрерывный множитель. Хотя функцию f такого вида можно свести к рассмотренному выше случаю, мы применим прямые рассуждения по образцу только что проведенных, последовательно интегрируя по частям. Получится следующий результат:

$$\int\limits_{-1}^{+1} gD^rW\,dx=$$

$$=(gD^{r-1}W-DgD^{r-2}W+\ldots\mp D^{r-2}gDW)\big|_{-1}^{+1}\pm\int\limits_{-1}^{1}(W\cdot D^{r-1}g)\,dx.$$

Таким образом, интеграл от обобщенной функции сводится к граничным членам и к интегралу от непрерывной функции $W\cdot D^{r-1}g$.

В качестве примера мы вычислим интеграл $f=\int\limits_{-1}^{+1}(1/x^2)\,dx$, где $1/x^2$ мы будем понимать не как обычную функцию, а как обобщенную функцию $-D^2\log|x|$. Так как $DW=-1/x$, мы сразу получаем

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{1}{x^2}\,dx=-2.$$

Другим примером будет служить обобщенная функция, определенная формулой $f=-4D^2(.x^{1/2})$. За исключением особенности при

$x=0$, эта функция равна нулю для $x<0$, а для $x>0$ отождествляется с $x^{-3/2}$. Интеграл по интервалу $-1 \leqslant x \leqslant 1$ можно вычислить следующим образом:

$$-4\int_{-1}^{+1} D^2(x^{1/2})\,dx = \int_0^1 x^{-3/2}\,dx = -2;$$

в результате получается „конечная часть“ сингулярного интеграла.

Для n переменных также можно получить результаты, аналогичные основной теореме интегрального исчисления. Например, таким результатом является *интегральная формула Гаусса*, если подинтегральная функция составлена из обобщенных функций, которые представляют собой первые производные непрерывных функций; в частности, если подинтегральная функция является дивергенцией некоторого непрерывного векторного поля, то будет справедлива формула Гаусса, известная из классического анализа.

Если же подинтегральная функция $f=D^rW$ получается в результате дифференцирования более высокого порядка, то, как говорилось раньше, мы ограничимся тем случаем, когда обобщенная функция D^rW, или, по крайней мере, одна из n функций $D_i^{-1}D^rW$ является непрерывной функцией в окрестности гладкой границы Γ области интегрирования G, для которой ξ — вектор внешней нормали, а dS — элемент поверхности.

Мы будем пользоваться теми же обозначениями G, G^* $\widehat{G}$, как и раньше, и возьмем функцию φ, равную тождественно единице в G и продолженную на дополнение $\widehat{G}=\mathcal{J}-G$ произвольным образом, но с сохранением условий гладкости и финитности. Так как функция $f=D^rW$ определяется с помощью ее скалярных произведений на основные функции и так как все производные нашей частной основной функции обращаются в нуль в G и на Γ, то мы имеем право ввести интеграл функции f по G на основании следующих соотношений, не требующих пояснений:

$$(f,\varphi) = \int\int\int_{G+\widehat{G}} \varphi D^rW\,dx = \int\int\int_G f\,dx + \int\int\int_{\widehat{G}} \varphi D^rW\,dx =$$

$$= \pm\int\int\int_{\widehat{G}} WD^r\varphi\,dx = \mp\int\int\int_{\widehat{G}} \varphi D^rW\,dx \pm$$

$$\pm\int\int_{\Gamma} (D_i^{-1}D^rW)\,\xi_i\,dS.$$

Таким образом, мы должны положить

$$\int\int\int_G f\,dx = \int\int_{\Gamma} (D_i^{-1}D^rW)\,\xi_i\,dS;$$

подчеркнем присутствие индекса i. Можно получить симметричную формулу, введя символический вектор A с компонентами $A_i = D_i^{-1} D^r W$. Тогда получится формула Гаусса

$$\int\int_G\int \operatorname{div} A\, dx = \int_\Gamma\int A\xi\, dS.$$

Аналогичным образом легко можно обобщить и другие формулы интегрального исчисления.

§ 3. Операции над обобщенными функциями

Введение обобщенных функций может показаться очень сильным расширением обыкновенного анализа. Но в классе обобщенных функций можно производить не все операции классического анализа. Таким образом, преимущество, возникающее за счет возможности неограниченного дифференцирования, отчасти теряется в силу того, что теряется свобода при умножении функций и образовании сложных функций. Не совсем верно даже то, что обобщенная функция нескольких переменных становится обобщенной функцией меньшего числа переменных, если некоторые из этих переменных принимают постоянные значения в области определения. Не проводя систематического исследования выигрыша и проигрыша в области анализа, мы в этом и следующем параграфе подчеркнем несколько основных пунктов.

1. Линейные процессы. Если в некоторой замкнутой области $\bar{\mathcal{G}}^*$ мы положим $f = D^r W$, где W — кусочно-непрерывная порождающая функция, то мы легко можем установить следующее: линейная комбинация таких r-непрерывных обобщенных функций с обычными достаточно гладкими функциями в качестве коэффициентов снова является r-непрерывной обобщенной функцией.

Если порождающая функция W обладает непрерывными производными по параметрам α, то и обобщенную функцию можно дифференцировать по этим параметрам. Например, для функции $f = \delta(\alpha x)$, где α некоторый вектор, мы имеем $f_{\alpha_i} = x_i \delta'(\alpha x)$.

Аналогично, интеграл от обобщенной функции можно дифференцировать по параметрам под знаком интеграла, если справедливы сделанные выше предположения относительно функции W. (Сравните с примерами в гл. VI, § 15.)

Если кусочно-непрерывные порождающие функции W_n стремятся к некоторой кусочно-непрерывной функции W, то в смысле слабой r-сходимости мы имеем $D^r W_n = f_n \to f = D^r W$.

В соответствии с этим мы можем почленно дифференцировать ряды или менять порядок предельных переходов, таких, например, как дифференцирование по различным параметрам.

Что касается интегрирования, то мы сошлемся на § 2, п. 8.

2. Замена независимых переменных. Мы напомним, что обобщенные функции можно локализовать в прямоугольных областях, или вообще в областях $\bar{\mathcal{J}}^*$ с гладкой границей, просто за счет изменения исходной кусочно-непрерывной порождающей функции W, а именно, продолжая W за пределы $\bar{\mathcal{J}}^*$ тождественным нулем. Поэтому при введении новых переменных y вместо x с помощью формулы $x = g(y)$ мы можем ограничиться достаточно малыми областями $\bar{\mathcal{J}}^*$. Мы предположим, что переменные x как функции переменных y в $\bar{\mathcal{J}}^*$ обладают непрерывными производными, например, до порядка r, и что якобиан $\partial(y)/\partial(x)$ отграничен от нуля, так что обратное преобразование обладает той же гладкостью. Тогда в области $\bar{\mathcal{J}}^*$ функция $f = \lim f_n$ преобразуется в обобщенную r-непрерывную функцию переменных y. Это почти сразу следует из второго определения обобщенной функции f с помощью r-сходящейся последовательности непрерывных функций f_n; при этом надо брать основные функции φ с носителем $\bar{\mathcal{J}}^*$. Действительно, производные от основных функций φ по переменным y порядка $r' \leqslant r$ ограничены через производные φ по x вплоть до порядка r'. Но в силу § 2 обобщенная функция $\lim f_n$ от переменных y определяется как $\lim (f_n, \varphi)$.

Отметим как следствие наших рассуждений, что обобщенные функции S одного переменного, введенные в гл. VI, § 4, являются также обобщенными функциями n переменных x.

Без дальнейших пояснений можно показать, что для дифференцирования сложных обобщенных функций, построенных с помощью допустимых преобразований координат, сохраняются обычные правила анализа. Однако надо отдавать себе отчет в том, что наши утверждения относительно преобразований координат и сложных функций основаны на том, что преобразование задается с помощью достаточно гладких функций.

Особенно следует подчеркнуть тот факт, что понятие обобщенной функции от обобщенной функции лишено смысла. Кроме того, хотя можно построить обобщенную функцию от гладкой обычной функции, понятие обычной функции от обобщенной функции не имеет смысла. Даже такие простые операции, как возведение обобщенной функции в квадрат или перемножение двух обобщенных функций одного и того же переменного x, недопустимы. В этом заключается основное ограничение в анализе обобщенных функций.

3. Примеры. Преобразование дельта-функции. Самые важные конкретные примеры касаются дельта-функции. Как легко видеть,

для постоянных a, b и одного переменного x мы имеем

$$\delta(ax-b)=\frac{1}{a}\delta\left(x-\frac{b}{a}\right)\qquad (a\neq 0). \tag{1}$$

Вообще, для некоторой функции $p(x)$, такой, что $p'(0)\neq 0$, а $p(0)=0$, на достаточно малом отрезке $\bar{\mathcal{J}}^*$, содержащем начало координат, мы имеем

$$\delta(p(x))=[p'(0)]^{-1}\delta(x).$$

Предположим, что гладкая функция $p(x)$ имеет нули в точках a_1, a_2, ..., a_n, ..., что либо число m этих нулей конечно, либо a_m стремится к бесконечности и что для всех m мы имеем $p'(a_m)\neq 0$. Тогда легко установить, что

$$\delta(p(x))=\sum_{\nu}[p'(a_\nu)]^{-1}\delta(x-a_\nu). \tag{2}$$

В частности, мы имеем (см. также, например, гл. VI, § 15, п. 5)

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}(\delta(x-a)+\delta(x+a)). \tag{3}$$

В качестве упражнения читатель может истолковать и доказать формулу

$$\delta(\sin x)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu\delta(x-\pi\nu). \tag{4}$$

Заметим также следующее: *дельта-функция является однородной функцией порядка* -1 относительно переменной x (аналогично функция $\delta(x)$ в случае n измерений однородная порядка $-n$).

Соответственно для одной переменной мы имеем соотношение

$$x\delta'(x)+\delta(x)=0. \tag{5}$$

Что касается *перехода к полярным координатам* в случае n-мерной δ-функции, то общие формулы из п. 2 неприменимы в окрестности начала координат. Тем не менее часто применяемую формулу

$$\delta(x)=\frac{1}{\omega_n}\,\frac{\delta(|x|)}{|x|^{n-1}} \tag{6}$$

(ω_n обозначает площадь поверхности n-мерной единичной сферы) можно обосновать; при этом опираются на тот факт, что $\varphi(0)$ есть выражение для функционала $\int\int\delta(x)\varphi(x)\,dx$. Однако надо учитывать, что, строго говоря, получение выражения (6) для n-мерной функции $\delta(x)$ требует некоторого изменения наших определений; например, вводится требование, что $\int\limits_0^\infty\varphi(x)\delta(x)\,dx=\frac{1}{2}\varphi(0)$.

4. Умножение и свертка обобщенных функций. Хотя, вообще говоря, произведение двух обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$ не имеет смысла как общее понятие, произведения вида $f(x)g(y)$ двух обобщенных функций, *зависящих от разных совокупностей независимых переменных x и y*, согласно нашему определению являются обобщенными функциями $2n$ переменных x и y. Действительно, если, например, $f(x)=D_x^r W(x)$, а $g(y)=D_y^s V(y)$, то в очевидных обозначениях мы имеем

$$f(x)\,g(y)=D_x^r D_y^s VW. \tag{7}$$

Для обобщенных функций $f(x)=D^r W$ и $g(x)=D^s V$ от одного и того же переменного x всегда имеет смысл *свертка*[1]), если только один из двух множителей, например $g(x)$, имеет ограниченный носитель; в результате свертывания двух функций получается новая обобщенная функция $F(x)$. Для непрерывных функций f и g свертка определяется формулой

$$F(x)=f*g=g*f=\int\int f(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi=$$
$$=\int\int f(\xi)\,g(x-\xi)\,d\xi, \tag{8}$$

причем мы предполагаем, что основная область интегрирования $\mathcal{G}$ — все пространство x. Для обобщенных функций $f(x)=D_x^r W(x)$ и $g(y)=D_y^s V(y)$ свертка определяется формулой

$$F(x)=f*g=D^r D^s (W*V),$$

где W и V — непрерывные функции и V имеет ограниченный носитель.

(Важность понятия свертки следует из того, что свертка возникает при представлении решений дифференциальных уравнений с помощью фундаментальных решений, а также из того, что *всякая функция есть результат свертки этой функции с дельта-функцией.*) Важным свойством оператора свертки является его перестановочность с дифференцированием.

Многие важные применения свертки связаны со следующим очевидным фактом: любой линейный оператор $L[u(x)]$ можно представить как свертку $(L[u(\xi)],\ \delta(x-\xi))$; следовательно, уравнение $L[u(x)]=0$ эквивалентно формальному интегральному уравнению

$$\left(u(\xi),\ \overset{*}{L}_\xi\delta(x-\xi)\right)=0 \tag{9}$$

относительно u.

Если мы теперь будем аппроксимировать обобщенную дельта-функцию и ее производные соответствующими гладкими обычными функциями, то мы получим аппроксимацию функционального уравнения $L[u]=0$ с помощью обычных интегральных уравнений. (Мы отсылаем к выходящему третьему тому этой книги.)

---

[1]) По-немецки „Faltung".

§ 4. Дополнительные замечания. Модификации теории

1. Введение. Как указывалось выше, имеются различные возможности для обобщения понятия функции. Такие модификации играют важную роль в математической физике; они интересны также с чисто теоретической точки зрения[1]). В этом параграфе мы вкратце рассмотрим некоторые из этих модификаций. За исключением примера в п. 5, они касаются того, как влияют на поведение обобщенных функций во всей области $\mathcal{G}$ краевые условия, или, скорее, условия на бесконечности, налагаемые на основные функции.

Нам будет удобно рассматривать комплекснозначные функции f, g, φ, ψ и определить скалярное произведение обычной формулой

$$(f, g) = \int\limits_{\mathcal{G}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \overline{(g, f)}. \qquad (1)$$

2. Различные пространства основных функций. Пространство $\mathfrak{S}$. Преобразования Фурье. Хотя для целей этой книги пространство финитных основных функций представляется вполне удовлетворительным, иногда бывает полезно рассматривать несколько более широкие классы основных функций (и тем самым несколько сузить „двойственное" пространство обобщенных функций), без существенного изменения определений и методов § 2, 3. В частности, если в качестве основной области $\mathcal{G}$ взять все пространство x, то можно рассматривать пространство $\mathfrak{S}$ основных функций φ, которое состоит из функций, принадлежащих C^∞ и таких, что они и все их производные стремятся к нулю на бесконечности быстрее, чем любая степень $|x|$, т. е. таких, что

$$|x|^N|\varphi| \to 0, \quad |x|^N|D^r\varphi| \to 0$$

для всех r, независимо от того, насколько большим выбрано число N[2]).

В пространстве основных функций $\mathfrak{S}$ скалярное произведение (W, φ) определяется как обычный интеграл по $\mathcal{G}$, т. е. по всему пространству x, от произведения $W\overline{\varphi}$; оно имеет смысл для всех функций W, непрерывных в $\mathcal{G}$, для которых существует положительная постоянная M, такая, что $|W||x|^{-N} \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $N > M$; другими словами, для функций W, которые на бесконечности растут не быстрее некоторого многочлена. В соответствии с определениями § 2 мы можем тогда для любого целочисленного индекса r ввести обобщенные функции

$$f = D^rW \qquad (2)$$

---

[1]) Ср., например, Берковиц и П. Лакс [1].

[2]) *Например, пространство всех функций из* C^∞, *которые вместе со своими производными имеют на бесконечности порядок не выше* e^{-x^2}, *принадлежит* $\mathfrak{S}$.

и определить скалярное произведение f и φ с помощью соотношения

$$(f, \varphi) = (-1)^{|r|} \int W D^r \bar{\varphi}\, dx. \tag{3}$$

Очевидно, что любая обобщенная функция, определенная таким образом над пространством основных функций $\mathfrak{S}$, является также обобщенной функцией над пространством $\mathfrak{D}$ финитных основных функций в смысле определения из § 2. Однако обратное не всегда верно[1]).

Пространство основных функций $\mathfrak{S}$ полезно при построении *теории преобразования Фурье*, переводящего функцию $g(x)$ в функцию

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathcal{G}} \bar{g}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi = f(x). \tag{4}$$

Если функция g принадлежит $\mathfrak{S}$, то, как легко видеть, ее преобразование $\hat{g}$ тоже принадлежит $\mathfrak{S}$ и мы имеем полную взаимность преобразования Фурье:

$$g(x) = \hat{f}(x), \qquad f(x) = \hat{g}(x), \tag{5}$$

и с помощью преобразования Фурье пространство $\mathfrak{S}$ взаимно однозначно переводится в себя.

Отметим важную *формулу Парсеваля*

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}), \tag{6}$$

или

$$\int_{\mathcal{G}} f\bar{g}\, dx = \int_{\mathcal{G}} \hat{f}\bar{\hat{g}}(x)\, dx; \tag{6a}$$

ее легко доказать для функций f и g, принадлежащих классу $\mathfrak{S}$, так как соответствующие интегралы по x быстро сходятся.

Теперь мы можем дать удовлетворительное определение преобразования Фурье $\hat{f}$ функции f, не обязательно принадлежащей пространству $\mathfrak{S}$, но определенной формулой $f = D^r W$ [см. уравнение (2)]; это значит, что мы определим преобразование Фурье для обобщенных функций f над пространством $\mathfrak{S}$, возникающих при дифференцировании функций W, растущих на бесконечности не быстрее некоторого многочлена[2]).

---

[1]) Рассмотрим, например, обычную функцию $f = e^{x^4}$. Ее можно интерпретировать как обобщенную функцию над пространством $\mathfrak{D}$, так как ее скалярное произведение с любой финитной функцией φ получается с помощью обычного интеграла. Но над пространством $\mathfrak{S}$ это определение непригодно, так как, например, функция $\varphi = e^{-x^2}$ является допустимой основной функцией из пространства $\mathfrak{S}$, а скалярное произведение f и φ не существует.

[2]) По поводу этого широкого обобщения преобразования Фурье см. Бохнер [1] и Шварц [1].

Сначала мы снова напомним, что если φ принадлежит $\mathfrak{S}$, то $\psi = \hat{\varphi}$ также принадлежит $\mathfrak{S}$, и наоборот. Затем мы применим формулу Парсеваля (6), но не как теорему, требующую доказательства, а как слабое определение функции $\hat{f}$. Мы положим

$$(\hat{f}, \psi) = (\hat{f}, \hat{\varphi}) = (f, \varphi); \tag{8}$$

при этом мы принимаем во внимание, что правая часть равенства заранее известна в силу (3) и равна $\pm(W, D^r\varphi)$. Поэтому преобразование Фурье полностью определяется с помощью скалярных произведений (8), если ψ и φ пробегают все пространство $\mathfrak{S}$.

Это определение $\hat{f}$ может служить отправной точкой для более глубокого изучения теории преобразования Фурье.

Почти сразу можно установить следующий важный факт. Преобразование Фурье функции $D^s f$ есть $(-ix)^s \hat{f}$ при любом индексе s; вообще, для любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $L[f] = \sum_{\rho} a_\rho D^\rho f$ преобразование Фурье есть

$$\hat{L}[f] = P(-ix)\hat{f},$$

где P — полином $\sum_{\rho} a_\rho (-ix)^\rho$, связанный с дифференциальным оператором L (см. гл. III, прил. 1, § 2). Мы не будем проводить дальнейших рассмотрений и отметим только, что замечания о том, что функция $\delta(x)$ и функция, тождественно равная единице, являются друг для друга преобразованием Фурье, легко укладываются в эту теорию.

3. Периодические функции. Часто бывает полезно ограничиться периодическими порождающими функциями W и периодическими основными функциями φ, обладающими одинаковым периодом, например 2π, относительно всех переменных x_i; основной областью $\mathcal{G}$ служит область $0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi$. Тогда, применяя комплексные обозначения, мы *возьмем в качестве пространства* $\mathfrak{P}$ *основных функций пространство*, натянутое на тригонометрические функции $e^{-i\nu x} = \varphi_\nu$, где ν — вектор с целыми компонентами. Обобщенные функции, определенные формулой $f = D^r W$, мы также будем называть периодическими (см. определение в § 2). Кроме того, с помощью некоторого видоизменения определения § 2 мы можем допустить в качестве порождающих функций W функции с интегрируемым квадратом.

С помощью этих модификаций мы избавляемся от усложнений, связанных с граничными условиями для бесконечных областей. Для дифференциальных уравнений, заданных в конечной области, часто можно периодически продолжить коэффициенты и решения за пределы

рассматриваемой области, не теряя при этом общности[1]). Таким образом достигается возможность применения простых методов.

Как обычно, мы определим коэффициенты Фурье α_ν функции W формулой

$$a_\nu = (W, \varphi_\nu) = \int W e^{-i\nu x}\, dx; \tag{9}$$

здесь и далее мы будем предполагать (в действительности без ограничения общности), что коэффициент a_0, т. е. постоянный член в разложении Фурье, обращается в нуль. Тогда мы получаем *теорему Парсеваля* в виде

$$\|W\|^2 = (W, W) = \int |W|^2\, dx = \pi^{2n} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu|^2. \tag{9a}$$

Для обобщенных функций $f = D^r W$ мы определим скалярные произведения в соответствии с § 2 формулой $(f, \varphi) = \pm (W, D^r \varphi)$. Это позволяет определить коэффициенты Фурье c_ν обобщенной функции $f = D^r W$ как

$$c_\nu = (f, \varphi_\nu) = (D^r W, \varphi_\nu) = \pm (i\nu)^r (W, \varphi_\nu) = \pm (i\nu)^r a_\nu. \tag{9б}$$

Аналогично мы можем рассмотреть интегралы $D^{-r}W$ и их коэффициенты Фурье

$$d_\nu = \pm (i\nu)^{-r} a_\nu = (D^{-r}W, \varphi_\nu), \tag{10}$$

причем всегда предполагается, что постоянный член равен нулю. Формула Парсеваля (9а) наводит на мысль о том, что через обычную норму W можно определить норму порядка r для $D^{-r}W$ и порядка $-r$ для $D^r W$; это делается следующим образом:

$$\| D^r W \|_{-r}^2 = \| D^{-r} W \|_r^2 = \| W \|^2 = \pi^{2n} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu|^2. \tag{11}$$

Во всяком случае, коэффициенты Фурье обобщенной функции f так же, как и коэффициенты Фурье обычной функции, дают *„конкретное“ или „явное“ представление* f. Обобщенная периодическая функция f представляется последовательностью чисел c_ν для всех значений индекса ν (предполагается, что $c_0 = 0$), такой, что существует фиксированное число r, для которого ряд

$$\sum_\nu |c_\nu|^2 |\nu^{-2r}| = \sum_\nu |a_\nu|^2 \tag{12}$$

сходится; тогда числа $(i\nu)^{-r} c_\nu = a_\nu$ являются коэффициентами Фурье некоторой функции W с интегрируемым квадратом.

---

[1]) Такой искусственный прием с успехом применял П. Лакс в работе [6]; затем его применяли и другие. [Этот прием был применен ранее в работе Петровского [5]. — *Прим. ред.*]

Конечно, можно определить и явно производить все операции над периодическими обобщенными функциями, опираясь на это представление.

4. Обобщенные функции и гильбертовы пространства. Негативные нормы. Сильные определения. В § 2 и выше в п. 2 мы вводили обобщенные функции f с помощью „слабых определений", т. е. с помощью „скалярных произведений" с функциями φ, принадлежащими пространству $\mathfrak{D}$; обобщенные функции f рассматриваются как элементы „двойственного пространства" так же, как *в проективной геометрии есть двойственное соответствие между плоскостями и точками*, которое устанавливается через скалярное произведение их координат. Очень интересно[1]), что можно опредеделить обобщенные функции также с помощью *„сильных определений"*, через *пополнение* всюду плотных множеств гладких функций *в некоторой норме гильбертова пространства*. На такой метод опираются основные операции в классическом прямом вариационном исчислении; этот метод с успехом применял П. Лакс[2]) и другие. Здесь мы дадим только его краткое описание.

В случае *периодических функций*, рассмотренных в п. 3, ситуация очень проста. Сначала в гильбертовом пространстве периодических функций W с нормой $\|W\|$ мы рассмотрим всюду плотное множество функций W, обладающих производными вплоть до порядка r; затем мы построим непрерывные функции $D^rW=f$ и пополним это множество в норме $\|W\|$. Таким образом, в это полное гильбертово пространство мы включим в качестве идеальных элементов пределы f и назовем $\|W\|=\|f\|_{-r}$ *негативной нормой* f *порядка* $-r$. Ясно, что для периодических функций эти нормы и соотношения между ними такие же, как те, что даны в п. 2.

Во всяком случае, негативные нормы позволяют дать *сильное определение* идеальных элементов через замыкание по некоторой гильбертовой норме. Легко видеть, что идеальные элементы, полученные с помощью сильного определения, по существу эквивалентны идеальным элементам, ранее построенным с помощью „слабых определений".

Предположение о периодичности совершенно несущественно для этих рассуждений. Для функций W и f, заданных во всем пространстве x, мы могли бы рассматривать основные функции из пространства $\mathfrak{D}$, а функции W — из гильбертова пространства, полученного пополнением пространства финитных функций из C^∞ в норме $\|W\|$. Тогда для любого индекса r пополнение W приводит к гильбертову пространству обобщенных функций $D^rW=f$ с негативной нормой

[1]) См., например, применение к построению решений краевых задач вариационными методами (т. III).

[2]) См., например, П. Лакс [6].

$\|f\|_{-r} = \|W\|$. Заставляя индекс r пробегать все значения и объединяя все определенные таким образом идеальные элементы, мы приходим к определению обобщенных функций, по существу (но не полностью) эквивалентному определению, данному в § 2.

Более ясную аналогию с определением через коэффициенты Фурье в случае периодических функций, конечно, дает теорема Парсеваля (6) для интегралов Фурье.

5. Замечание о других классах обобщенных функций. В качестве иллюстрации, поясняющей, какая степень произвола допустима при введении обобщенных функций, мы добавим следующее краткое замечание. Можно было бы определить полезный класс обобщенных функций, рассматривая на границе, например на границе единичного круга, значения функций, гармонических внутри (или, вообще, рассматривая граничные значения решений некоторого эллиптического дифференциального уравнения). Эти граничные значения могут не существовать в обычном смысле; они вводятся в качестве идеальных элементов через задание аналитической *гармонической* функции внутри. В § 2 мы заметили, что дельта-функцию можно было бы таким образом определить через граничные значения функции Грина. Однако, как читатель легко может увидеть на примерах, граничные значения гармонических функций u вовсе не обязаны быть обобщенными функциями в смысле § 2 или предыдущих пунктов этого параграфа[1]).

С другой стороны, этот новый тип обобщенных функций обладает свойствами, которые позволяют применять их в анализе как полезное орудие. Если вместо гармонических функций в единичном круге мы рассмотрим регулярные аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$, мы получим некоторые дополнительные преимущества, например возможность естественным образом определить произведение и функцию от обобщенной функции.

---

[1]) Например, в полярных координатах ρ и θ в единичном круге $\rho < 1$ ряд

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \rho^\nu \cos \nu\theta,$$

где

$$a_\nu = e^{\sqrt{\nu}},$$

дает функцию, гармоническую при $\rho < 1$; однако норма $\pi^2 \sum |a_\nu|^2 \nu^{-2r}$ не сходится ни при каком целом значении r (см. п. 3), в то время как ряд для u равномерно сходится для $0 \leqslant \rho < 1 - \varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$ и является гармонической функцией.

Несмотря на достоинства теории, изложенной в этом приложении, сделанное выше замечание указывает на необходимость дальнейшего изучения других, менее исследованных возможностей обобщения понятия функции с помощью введения некоторых идеальных элементов. Ценность всех этих понятий должна измеряться не их формальной общностью, а той пользой, которую они могут принести в широкой области анализа и математической физики.

БИБЛИОГРАФИЯ

Агмон, Дуглис, Ниренберг (Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.)

[1] Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **12** (1959), 623—727. (Русский перевод: Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, ИЛ, М., 1962.)

Адамар (Hadamard J.)

[1] Equations aux dérivées partielles. Les conditions définies en général. Le cas hyperbolique, *Enseignement math.*, **35** (1936), 5—42.

[2] Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, Paris, 1932.

[3] Psycology of invention in the mathematical field, Dover, New York, 1954.

Александров А. Д.

[1] Задача Дирихле для уравнения $\det \| z_{ij} \| = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$, *Вестник Ленингр. ун-та*, серия мат. мех. и астр. 1 : 1 (1958), стр. 5—24.

Альфорс, Берс (Ahlfors L., Bers L.)

[1] Riemann's mapping theorem for variable metrics, *Ann. of Math.*, **72** (1960), 385—404.

Ароншайн (Aronszajn N.)

[1] A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. *J. de Math.*, **36** (1957), 235—249.

Асгейрссон (Asgeirsson L.)

[1] Some hints on Huygens' principle and Hadamard's conjecture. *Communs. Pure and Appl. Math.*, **9**, № 3 (1956), 307—326.

[2] Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, *Math. Ann.*, **113** (1936), 321.

[3] Über Mittelwertgleichungen, die mehreren partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung zugeordnet sind. Studies and Essays, Interscience, New York, 1948, pp. 7—20.

Базер и Флейшман (Bazer J., and Fleischman O.)
[1] Propagation of weak hydromagnetic discontinuities, Rep. № MH-10, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1959.

Банах (Banach S.)
[1] Théorie des Opérations Linéaires. Warsaw, 1932. (Украинский перевод: Банах С., Курс функціонального аналізу, Киев, 1948.)

Беккенбах и Джексон (Beckenbach E. F., and Jackson L. K.)
[1] Subfunctions of several variables, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 291—313.

Бергман (Bergman S.)
[1] Linear operators in the theory of partial differential equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, **53** (1943), 130—155.

Берковиц и Лакс (Berkowitz J., and Lax P. D.)
[1] Functions of a real variable. To be published by Wiley, New York.

Бернштейн (Bernstein S.)
[1] Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre, *Math. Ann.*, **59** (1904), 20—76.

Берс (Bers L.)
[1] An outline of the theory of pseudoanalytic functions. *Bull. Am. Math. Soc.*, **62** (1956), 291—331.
[2] Lectures on elliptic equations. Summer Seminar in Applied Mathematics. University of Colorado, Boulder, Colorado, 1957. Lectures in Applied Mathematics, Vol. IV, to be published by Interscience, New York.
[3] Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. Wiley, New York, 1958. (Русский перевод: Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, М., 1961.)
[4] Non-linear elliptic equations without non-linear entire solutions, *J. Ratl. Mech. Anal.*, **3** (1954), 767—787.
[5] Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **7** (1954), 79.

Берс и Гельбарт (Bers L., and Gelbart A.)
[1] On a class of functions defined by partial differential equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, **56** (1944), 67—93.

Берс и Ниренберг (Bers L., and Nirenberg L.)
[1] On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications, Convegno Internazionale sulle Equazioni lineari alle derivate parziali. Edizioni Cremonese, Rome, 1955, pp. 111—140.
[2] On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane, Convegno Internazionale sulle Equazioni derivate parziali, Edizioni Cremonese, Rome, 1955, pp. 141—167.

Биркгоф, Келлог (Birkhoff G. D., Kellogg O. D.)

[1] Invariant points in function space, *Trans. Am. Math. Soc.,* **23** (1922), 96—115.

Бохнер (Bochner S.)

[1] Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademische Verlagsges., Leipzig, 1932. (Русский перевод: Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962.)

Боярский Б. В.

[1] Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами, *Матем. сб.* **43** (85), № 4 (1957), 451—503.

Брело (Brelot M.)

[1] Lectures on potential theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

Бухвальд (Buchwald V. T.)

[1] Elastic waves in anisotropic media, *Proc. Roy. Soc. London,* Ser. A, **253** (1959), 563—580.

Бургатти (Burgatti P.)

[1] Sull' estensione del metodo d'integrazione di Riemann all' equazioni lineari d'ordine *n* con due variabili independenti, *Rend. reale accad. lincei,* Ser. 5a, **15**, № 2 (1906), 602—609.

Вайнштейн (Weinstein A.)

[1] Conformal representation and hydrodynamics, Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress, 1945, University of Toronto Press, Toronto (1946), pp. 355—364.

[2] The generalized radiation problem and Euler-Poisson-Darboux equation, Instituto Brasileir de Educaçãɩ, Cienciae Cultura, 1955, pp. 126—146.

[3] The method of axial symmetry in partial differential equations, Convegno Internazionale sulle Equazioni Lineari alle Derivate Parziali, Trieste (1954), pp. 86—96. Edizioni Cremonese, Roma, 1955.

Вейль (Weyl H.)

[1] Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter, *Ann. Physik,* Ser. 4, **60** (1919), 481—500.

[2] Die Idee der Riemannschen Fläche, 3. Aufl., Teubner, Stuttgart, 1954.

Вейтцнер (Weitzner H.)

[1] On the Green's function for two-dimensional magnetohydrodynamic waves, *Bull. Am. Phys. Soc.,* Ser. 2, **5** (1960), 321.

Векуа И. Н.

[1] Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.

[2] Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М., 1948.

[3] Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, *Матем. сб.*, нов. сер., **31**, № 2 (1952), 217—314.

Винер (Wiener N.)

[1] Certain notions in potential theory, *J. Math. and Phys.*, **3** (1924), 24—51.

[2] The Dirichlet problem, *J. Math. and Phys.*, **3** (1924), 127—146.

Винтнер, Хартман (Wintner A., and Hartman P.)

[1] On hyperbolic differential equations, *Am. J. Math.*, **74** (1952), 834—864.

Вишик М. И. и Ладыженская О. А.

[1] Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, *УМН*, XI, № 6 (1956), 41—97.

Вольтерра (Volterra Vito)

[1] Sur les vibrations des corps elastiques isotropes, *Acta Math.*, **18** (1894), 161—232.

Гамель (Hamel G.)

[1] Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Math. Ann.*, **60** (1905), 459—462.

Гарабедян (Garabedian P.)

[1] Partial differential equations. To be published by Wiley, New York.

[2] Partial differential equations with more than two independent variables in the complex domain, *J. Math. and Mech.*, **9** (1960), 241—272.

Гарабедян, Леви, Шиффер (Garabedian P., Lewy H., and Schiffer M.)

[1] Axially symmetric cavitational flow, *Ann. of Math.*, Ser. 2, **56** (1952), 560—602.

Гарабедян, Либерштейн (Garabedian P., and Lieberstein H. M.)

[1] On the numerical calculation of detached bow shock waves in hypersonic flow, *J. Aeronaut. Sci.*, **25** (1958), 109—118.

Гельфанд И. М.

[1] Некоторые вопросы теории квазилинейных уравнений, *УМН*, **14**, 2 (1959), 87—158.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.

[1] Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958.

Гильберт (Hilbert D.)

[1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Göttingen Nachrichten, 1910; Leipzig, 1924.

Гординг (Gårding L.)

[1] Dirichlet problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, **1** (1953), 55—72.

[2] Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, *Acta Math.*, **85** (1951), 1—62.
[3] Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques. Comptes rendus du colloque pour les équations aux dérivées partielles. Colloque International, CNRS, Nancy (1956), 71—90. (Русский перевод: Гординг Л., Прямое решение задачи Коши для гиперболических уравнений, сб. *Математика,* **2 : 1** (1960), 81—85.)
[4] The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 785—826.

Гофман и Теллер (de Hoffmann F. and Teller E.)
[1] Magneto-hydrodynamic shocks, *Phys. Rev.*, **80** (1950), 692.

Град (Grad H.)
[1] Propagation of magnetohydrodynamic waves without radial attenuation, Rep. No. NYO-2537, Magneto-Fluid Dynamics Division, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1959.

Данфорд и Шварц (Dunford N., and Schwartz J. T.)
[1] Linear operators, Part I: General theory, Interscience, New York, 1958. (Русский перевод: Данфорд Н. и Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.)

Дафф (Duff G. F. D.)
[1] Mixed problems for linear systems of first order equations, *Can. J. Math.*, **10** (1958), 127—160.
[2] The Cauchy problem for elastic waves in an anisotropic medium, *Philos. Trans. Roy. Soc. London,* Ser. A, **252** (1960), 249—273.
[3] Mixed problems for linear systems of first order equations, *Can. J. Math.*, **10** (1958), 127—160.

Де Джорджи (Giorgi E. de)
[1] Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. accad. sci. Torino. Cl. sci. fis. mat. nat.*, Ser. 3, **3**, 1 (1957), 25—43. (Русский перевод: де Джорджи Э., О дифференцируемости и аналитичности экстремалей кратных регулярных интегралов, сб. *Математика,* **4 : 6** (1960), 23—38.)

Дётш (Doetsch G.)
[1] Handbuch der Laplace Transformation, 3 Vols. Birkhäuser, Basel, 1950.
[2] Theorie und Anwendung der Laplace Transformation, Springer, Berlin, 1937.

Джон (John F.)
[1] General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations. Proceedings of Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma (1951), 113—175.

[2] Numerical solution of the equation of heat conduction for preceding times, *Ann. di mat.*, Ser. 4, **40** (1955), 129—142.

[3] On linear partial differential equations with analytic coefficients — Unique continuation of data, *Communs. Pure and Appl. Math.*, 2 (1949), 209—253.

[4] Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Tract. 2, Interscience, New York, 1955. (Русский перевод: Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, М., 1958.)

[5] The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 300—322.

Дуглис (Douglis A.)

[1] Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **5**, № 2 (1952), 119—154.

[2] A criterion for the validity of Huygens' principle, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **9**, № 3 (1956), 391—402.

Жермен (Germain P.)

[1] Remarks on the theory of partial differential equations of mixed type and applications to the study of transonic flow, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **7** (1954), 117—144.

Жермен и Бадер (Germain P., and Bader R.)

[1] Unicité des écoulements avec chocs dans la méchanique de Burgers, Office Nationale des Études et des Recherches Aeronautiques, Paris, 1953, 1—13.

Зауэр (Sauer R.)

[1] Anfangswertprobleme bei partiellen Differenzialgleichungen, 2. Auf., Springer, Berlin, 1958.

Заремба (Zaremba S.)

[1] Sopra un teorema d'unicita relativo alla equazione delle onde sferiche, *Rend reale accad. Lincei*, Ser. 5ª, **24** (1915), 904—908.

Калашников А. С.

[1] *Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого* порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром, *ДАН СССР*, **127**, № 1 (1959), 27—30.

Кальдерон (Calderón A. P.)

[1] Uniqueness in the Cauchy's problem for partial differential equations, *Am. J. Math.*, **80** (1958), 16—36.

Кальдерон и Зигмунд (Calderón A. P., and Zygmund A.)

[1] Singular integral operators and differential equations, *Am. J. Math.* **79** (1957), 901—921.

[2] Singular integral operators and differential equations, *Am. J. Math.*, **80** (1958), 16—36.

Каратеодори (Carathéodory C.)
[1] Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1935.

Карлеман (Carleman T.)
[1] Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables, *Compt. rend.*, **197** (1933), 471—474.
[2] Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables independentes, *Ark. Mat., Astr. Fys.*, **26B, № 17** (1939), 1—9.

Келлер (Keller J. B.)
[1] A geometrical theory of diffraction. Calculus of variations and its applications, ed., L. M. Graves, Proceedings of Symposia on Applied Mathematics, v. 8, pp. 27—52. American Mathematical Society, Providence, 1958.

Келлер, Льюис, Секлер (Keller J. B., Lewis R. M., and Seckler B. D.)
[1] Asymptotic solution of some diffraction problems, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **9** (1956), 207—265.

Келлог (Kellog O. D.)
[1] Foundation of potential theory, Springer, Berlin, 1929.
[2] On the derivatives of harmonic functions on the boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 486—510.

Киселев А. А. и Ладыженская О. А.
[1] О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **21, № 5** (1957), 655—680.

Клайн (Kline M.)
[1] An asymptotic solution of Maxwell's equation, *Communs, Pure and Appl. Math.*, **4** (1951), 225—263.
[2] Asymptotic solution of linear hyperbolic partial differential equations, *J. Ratl. Mech. Anal.*, **3** (1954), 315—342.

Клейн (Klein F.)
[1] Vorlesungen über Höhere Geometrie, 3 Auf., Springer, Berlin, 1926. (Русский перевод: Клейн Ф., Высшая геометрия, Гостехиздат, М., 1939.)

Коппенфельс (Koppenfels W. von)
[1] Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten koeffizienten, *Math. Ann.*, **105** (1931), 694—706.

Копсон (Copson E. T.)
[1] On the Riemann — Green function, *J. Ratl. Mech. Anal.*, **1** (1958), 324—348.

Кордес (Cordes H. O.)
[1] Über die eindeutige Bestimmheit der Lösungen elliptischer Differential-

gleichungen durch Anfangsvorgaben, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen,* Math.-Phys. Kl., Jahre 1956, 239—258.

[2] Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen, *Math. Ann.,* **131** (1956), 273—312. (Русский перевод: Кордес Г. О., О первой краевой задаче для квазилинейных дифференциальных уравнений более чем с двумя независимыми переменными, сб. *Математика,* **3:2** (1959), 75—107.)

Корн (Korn A.)

[1] Über Minimalflachen, deren Radkurven wenig von ebenen Kurven abweichen, Anhang II. Abhandl, Königl. preuss. Akad. Wiss., Berlin, Jahre 1909.

Коши (Cauchy A. L.)

[1] Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles et à coefficients constants, Oevres Complètes, Ser. 2, T. 1, 1823.

Коэн (Cohen P.)

[1] The non-uniqueness of the Cauchy problem, Technical Rep. No. 93, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University, 1960.

Кшивоблоцкий (Krzywoblocki M. Z.)

[1] Bergman's linear integral operator method in the theory of compressible fluid flow. *Österrlich. Ing.-Arch.,* **6** (1952), 330—360.

Кшижанский, Шаудер (Krzyżański M. and Schauder J.)

[1] Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben, *Studia Math.,* **6** (1936), 162—189.

Курант (Courant R.)

[1] Differential and integral calculus, Vol. II, Interscience, New York, 1936. (Русский перевод (с немецкого): Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. I и II, ГНТИ, М.—Л., 1931.)

[2] Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Intersience, New York, 1950. (Русский перевод: Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, ИЛ, М., 1953.)

[3] Cauchy's problem for hyperbolic quasi-linear systems of first order partial differential equations in two independent variables, *Communs. Pure and Appl. Math.,* **14,** № 3 (1961), 257—265.

Курант, Лакс А. (Courant R. and Lax A.)

[1] Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables, *Communs. Pure and Appl. Math.,* 8 (1955), 497—502.

Курант, Лакс П. (Courant R., and Lax P. D.)

[1] On nonlinear partial differential equations with two independent variables, *Communs. Pure and Appl. Math.,* **2** (1949), 255—273.

[2] The propagation of discontinuities in wave motion. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.,* **42,** № 11 (1956), 872—876.

Курант, Фридрихс (Courant R. and Friedrichs K. O.)

[1] Supersonic flow and shock waves, Interscience, New York, 1948. (Русский перевод: Курант Р. и Фридрихс К. О., Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.)

Курант, Фридрихс Леви Г. (Courant R., Friedrichs K. O. and Lewy H.)

[1] Über die partiellen Differenzengleichungen der Physik, *Math. Ann.*, **100** (1928—1929), 32—74. (Русский перевод: Курант Р., Фридрихс К. и Леви Г., О разностных уравнениях математической физики, *УМН*, 8 (1940), 125—160.)

Кюнци (Künzi H. P.)

[1] Quasikonforme Abbildungen, Springer, Berlin, 1960.

Ладыженская О. А.

[1] Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехтеориздат, М., 1953.

Лайтхилл (Lighthill M. J.)

[1] Studies on magnetohydrodynamic waves and other anisotropic wave motions, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, Ser. A., **252** (1960), 397—430.

[2] An introduction to Fourier analysis and generalized functions, Cambridge University Press, New York, 1958.

Лакс (Lax A.)

[1] On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **9**, № 2 (1956), 135—169.

Лакс (Lax P. D.)

[1] A stability theorem for solutions of abstract differential equations, and application to the study of the local behavior of solutions of elliptic equations, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **9**, № 4 (1956), 747—766.

[2] Hyperbolic systems of conservation laws II, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **10** (1957), 537—566.

[3] Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **7** (1954), 159—193.

[4] Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, *Duke Math. J.*, **24** (1957), 627—646.

[5] Nonlinear hyperbolic equations, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **6**, № 2 (1953), 231—258.

[6] On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **8** (1955), 615—633.

Лакс, Филлипс (Lax P. D. and Phillips R. S.)

[1] Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **13**, № 3 (1960), 427—456.

Леви (Levi E. E.)

[1] Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, *Ann. di mat.*, Ser. 3ª, **16** (1909), 161—201.

[2] Sul problema di Cauchy per le equizioni a caratteristiche reali e distinte, *Rend. reale accad. lincei*, Ser. 5ª, **18**, 1° (1908), 331—339.

[3] Sul problema di Cauchy per le equazioni Lineari in due variabili a caratteristice reali, I, II, *Rend. Ist. Lombardo*, Ser. 2, **41** (1908), 409—428, 691—712.

[4] I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivati parziali, *Mem. soc. It. delle sc.*, Ser. 3, **16** (1909), 3—113.

Леви (Lewy H.)

[1] An example of a smooth linear partial differential equation without solution, *Ann. of Math.*, (2), **66** (1957), 155—158.

[2] On the reflection laws of second order differential equations in two independent variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65**, № 2 (1959), 37—58.

[3] A priory limitations for solutions of Monge-Ampère equations I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 417—434.

[4] A priory limitations for solutions of Monge-Ampère equations II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 365—374.

[5] Eindeutigkeit der Lösung des Anfangsproblems einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen, *Math. Ann.*, **104** (1931), 325—339.

[6] Neuer Beweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **101** (1929), 609—619.

[7] Über das Anfangswert Problem einer hyperbolischen nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, *Math. Ann.*, **97** (1927), 179—191.

Лере (Leray J.)

[1] Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 389—429. (Русский перевод: Лере Ж., Униформизация решения линейной аналитической задачи Коши в окрестности многообразия, несущего начальные данные, сб. *Математика* **3:5** (1959), 57—89.)

[2] Hyperbolic differential equations. Lecture Notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1951—1952.

[3] Lectures on hyperbolic equations. Institute for Advanced Study, Princeton, 1952.

Лере и Шаудер (Leray J. and Schauder J.)

[1] Topologie et équations fonctionelles, *Ann. école norm. sup.* **51** (1934), 45—78. (Русский перевод: Лере Ж. и Шаудер Ю., Топология и функциональные уравнения, *УМН*, н. с., **1**, № 34 (1946), 71—95.)

Липман и Швингер (Lippman B. A. and Schwinger J.)
[1] Variational principles for scattering processes I, *Phys. Rev.*, 79 (1950), 409.

Лихтенштейн (Lichtenstein L.)
[1] Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II—3, Heft 8, Leipzig, 1924, pp. 1277—1334.

Льюис (Lewis R. M.)
[1] Discontinuous initial value problems for symmetric hyperbolic linear differential equations, *J. Math. and Mech.*, 7 (1958), 571—592.

Людвиг (Ludwig D.)
[1] Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **13**, № 3 (1960), 473—508.
[2] Conical refraction in crystal optics and hydromagnetics, NYO Rep. № 9084, AEC Computing and Applied Mathematics Center, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1960.
[3] The singularities of the Riemann function, NYO Rep. № 9351, AEC Computing and Applied Mathematics Center, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1960.

Люнебург (Luneburg R. K.)
[1] Mathematical theory of optics, Brown University Press, Providence, 1944.
[2] Propagation of electromagnetic waves, New York University, New York, 1948 (mimeographed).

Магнус, Оберхеттингер (Magnus W. and Oberhettinger F.)
[1] Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, Chelsea, New York, 1949.

Madженес, Стампаккья (Magenes E. and Stampacchia G.)
[1] I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Ann. scuola norm. sup. Pisa* (1958—1959).

Мальгранж (Malgrange B.)
[1] Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. inst. Fourier*, **6** (1955—1956), 271—355.
[2] Sur une classe d'opérateurs différentials hypoelliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, **85**, № 3 (1957), 283—306.

Мизохата (Mizohata S.)
[1] Le problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques et paraboliques, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, Ser. A, **32** (1959), 181—212.
[2] Systèmes hyperboliques, *J. Math. Soc. Japan*, **11** (1959), 205—233.

Микусинский (Mikusiński J.)
[1] Operational calculus, Pergamon Press, New York, 1959. (Русский перевод: Микусинский Я., Операторное исчисление, ИЛ, М., 1956.)

Миранда (Miranda C.)

[1] Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Springer, Berlin, 1955. (Русский перевод: Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, М., 1957.)

Мозер (Moser J.)

[1] A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Communs. Pure and Appl. Math,* **13** (1960), 457—468.

[2] On Harnack's theorem of elliptic differential equations, *Communs. Pure and Appl. Math.,* **14,** № 3 (1961), 577—591.

Морри (Morrey C. B.)

[1] Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics, *University of California Publications in Mathematics* (N. S.), **1** (1943), 1—130.

[2] On the analyticity of the solutions of analytic non-linear elliptic systems of partial differential equations, I and II, *Am. J. Math.,* **80,** № 1 (1958), 198—237.

[3] On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Am. Math. Soc.,* **43** (1938), 126—166.

[4] Second order elliptic systems of differential equations, *Ann. of Math. Studies,* Princeton, **33** (1954), 101—159.

Мюллер (Müller C.)

[1] On the behavior of the solutions of the differential equation $\Delta u = F(x, u)$ in the neighborhood of a point, *Communs. Pure and Appl. Math.,* **7** (1954), 505—515.

Ниренберг (Nirenberg L.)

[1] On a generalisation of quasi-conformal mappings and its application to elliptic partial differential equations, Ann. of Math. Studies, Princeton, № 33 (1954), 95—100.

[2] On elliptic partial differential equations, *Ann. scuola norm. sup. Pisa,* ser. 3, **13,** № 2 (1959), 115—162.

[3] On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity, *Communs. Pure and Appl. Math.,* **6,** № 1 (1953), 103—156.

[4] Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Communs. Pure and Appl. Math.,* **8** (1955), 649—675.

Нитше (Nitsche J.)

[1] Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces, *Ann. of Math.,* **66** (1957), 543—544.

[2] Zu einem Satze von L. Bers über die Lösungen der Minimalflächengleichung, *Arch. Math.,* **9,** (1958), 427—429.

[3] Über Unstetigkeiten in den Ableitungen von Lösungen quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungssysteme, *J. Ratt. Mech.,* **II** (1953), 291—297.

Ньюмен (Newman M. H. A.)

[1] Topology of plane sets of points, Cambridge University Press, New York, 1951.

Нэш (Nash J.)

[1] Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Am. J. Math.*, **80** (1958), 931—954. (Русский перевод: Нэш Дж., О непрерывности решений параболических и эллиптических уравнений, сб. *Математика*, 4 : 1 (1960), 31—52.)

Олейник О. А.

[1] О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций, *ДАН СССР*, **95**, № 3 (1954), 451—454.

[2] О разрывных решениях нелинейных дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **109**, № 6 (1956), 1098—1101.

[3] О единственности обобщенного решения задачи Коши для одной нелинейной системы уравнений, встречающейся в механике, *УМН*, **12**, № 6 (1957), 169—176.

[4] Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений, *УМН*, **12**, № 3 (1956), 3—73.

Оссерман (Osserman R.)

[1] Proof of a conjecture of Nirenberg, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **12** (1959), 229—232.

Пейзер (Peyser G.)

[1] Energy integrals for the mixed problem in hyperbolic partial differential equations of higher order, *J. Math. and Mech.*, **6** (1957), 641—653.

Перрон (Perron O.)

[1] Eine neue Behandlung der Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Z.*, **18** (1923), 42—54.

Петровский И. Г.

[1] Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.

[2] О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, *УМН*, **1**, № 3—4 (1946), 44—70.

[3] О диффузии волн и лакунах для систем гиперболических уравнений, *Матем. сб.*, **17 (59)** (1945), 289—370.

[4] О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюлл. МГУ, сер. матем. и механ., **1**, № 7 (1938), 1—6.

[5] Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, *Матем. сб.*, **2** (44) (1937), 815—866.

Пицетти (Pizetti P.)

[1] Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera, *Rend. reale accad. Lincei,* Ser. 5a, **18** (1909), 309—316.

Плись (Pliś A.)
[1] A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **14**, № 3 (1961), 599—617.
[2] Characteristics of nonlinear partial differential equations, *Bull. Acad. Polon. Sci.* Cl. III, **2** (1954), 419—422.
[3] Non-uniqueness in Cauchy's problem for differential equations of elliptic type, *J. Math. and Mech.*, **9** (1960), 557—562.

Привалов И. И.
[1] Sur les fonctions conjugées, *Bull. Soc. Math. France*, **44** (1916), 100—103.

Проттер (Protter N. H.)
[1] The periodicity problem for pseudoanalytic functions, *Ann. of Math.* (2), **64** (1956), 154—174.

Пуччи (Pucci C.)
[1] Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico, *Rend. accad. naz. lincei* (Classe di scienze fisiche, mat. e naturali), Ser. 8, **23**, fasc. 6 (December, 1957); 24, fasc. 1 (January, 1958).
[2] Studio col metodo delle differenze di un problema di Cauchy relativo ad equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico, *Ann. scuola norm. sup. Pisa*, Ser. 3, **7** (1953), 205—215.

Реллих (Rellich F.)
[1] Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen, *Math. Ann.*, **107** (1933), 505—513.
[2] Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen, *Math. Ann.*, **103** (1930), 249—278.

Риман (Riemann G. F. B.)
[1] Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. *Abhandl. Königl. Ges. Wiss. Göttingen*, **8** (1860).

Рисс (Riesz M.)
[1] A special characteristic surface, Rep. № 25, Dept. of Mathematics, University of Maryland, 1957.
[2] A geometric solution of the wave equation in space-time of even dimension, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **13** (1960), 329—351.

Рубинович (Rubinowicz A.)
[1] Eindeutigkeit der Lösungen der Maxwellschen Gleichungen, *Physik Z.*, **27** (1926), 707—710.
[2] Herstellung von Lösungen gemischter Randwertprobleme bei hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Zusammenstückelung aux Lösungen einfacherer gemischter Randwertaufgaben, *Monatsch. Math. Phys.*, **30** (1920), 65—79.

С е р р и н (S e r r i n J.)

[1] On the Harnack inequality for linear elliptic equations, *J. d'Analyse Math.*, **4** (1956), 292—308.

С и м о н о в Н. И.

[1] О первой краевой задаче для нелинейного эллиптического уравнения, *М., Бюлл. ун-та,* матем., 2 : 1 (1939), 3—18.

С о б о л е в С. Л.

[1] Новый метод решения задачи Коши для уравнений в частных производных второго порядка, *Матем. сб.* (н. с.), **1** (1936), 39—71.

Т а у т ц (T a u t z G.)

[1] Zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen II, *Math. Ann.*, **118** (1943), 733—770.

Т е д о н е (T e d o n e O.)

[1] Sull'integrazione dell'equazione $\partial^2\varphi/\partial t^2 - \sum_i^m \partial^2\varphi/\partial x_i^2 = 0$, *Ann. di mat.*, Ser. 3, **1** (1889), 1.

Т е м п л (T e m p l e G.)

[1] Generalized functions, *Proc. Roy. Soc. London,* Ser. A., 228 (1955), 175—190.

Т р и к о м и (T r i c o m i F.)

[1] Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di seconde ordine, di tipo misto, *Rend. reale accad. lincei,* Ser. 5, **14** (1923), 134—247. (Русский перевод: Т р и к о м и Ф., О линейных уравнениях смешанного типа, Гостехиздат, М.—Л., 1947.)

У н г а р (U n g a r P.)

[1] Single higher order equations and first order systems, Thesis, New York University, 1958.

Ф и н н (F i n n R.)

[1] Isolated singularities of nonlinear partial differential equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, 75 (1953), 385—404.

Ф и н н и Г и л б а р г (F i n n R. and G i l b a r g D.)

[1] Three dimensional subsonic flows and asymptotic estimates for elliptic partial differential equations, *Acta Math.*, **98** (1957), 265—296.

Ф р а н к л ь Ф. И.

[1] О задаче Коши для линейных и нелинейных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа, *Матем. сб.*, н. с., **2** (44), № 5 (1937), 793—814.

Ф р и д л е н д е р (F r i e d l a n d e r F. G.)

[1] Simple progressive solutions of the wave equation, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **43** (1946), 360—373.

[2] Sound pulses in a conducting medium, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **55**, IV (1959), 341—367.

Фридман (Friedman A.)

[1] On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations, *J. Math. and Mech.*, **7** (1958), 43—60.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)

[1] Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables, *Am. J. Math.*, **70** (1948), 555—588.

[2] Symmetric hyperbolic linear differential equations, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **7** (1954), 345—392.

[3] Symmetric positive linear differential equations, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418.

[4] The identity of weak and strong extension of differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55**, № 1 (1944), 132—151.

Фридрихс и Кранцер (Fridrichs K. O. and Kranzer H.)

[1] Notes on magneto-hydronamics VIII. Nonlinear wave motion, Rep. № NYO-6486, AEC Computing and Applied Mathematics Center, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1958.

Фридрихс и Леви Г. (Friedrichs K. O. and Lewy H.)

[1] Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **98** (1928), 192—204.

Хаар (Haar A.)

[1] Über Eindeutigkeit und Analytizität der Lösungen partieller Differenzialgleichungen, Atti de congr. intern. dei mat., Bologna, Vol. 3 (1928), 5—10.

Хартман и Винтнер (Hartman P. and Wintner A.)

[1] On hyperbolic differential equations, *Am. J. Math.*, **74** (1952), 834—864.

Хейнц (Heinz E.)

[1] On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings, *J. d'Analyse Math.*, **5** (1956—1957), 197—272.

[2] Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung, *Math. Ann.*, **131** (1956), 411—428.

Хелльвиг (Hellwig G.)

[1] Partielle Differenzialgleichungen, Teubner, Stuttgart, 1960.

Хёрмандер (Hörmander L.)

[1] Differential operators of principal type, *Math. Ann.*, **140** (1960), 124—146.

[2] On the interior regularity of the solutions of partial differential equations, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **11** (1958), 197—218.

[3] On the regularity of the solutions of boundary problems, *Acta Math.*, **99** (1958), 225—264.

[4] On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.*, **94** (1955), 161—248. (Русский перевод: Хёрмандер Л., К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, ИЛ, М., 1959.)

[5] On the uniqueness of the Cauchy problem (I), *Math. Scand.*, **6** (1958), 213—225, (II), *Math. Scand.*, **7** (1958), 177—190.

Хольмгрен (Holmgren E.)

[1] Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen, *Öfversigt af kongl. Vetenskapsakad. Förh.*, 58 (1901), 91—103.

[2] Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à charastéristiques réelles et distinctes, *Ark. Mat., Astr. Fys.*, **6**, № 2 (1909), 1—10.

Хопф (Hopf E.)

[1] A remark on linear elliptic differential equations of second order, *Proc. Am. Math. Soc.*, **3** (1952), 791—793.

[2] Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitber. preuss. Akad. Wiss. Berlin*, **19** (1927), 147—152.

[3] The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 201—230.

[4] Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, **34**, № 2 (1931), 194—233.

Чинквини-Чибрарио (Cinquini-Cibrario M.)

[1] Un teorema di esistenza e di unicita per un sistema di equazioni alle derivate parziali, *Ann. di mat.* (4), **24** (1945), 157—175.

Шапиро З. Я.

[1] О существовании квазиконформных отображений, *ДАН СССР*, **30**, № 8 (1941), 690—692.

Шаудер (Schauder J.)

[1] Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen, *Studia Math.*, **5** (1937), 34—42.

[2] Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, **38**, № 2 (1934), 257—282.

[3] Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbeträge der Lösungen beziehenden Abschätzungen, *Comment. Math. Helv.* **9** (1936—1937), 263—283.

[4] Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, *Fund. Math.*, **24** (1935), 213—246.

Шварц (Schwartz L.)

[1] Théorie des distributions, t. 1, 2, Hermann, Paris, 1950—1951.

Швингер (Schwinger J.)

[1] On the charge independence of nuclear forces, *Phys. Rev.*, **78** (1950), 135.

[2] The theory of quantized fields, *Phys. Rev.*, **93** (1954), 615.

Шмидт (Schmidt E.)
[1] Bemerkung zur Potentialtheorie, Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914, gewidmet von Freunden und Schülern. Julius Springer, Berlin, 1914.

Штелльмахер (Stellmacher K. L.)
[1] Ein Beispiel einer Huygensschen Differentialgleichung, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, Math.-Phys. Kl., **10** (1953), 133—138.

Эренпрейс (Ehrenpreis L.)
[1] Solutions of some problems of division, (I), *Am. J. Math.*, **76** (1954), 883—903; (II), **77** (1955), 286—292; (III), **78** (1956), 685—715.

Ямагути и Касахара (Yamaguti M. and Kasahara K.)
[1] Sur le système hyperbolique à coefficients constants, *Proc. Japan Acad.*, **35** (1959), 547—550.

Симпозиумы и коллоквиумы

[1] Colloqua International № 71. La Théorie des équations aux dérivées partielles, Nancy, April 9—15, 1956.
[2] Convegno Internazionale sulle Equazioni derivate parziali. Trieste, 1954. Edizioni Cremonese, 1955.
[3] Transactions of the Symposium on partial differential equations. Berkeley, California, June 1955; *Communs. Pure and Appl. Math.*, **9**, № 3 (1956).

Дополнительная литература

Адамар (Hadamard J.)
Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Hermann, Paris, 1903.
Problemes à apparence difficile, *Матем. сб.* (н. с.), **17** (1945), 3—7.

Бельтрами (Beltrami E.)
Sul principio di Huygens. *Rend. Ist. Lombardo*, Ser. 2, **22** (1889), 428—438.

Бибербах (Bieberbach L.)
Theorie der Differentialgleichungen. Springer, Berlin, 1930 (Grundlehren der Math. Wiss., Bd. 6).

Бюро (Bureau F.).
Quelques questions de Géométrie suggérées par la théorie des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques. Colloque de Géométrie Algébrique, Liège, 1949.

Вайнштейн (Weinstein A.)
Les conditions aux limites introduites par l'hydrodynamique. L'enseignement mathématique (1936), pp. 107—125.

On the wave equation and the equation of Euler — Poisson. The Fifth Symposium in Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1954, pp. 137—147.

Гальперн С. А.

О корректной постановке задачи Коши для совместных систем линейных уравнений в частных производных, *Матем. сб.*, 7 (49), 1 (1940), 111—141.

Лакуны негиперболических уравнений, *ДАН СССР*, **132**, № 5 (1960), 990—993.

Гординг (Gårding L.)

Hyperbolic equations. Lecture Notes, University of Chicago, 1957. (Русский перевод: Гординг Л., Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, М., 1961.)

Гурса (Goursat É.)

Cours d'analyse mathématique, t. 1—3, ed. 5, Gauthier-Villars, Paris, 1956. (Русский перевод: Гурса Э., Курс математического анализа, М.—Л., ОНТИ, 1936, т. I, II, III.)

Leçons sur l'intégration des équations aux derivées partielles du premier ordre, ed. 2, Hermann, Paris, 1921.

Джеффрис (Jeffreys H.)

Operational methods in mathematical physics. Cambridge Tracts № 23, Cambridge University Press, New York, 1927.

Камке (Kamke E.)

Differentialgleichungen reeller Funktionen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.

Карсон (Carson J. R.)

Electrical circuit theory and the operational calculus. 1st ed. McGraw-Hill, New York, 1926.

Касахара и Ямагути (Kasahara K. and Yamaguti M.)

Strongly hyperbolic systems of linear partial differential equations with constant coefficients, *Mem. Coll. Sci. Kyoto*, Ser. A, **33**, *Mathematics*, № 1 (1960).

Леви-Чивита (Levi-Civita T.)

Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa. Zanichelli, Bologna, 1931.

Лере (Leray J.)

La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 75—96.

Le calcul differentiel et intégral sur une variété analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France*, **87** (1959), 81—180. (Русский перевод: Лере Ж.,

Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, ИЛ, М., 1961.)

Мизохата (Mizohata S.)
Analyticité des solutions élémentaires du système hyperbolique à coefficients constants, *Mem. Coll. Sci. Kyoto*, Ser. A, 32 (1959), 213—234.

Петровский И. Г.
Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехтеориздат, М.—Л., 1952.

Пикар Е. (Picard E.)
Traité d'analyse, t. 1—3, ed. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1922—1928.

Пуанкаре (Poincaré H.)
Théorèmes généraux sur le potential Newtonien, Leçon 1 in: Figures d'équilibre d'une masse fluide. Leçons professées a la Sorbonne en 1900, Naud, Paris, 1902.

Реллих (Rellich F.)
Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von partiellen Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **109** (1934), 714—745.

Рисс (Reisz M.)
L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math.*, **81** (1949), 1—223.

Томас и Титт (Thomas T. Y. and Titt E. W.)
Systems of Partial Differential Equations and Their Characteristic Surfaces, *Ann. of Math.*, 34 (1933), 1—80.

Форсайт и Розенблум (Forsythe G. E. and Rosenbloom P. C.)
Numerical analysis and partial differential equations. Wiley, New York, 1958.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)
Asymptotic phenomena in mathematical physics, *Bull. Am. Math. Soc.*, **61** (1955), 485—504. (Русский перевод: Фридрихс К., Асимптотические явления в математической физике, сб. *Математика*, 1 : 2 (1957), 79—94.)
On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, *Communs. Pure and Appl. Math.*, 6, № 3 (1953), 299—325.
On differential operators in Hilbert spaces, *Am. J. Math.*, **61**, № 2 (1939), 523—544.

Хольмгрен (Holmgren E.)
Sur les systémes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes à caractéristiques réelles et distinctes, *Ark. Math., Astr. Fys.*, 5, № 1.
Sur l'extension de la méthode d'integration de Riemann, *Ark. Math., Astr. Fys.*, 1 (1903), 317—326; 5, № 16.

Über die Existenz der Grundlösung bei einer linearen Differentialgleichung der zweiten Ordnung, *Ark. Math., Astr. Fys.*, **1** (1903), 209—224.

Über Randwertaufgaben bei einer linearen Differentialgleichung der zweiten Ordnung, *Ark. Math., Astr. Fys.*, **1** (1903), 401—417.

Штелльмахер (Stellmacher K.)

Zum Anfangswertproblem der Gravitationsgleichungen, *Math. Ann.*, **115** (1938), 136—152.

Яффе (Jaffe G.)

Unstetige und mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen, *Z. angew. Math. Mech.*, **1** (1921), 398—410.

Ямагути (Yamaguti M.)

Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégral singulière, *Mem. Coll. Sci., Kyoto*, Ser. A, **32** (1959), 121—151.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ